Contrôle 3 corrigé

Exercice 2

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
120	8.375	70.141
141	29.375	862.891
93	−18.625	346.891
105	−6.625	43.891
76	−35.625	1269.141
132	20.375	415.141
109	−2.625	6.891
117	5.375	28.891

a) On a $\bar{x} = \dfrac{120 + 141 + \cdots + 117}{8} = 111{,}625$

et $\bar{x}$ est une estimation ponctuelle de la moyenne de la population.

b) Vu le tableau ci-dessus, on a

$$S_{n-1} = S_7 = \sqrt{\frac{1}{7}\left((x_1-\bar{x})^2 + \cdots + (x_8-\bar{x})^2\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{7} \cdot 3043{,}878}$$

$$= \sqrt{434{,}84} \approx 20.85$$

et S_{n-1} est une estimation ponctuelle sans biais de l'écart-type de la population.

c) Rappelons la formule de l'intervalle de confiance de la moyenne :

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} - t_\alpha \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_\alpha \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}\right) \ge 1-\alpha.$$

Ici, $\alpha = 5\%$ et $1-\alpha = 95\%$; t_α t.q. $\mathbb{P}(|\mathcal{T}(n-1)| > t_\alpha) = \alpha = 5\%$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(|\mathcal{T}(7)| > t_\alpha) = 5\%$. Table de dépassement : on trouve $t_\alpha = 2.365$

la réalisation de $\bar{X}$ dans l'échantillon est $\bar{x} = 111{,}625$

Alors l'intervalle de conf. au risque 5% de la moyenne μ est

$$\left[111{,}625 - 2.365 \cdot \frac{20.85}{\sqrt{8}},\ 111.625 + 2.365 \cdot \frac{20.85}{\sqrt{8}}\right] \approx [94.19,\ 129.06]$$

Ex. 1. a) Il s'agit de calculer un I.C. de la proportion p d'électeurs favorables à Rossi.

Cette proportion est estimée ~~par~~ sur l'échantillon par $\hat{p} = \frac{58}{100} = 0.58$.

Rappelons la formule :

$$\mathbb{P}\left(\hat{p} - z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) \ge 1-\alpha$$

Ici $\alpha = 5\%$ et $1-\alpha = 95\%$; $n = 100$

z_α est t.q. $\mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| > z_\alpha) = \alpha = 5\%$. Tables de dépassement : $z_\alpha = 1.96$

Alors notre I.C. est

$$\left[0.58 - 1.96\sqrt{\frac{0.58(1-0.58)}{100}} \,,\, 0.58 + 1.96\sqrt{\frac{0.58(1-0.58)}{100}}\right] \approx [0.483 \,,\, 0.677]$$

b) On a 95% de probabilité que p soit situé entre 0.483 et 0.677.

Mais puisque la borne inférieure de cet intervalle est inférieure à 0.5, on ne peut affirmer, au niveau de risque choisi, que Rossi sera élu.

(En d'autres termes : si tout l'I.C. est au-dessus de 50%, on peut affirmer que Rossi sera élu, mais ici on ne peut exclure, au risque 5%, qu'il remporte un score inférieur à 50%).

Remarque. Ce que les journalistes appellent "fourchette" un soir d'élection est un intervalle de confiance de la proportion.