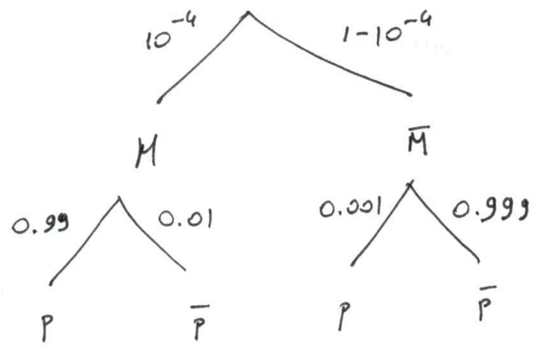
Ex. 3. M = malade $\quad P$ = positif



on cherche

$$\mathbb{P}(M|P) = \frac{\mathbb{P}(P|M)\,\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P)} \quad \text{(Bayes)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(P|M)\,\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P|M)\,\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(P|\bar{M})\,\mathbb{P}(\bar{M})} = \frac{0{,}99 \cdot 10^{-4}}{0{,}99 \cdot 10^{-4} + 0{,}001 \cdot (1-10^{-4})} \simeq 0{,}09 = 9\,\%$$

probas totales

ensuite on veut

$$\mathbb{P}(M|\bar{P}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{P}|M)\,\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(\bar{P})} = \frac{\mathbb{P}(\bar{P}|M)\,\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(\bar{P}|M)\,\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(\bar{P}|\bar{M})\,\mathbb{P}(\bar{M})} = \frac{0{,}01 \cdot 10^{-4}}{0{,}01 \cdot 10^{-4} + 0{,}999 \cdot (1-10^{-4})}$$

$$= 10^{-6} = 10^{-4}\,\%$$

Conclusion : si le test est négatif il est très fiable (presque sûr)
par contre si le test est positif il est fiable seulement au 9 %,
donc si la personne est positive au test il faudra faire des tests supplémentaires.

Ex. 4. Chaque voiture a probabilité $p = \frac{5}{7}$ de marcher à un jour donné.
Donc V_1, V_2 (la voiture V_i marche au jour donné) sont des variables de Bernoulli
$V_1, V_2 \sim \mathcal{B}(\frac{5}{7})$. Alors $N = V_1 + V_2$ est une variable binomiale
(V_1 et V_2 sont indépendantes), $N \sim \mathcal{B}(2, \frac{5}{7})$. $\quad p = \frac{5}{7}$, $1-p = \frac{2}{7}$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(N=0) = \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 = \left(\frac{2}{7}\right)^2 = 0.08$$

$$\mathbb{P}(N=1) = \binom{2}{1} p^1 (1-p)^1 = 2 \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7} = 0.41$$

$$\mathbb{P}(N=2) = \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0 = \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 0.51$$

k	0	1	2
$\mathbb{P}(N=k)$	0.08	0.41	0.51

Ensuite, si $Y=0$, càd pas de clients qui sortent avec une voiture, alors :
soit il n'y a pas de voitures $\Leftrightarrow$ $N=0$
soit il y a des voitures $(N \geq 1)$ et il n'y a pas de client qui se présente $(X=0)$.

Donc $\quad (Y=0) = (N=0) \cup \big((N\geq 1) \cap (X=0)\big)$

Alors

$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(N=0) + \mathbb{P}((N\geq 1)\cap(X=0))$ car $(N=0)$ et $(N\geq 1)\cap(X=0)$ sont disjoints

$= \mathbb{P}(N=0) + \mathbb{P}(N\geq 1)\,\mathbb{P}(X=0)$ car N et X indép.

