ANNEE UNIVERSITAIRE 2014 / 2015
DS DE PRINTEMPS

DEVUIP
Service
Scolarité

PARCOURS : L1 **Code UE : SE2014**
Epreuve : Probabilités et Statistique
Date : 18 mars **Heure : 11h00** **Durée : 1H30**

Les exercices sont indépendants. La calculette de Bordeaux est autorisée, mais tout autre document est interdit. Une réponse numérique sans justification n'est pas recevable.

Exercice 1. Selon les sources de Insee de 2011, on donne dans le tableau suivant la répartition des communes selon la tranche du nombre d'habitants

Nb d'habitans	0–200	200–500	500–1000	1000–2000	2000–5000	5000–10000
Répartition en %	26	29	19	13	8	5

(La dernière tranche englobe aussi les communes ayant plus de 10 000 habitants).

1. Tracer l'histogramme de cette répartition (moins d'une demi-page en taille).
2. Tracer la courbe des pourcentages cumulés.
3. Déterminer graphiquement le boxplot.

Exercice 2. Un anagramme est un mot formé en changeant de place les lettres d'un autre mot.

1. Combien d'anagrammes différents le mot PROBA peut-il former ?
2. (Bonus) Même question avec le mot STATS ?

Exercice 3. Une maladie rare est présente au sein d'une population dans la proportion de 1/10 000. Un test de dépistage est commercialisé. Pour une personne atteinte de la maladie, le test est positif à 99%, pour une personne saine, il est positif à 0.1%.

1. Déterminer la probabilité qu'une personne soit atteinte lorsque le test est positif.
2. Déterminer la probabilité qu'une personne soit atteinte lorsque le test est négatif.
3. (Bonus) Commenter en quelques lignes les résultats précédents.

Exercice 4. Une agence de location de voitures possède 2 voitures. Chaque voiture est en état de marche en moyenne 5 jours sur 7. Chaque jour, X clients se présentent à l'agence pour louer une voiture. On suppose que X est une variable aléatoire ne prenant que les valeurs $x = 0, 1, 2, 3$ et de loi

$\boldsymbol{x}$	0	1	2	3
$\mathbb{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x})$	0.1	0.2	0.4	0.3

1. On appelle N le nombre de voitures en état de marche par jour. Vérifier que N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec n et p à déterminer, puis donner dans un tableau les valeurs $\mathbb{P}(N = 0)$, $\mathbb{P}(N = 1)$, et $\mathbb{P}(N = 2)$.
2. On suppose par la suite que X est N sont des variables indépendantes. On appelle Y le nombre de clients repartant de l'agence avec une voiture.
   (a) Expliquer en quelques mots pourquoi l'événement $(Y = 0)$ se décompose sous la forme
   $$(N = 0) \text{ ou } (N \geq 1 \text{ et } X = 0).$$
   Déterminer $\mathbb{P}(Y = 0)$.

(b) De la même manière, décomposer $(Y = 1)$ et $(Y = 2)$, puis déterminer les probabilités de ces événements. Résumer la loi de Y dans un tableau.

(c) On suppose que la location d'une voiture est de 50 € par jour. Déterminer le chiffre d'affaire moyen de l'agence.

Exercice 5. Une étude est réalisée dans la région du gyre subtropical du Pacifique nord afin d'évaluer la quantité de débris plastiques. Cette quantité X de débris est mesurée chaque semaine. On suppose que X est une variable aléatoire normale de moyenne μ et d'écart-type σ inconnues qu'on cherche à déterminer. L'étude montre que la probabilité de trouver au moins 19 700 morceaux par km^2 est de $\mathbb{P}(X > 19\ 700) = 35\%$; elle montre aussi que la probabilité de trouver moins de 16 300 morceaux par km^2 est de $\mathbb{P}(X < 16\ 300) = 25\%$.

1. Rappeler la définition de la variable aléatoire centrée réduite Z en fonction de X, μ et σ.
2. Déterminer à partir des tables de la loi normale, les quantiles q_1 et q_2 tels que

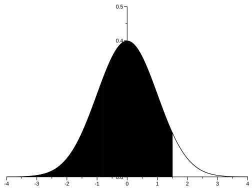
$$\mathbb{P}(Z > q_1) = 35\% \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z < q_2) = 25\%.$$

   (Indication : un des deux quantiles est négatif).
3. (Bonus) Déterminer μ et σ en résolvant un système de deux équations à deux inconnues faisant intervenir les quantiles q_1 et q_2.

Barème indicatif sur 200 : Exo1=50 - Exo2=20 - Exo3=40 - Exo4=60 Exo5= 30

1 Distribution : loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ (répartition)

Table de la fonction de répartition



$$p = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt$$

Par exemple : si $x = 1.5 + 0.04$ alors $p = 0.9382$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

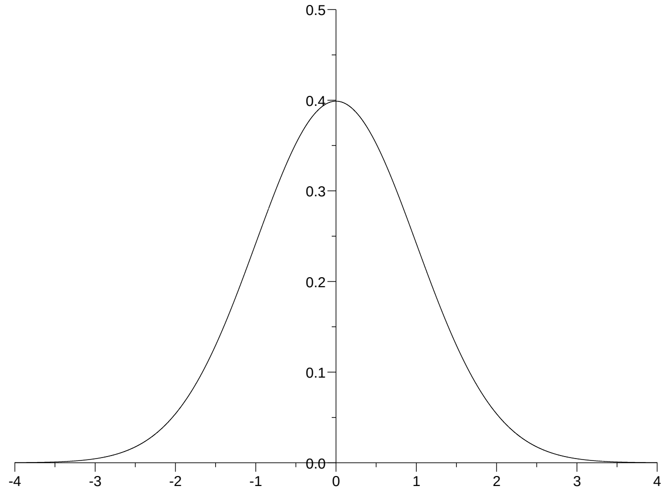
Cas des grandes valeurs de x

x	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7
p	0.998650	0.999032	0.999313	0.999517	0.999663	0.999767	0.999841	0.999892
1-p	0.001350	0.000968	0.000687	0.000483	0.000337	0.000233	0.000159	0.000108

x	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
p	0.999928	0.999952	0.999968	0.999979	0.999987	0.999991	0.999995	0.999997
1-p	0.000072	0.000048	0.000032	0.000021	0.000013	0.000009	0.000005	0.000003

2 Distribution : loi normale centrée réduite (quantile)

Table de dépassement de l'écart absolu : $\mathbb{P}(|Z| > z_\alpha) = \alpha$
Graphe de la densité $\phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\big(-\dfrac{1}{2}t^2\big)$.



Par exemple : si $\alpha = 0.1 + 0.03$ alors $z_\alpha = 1.514$.
Cas des grandes valeurs de α :

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690
0.5	0.674	0.659	0.643	0.628	0.613	0.598	0.583	0.568	0.553	0.539
0.6	0.524	0.510	0.496	0.482	0.468	0.454	0.440	0.426	0.412	0.399
0.7	0.385	0.372	0.358	0.345	0.332	0.319	0.305	0.292	0.279	0.266
0.8	0.253	0.240	0.228	0.215	0.202	0.189	0.176	0.164	0.151	0.138
0.9	0.126	0.113	0.100	0.088	0.075	0.063	0.050	0.038	0.025	0.013

Cas des petites valeurs de α :

α	0.010	0.005	0.002	0.001	0.0005	0.0002	0.0001	0.00005	0.00002	0.00001
x	2.576	2.807	3.090	3.291	3.481	3.719	3.891	4.056	4.265	4.417