

I. Cardinaux

Famille 1.

Fait. Soit A un ensemble quelconque

i) soit A est vide, $A = \emptyset$.

ii) soit A est en bijection avec $\{1, 2, \dots, n\}$ $\exists! n$ unique. $\left. \begin{array}{l} \text{iii) soit on dit que } A \text{ est infini} \end{array} \right\} A \text{ fini.}$

Dans le cas ii), on dit que A a cardinal n . Le cardinal de $\emptyset$ est 0.

Dans le cas iii), on dit que le cardinal de A est infini.

(C'est le nombre d'éléments).

Notation: $|A|$, $\text{Card } A$, $\#A$, ...

Fait. i) Si $B \subseteq A$, B et A finis, on a $|B| \leq |A|$, et si $|B| = |A|$ alors $B = A$.

ii) $|B| = |A|$ si $\exists$ une bijection entre A et B .

Proposition. Soient A, B finis non vides, avec $|A| = |B|$, et soit $f: A \rightarrow B$. Alors f bijective $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective.

(Pour les ens. de même cardinal, une condition suffit).

Dém. ii) $\rightarrow$ i): $f(x_1) \neq f(x_2) \neq \dots \neq f(x_n)$ sont n élts distincts, donc $|f(A)| = n$, $f(A) \subseteq B$ et $|B| = n \Rightarrow f(A) = B$.

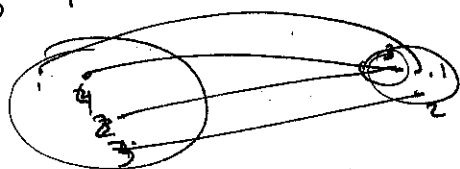
Proposition. A, B finis non vides, $|A| = n$, $|B| = m$.

i) il existe $f: A \rightarrow B$ injective si $n \leq m$.

ii) il existe $f: A \rightarrow B$ surjective si $n \geq m$.

En particulier: Principe des tiroirs (de Dirichlet):

si $|A| > |B|$, pas de fonction injective de A à B :



II. A) Dénombrement, combinatoire

But: soit A fini non vide, nous voulons compter ses éléments.

Opérations entre cardinaux: Soit A, B finis, disjoints partout, $|A \cup B| = |A| + |B|$.

$(A_1, \dots, A_k)$ 2 à 2 disjoints $\rightarrow \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{i=1}^k |A_i|$.

Produit : $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

$$\left(|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i| \right)$$

Principe d'inclusion - exclusion (de Moivre) :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad \left(\text{dmo: } A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow |A| + |B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| + |A \cap B| = |A \cup B| + |A \cap B| \Big).$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

en g n :
$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots + (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_i} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_i}| + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n+1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|.$$

II B) listes, arrangements, combinaisons

Soit A , $|A| = n$.

k-listes :

 l m ts de A^k , $(n_1, \dots, n_k)$, $n_i \in A$

combien?

$$n^k$$

c'est aussi le nombre ~~k t s de~~ de fonctions d'un B , $|B|=k$, vers A .

Arrangements (sans r p.)

liste de k  l m ts distincts

combien?

$$(n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

nombre de $f: B \rightarrow A$ injectives

si longueur n : permutations, $n!$

Combinaisons (sans r p.)

l'ordre ne compte plus
 l m ts distincts.
nombre de sous- m s de A avec
 k  l m ts

$$\text{combien? } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Combinaisons (avec r p.)

 l m ts r p t s

l'ordre ne compte pas

$$\text{combien? } \binom{n+k-1}{k} \quad \text{  d montrer.}$$

$0! = 1$
dans toutes les formules

Factorielle $n!$ (nom: Antiquité, notation avec ! : Kramp)
 $0! = 1$ par définition, $1! = 1$ et $n! = n(n-1) \dots 2 \cdot 1$
 $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n$

définition par récurrence: $0! = 1$ et

pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $n! = (n-1)! \cdot n$

Coefficient binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

(Notation: Andreas von Ettinghausen, 1826)

k -combinaisons de n éléments, nombre de parties à k elmts d'un ensemble à n elmts.
 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (interprétation)

Propriété récursive (Formule de Pascal, ou de Stifel, bien connue avant Pascal)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & 3 & 3 & 1 & \text{etc.} \\ 1 & & & & & & \end{array}$$

Dém. 1) Combinatoire:

Soit A avec $n+1$ elmts, il faut calculer $\binom{n+1}{k+1}$ soit le comb. à $k+1$ elmts.

On choisit un $a \in A$ fixé.

Alors $\binom{n+1}{k+1} = \# \left(\begin{array}{l} \text{comb. à } k+1 \text{ elmts. de } A \\ \text{contenant } a \end{array} \right) + \# \left(\begin{array}{l} \text{comb. à } k+1 \text{ elmts. de } A \\ \text{ne contenant pas } a \end{array} \right)$

$$\begin{aligned} & \text{combin. à } k+1 \text{ elmts de } A = \# \left(\begin{array}{l} \text{il faut choisir } k \\ \text{elmts. parmi } n \end{array} \right) + \# \left(\begin{array}{l} \text{il faut choisir } k+1 \text{ elmts} \\ \text{parmi } n \end{array} \right) \\ & = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \end{aligned}$$

2) Avec les factorielles:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(n-k)! k!} + \frac{n!}{(n-(k+1))! (k+1)!} = \frac{\cancel{k+1} + \cancel{n-k}}{(n-k)! (k+1)!} n! \\ &= \frac{(n+1) n!}{(n-k)! (k+1)!} = \frac{(n+1)!}{((n+1)-(k+1))! (k+1)!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

Binôme de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

et car (x, y) est un couple commutatif
 $n \in \mathbb{N}$.

Démo 1 (classique, par récurrence).

Initialisation: $n=0$: $(x+y)^0 = 1 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \binom{0}{0} x^0 y^{0-0} = 1$

$n=1$: $(x+y)^1 = x+y = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} x^k y^{1-k} = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0 = y+x \quad \checkmark$

Hérédité: soit vraie pour n . il faut prouver:

Alors $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$ à prouver:

On a: $(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y)$

$$= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) (x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} + y^{n+1}$$

$k+1 = m$

$$= x^{n+1} + \sum_{m=1}^n \binom{n}{m-1} x^m y^{n+1-m} + \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} x^m y^{n+1-m} + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{m=1}^n \left[\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} \right] x^m y^{n+1-m} + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{m=1}^n \binom{n+1}{m} x^m y^{n+1-m} + y^{n+1}$$

$$= \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} x^m y^{n+1-m} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

Conclusion: $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, donc vrai pour tout n . $\square$

Démo 2 (combinatoire): $(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y) \dots (x+y)}_n$

somme de monômes $x^k y^j$, $k+j=n$: nombre de fois qu'on a choisi x et y .
forcément $j=n-k$ (quand on ne choisit pas x on choisit y). # de façons de
choisir k fois x parmi les n expressions $(x+y)$: $\binom{n}{k}$ donc $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. $\square$