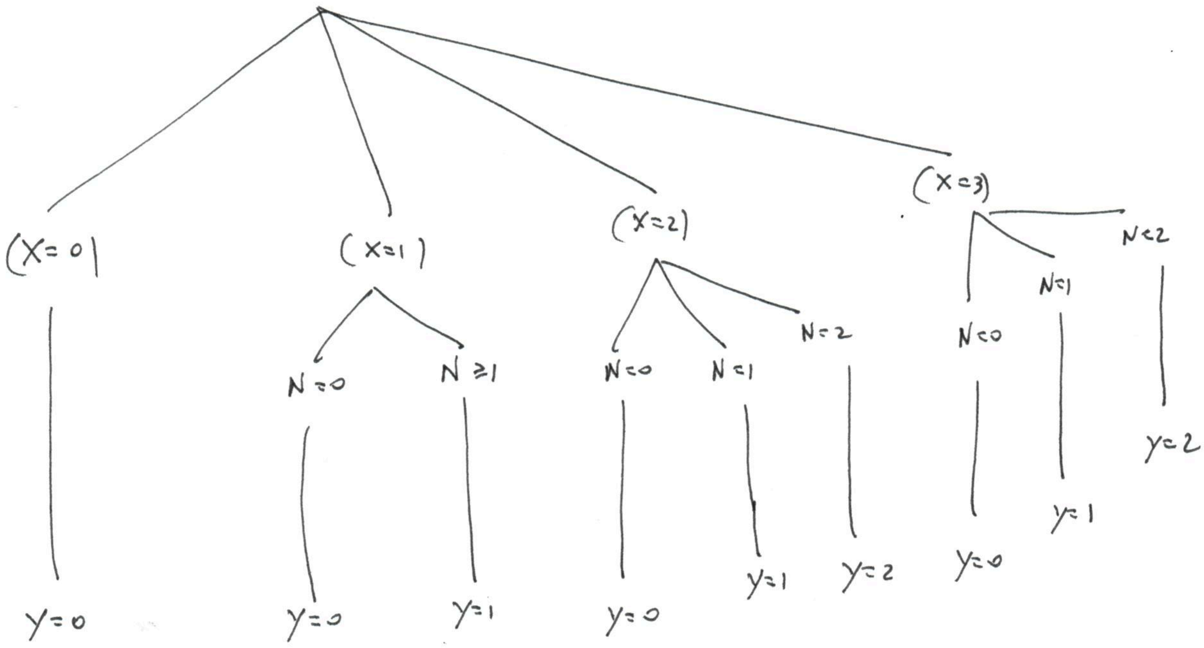
$= 0{,}08 + (0{,}41 + 0{,}51)\cdot 0{,}1 = 0.172$

On décompose de la même façon $(Y=1)$ et $(Y=2)$:

$(Y=1) = \big((N=1)\cap(X\geq 1)\big) \cup \big((N=2)\cap(X=1)\big)$

$(Y=2) = \big((N=2)\cap(X=2)\big) \cup \big((N=2)\cap(X=3)\big) = (N=2)\cap(X\geq 2)$

On peut aussi s'aider d'un dessin :



on a donc :

$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(N=1)\,\mathbb{P}(X\geq 1) + \mathbb{P}(N=2)\,\mathbb{P}(X=1)$

$= 0{,}41\cdot(0{,}2+0{,}4+0{,}3) + 0{,}51\cdot 0{,}2 = 0{,}47$

$\mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}(N=2)\,\mathbb{P}(X\geq 2) = 0{,}51\cdot(0{,}4+0{,}3) = 0{,}36$

donc la loi de Y est donnée par

k	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=k)$	0,17	0,47	0,36

enfin, le chiffre d'affaire moyen est $\mathbb{E}(50Y) = 50\,\mathbb{E}(Y) = 50\big(0\cdot\mathbb{P}(Y=0) + 1\cdot\mathbb{P}(Y=1) + 2\,\mathbb{P}(Y=2)\big)$

$= 50\cdot(0{,}47 + 2\cdot 0{,}36) = 59{,}5$ c-à-d 59 € 50.

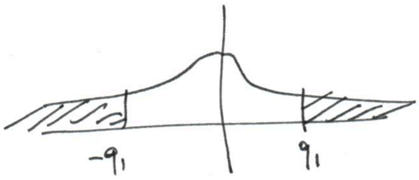
Ex. 5. On sait que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Alors $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

On sait que $35\% = \mathbb{P}(X > 19700) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{19700-\mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{19700-\mu}{\sigma}\right)$

donc $\mathbb{P}(Z > q_1) = 35\%$

$35\% < 50\%$ donc $q_1 > 0$



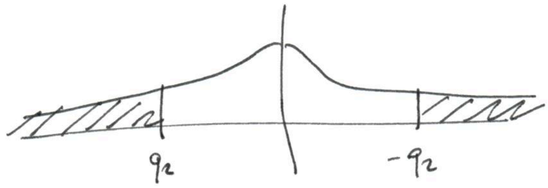
alors $\mathbb{P}(|Z| > q_1) = 2 \cdot 35\% = 70\%$

tables : $\boxed{q_1 = 0.385}$

On sait aussi que $25\% = \mathbb{P}(X < 16300) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{16300-\mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}(Z < q_2)$

donc $\mathbb{P}(Z < q_2) = 25\%$

$25\% < 50\%$ donc $q_2 < 0$



alors $\mathbb{P}(|Z| > -q_2) = 2 \cdot 25\% = 50\%$

tables : $-q_2 = 0.674$ donc $\boxed{q_2 = -0.674}$

Pour trouver μ et σ on résout un système :

$$\begin{cases} q_1 = 0.385 = \dfrac{19700-\mu}{\sigma} \\ q_2 = -0.674 = \dfrac{16300-\mu}{\sigma} \end{cases} \quad \text{qui est} \quad \begin{cases} 19700 - \mu = 0.385\,\sigma \\ 16300 - \mu = -0.674\,\sigma \end{cases} \quad \begin{cases} \mu + 0.385\,\sigma = 19700 & (L_1) \\ \mu - 0.674\,\sigma = 16300 & (L_2) \end{cases}$$

alors par $L_1 - L_2$ on a $(0.385 + 0.674)\,\sigma = 19700 - 16300$

donc $\sigma = \frac{3400}{1.059} = 3210.58$

et par de (L_1) on déduit $\mu = 19700 - 0.385\,\sigma = 18479,98$

En conclusion, $X \sim \mathcal{N}(18480, 3210.58)$

Ex. 2. Si j'ai les lettres P, R, O, B, A, toutes distinctes, pour faire des mots je choisis la première lettre : j'ai 5 choix. Ensuite je choisis la deuxième lettre : j'ai 4 choix. etc. Donc le nombre d'anagrammes de PROBA est $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$

Pour STATS : si les lettres étaient toutes distinctes j'aurais $5!$ anagrammes ; mais chaque fois que j'échange les deux T ou les deux S j'ai le même mot. Alors le nombre d'anagrammes est $\frac{5!}{2 \cdot 2} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 30$.

Ex. 1. C'est un tableau de classes d'amplitude inégale, donc pour tracer l'histogramme il faut que l'aire de chaque rectangle soit proportionnelle à l'effectif de la classe, donc à la fréquence.

On procède de la façon suivante : on fixe h_1 = la hauteur de la classe $[0, 200]$ soit h_2 la hauteur de la classe $[200, 500[$: alors $\frac{\text{Aire } [0,200[}{26} = \frac{\text{Aire } [200,500[}{29}$

donc

$$\frac{h_1 \cdot 200}{26} = \frac{h_2 \cdot 300}{29} \Rightarrow h_2 = \frac{h_1 \cdot 200}{26} \cdot \frac{29}{300} = 0,74\, h_1$$

de même pour les autres classes :

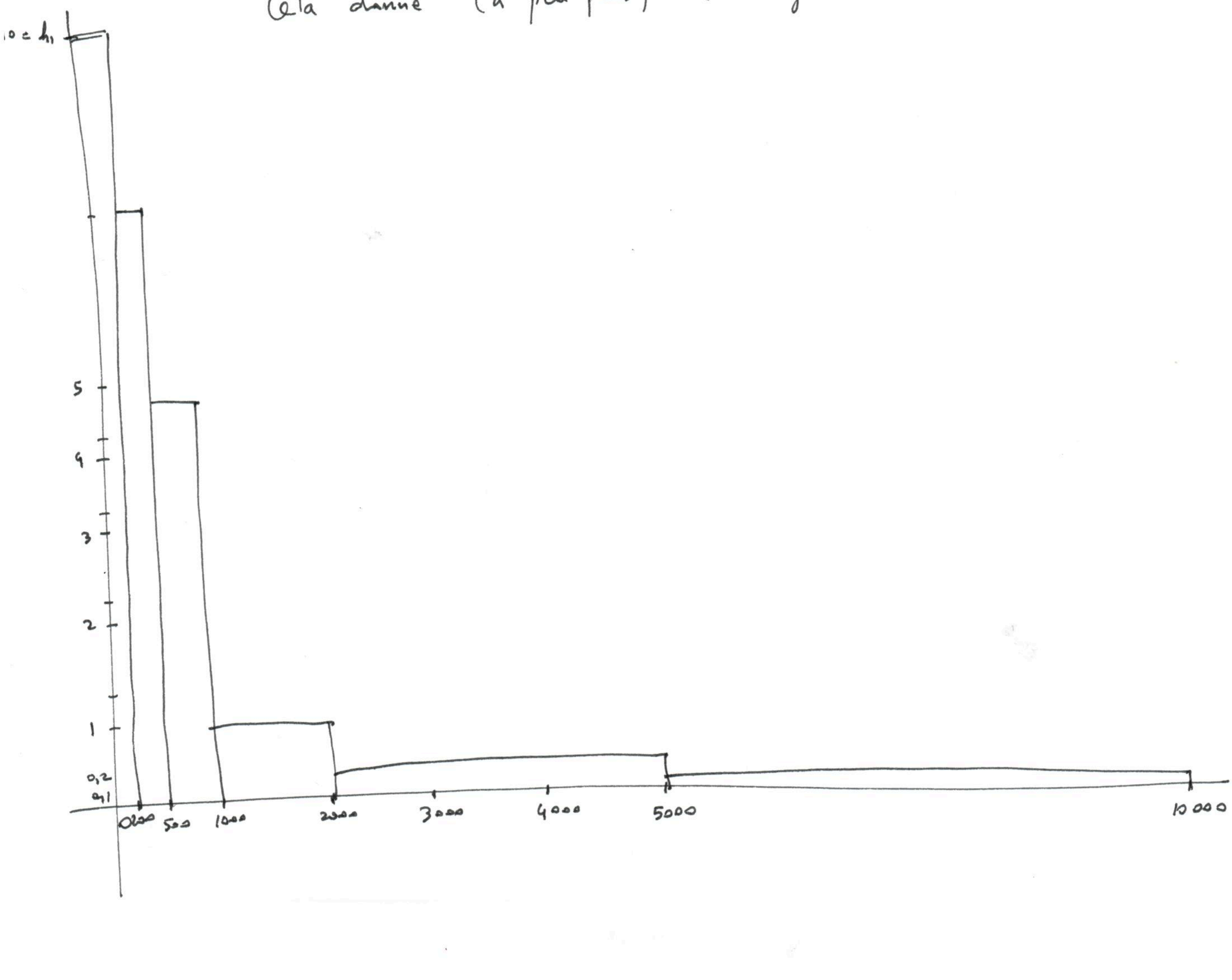
$$\frac{h_1 \cdot 200}{26} = \frac{h_3 \cdot 500}{19} \Rightarrow h_3 = \frac{h_1 \cdot 200}{26} \cdot \frac{19}{500} = 0,49\, h_1$$

$$h_4 = \frac{h_1 \cdot 200}{26} \cdot \frac{13}{1000} = 0,1\, h_1 \quad ; \quad h_5 = \frac{h_1 \cdot 200}{26} \cdot \frac{8}{3000} = 0,02\, h_1$$

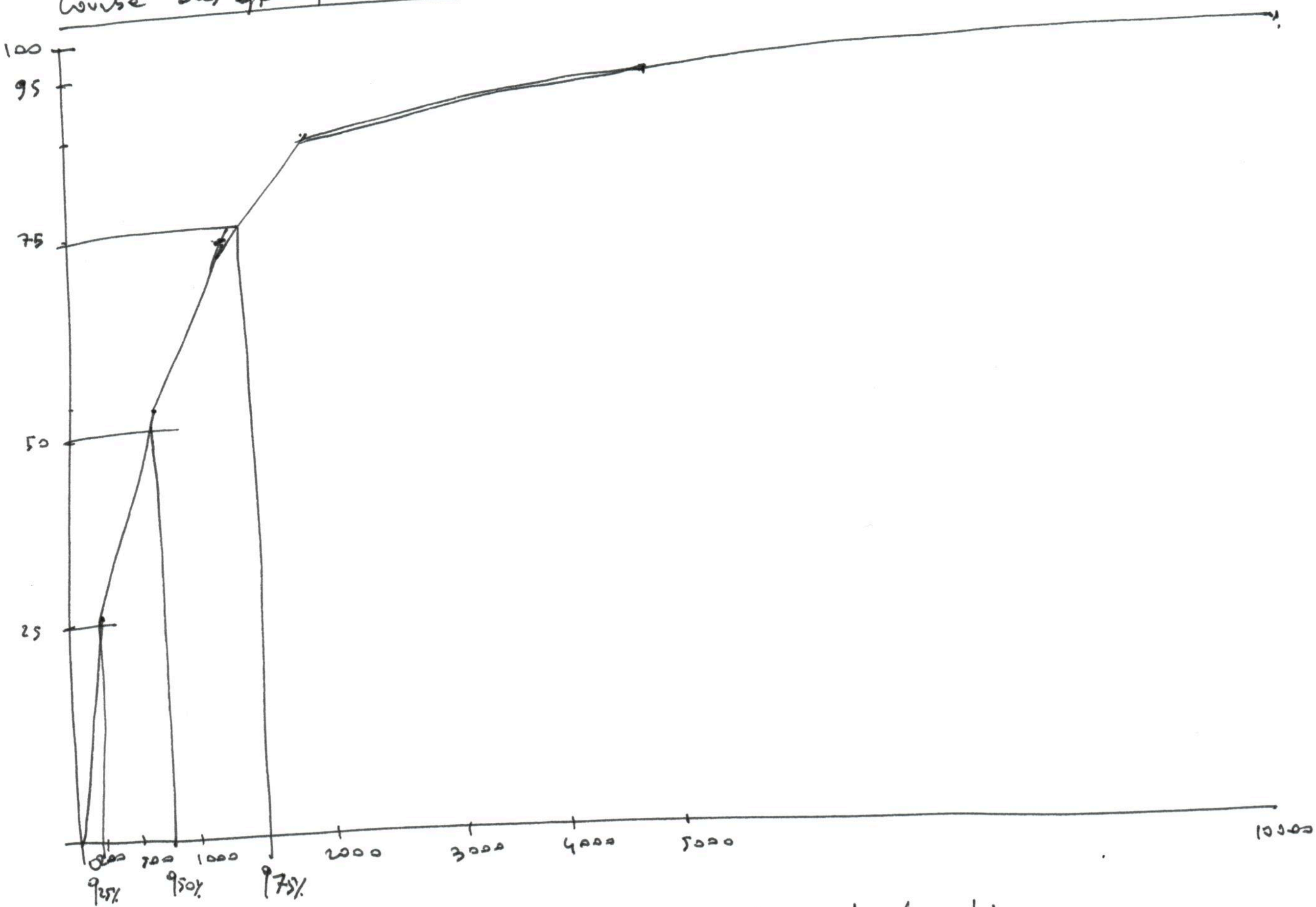
$$h_5 = \frac{h_1 \cdot 200}{26} \cdot \frac{5}{5000} = 0,01\, h_1$$

Ensuite pour dessiner l'histogramme, je donne à h_1 une valeur quelconque et je dessine les rectangles avec les hauteurs qui découlent de mon choix de h_1.
(ici je pose $h_1 = 10$)

Cela donne (à peu près) l'histogramme suivant :

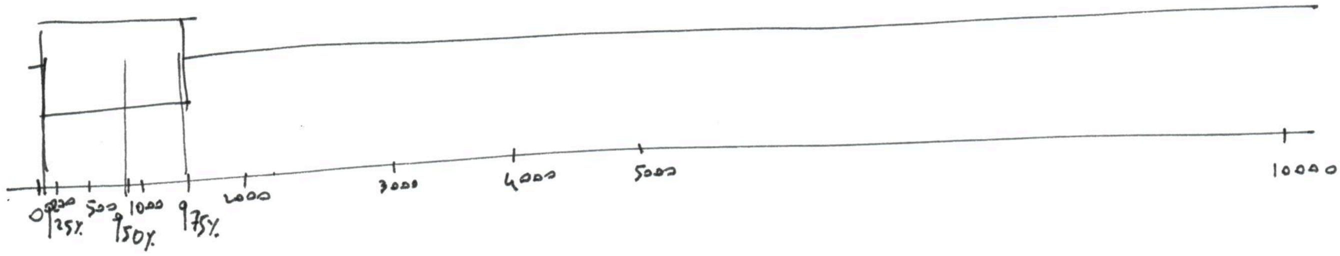


Courbe des ~~effectifs~~ pourcentages cumulés



on détermine les quartiles graphiquement et on trace le boxplot.

On obtient (à peu près) le dessin suivant :



Remarque : dans tous les dessins il faut respecter l'amplitude de la classe !