Test de conformité de la moyenne, cas des populations gaussiennes

Ex. 72. $X =$ quantité du produit

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ population gaussienne

$n = 9 \Rightarrow$ petit échantillon

$\bar{x} = \dfrac{60.5 + \cdots + 48.0}{9} = 54.1$ moyenne observée

(H_0) : $\bar{x}$ et μ sont conformes, leur différence n'est pas significative.

Soit $\mu = 50$. On doit faire un test de conformité entre la moyenne observée $\bar{x}$ et μ. ~~Puisque~~ On choisit un test unilatéral, car si $\bar{x} < \mu$ le problème n'a pas de sens.

On a $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}}$ qui suit presque une loi $\mathcal{T}(8)$, car $9 - 1 = 8$.

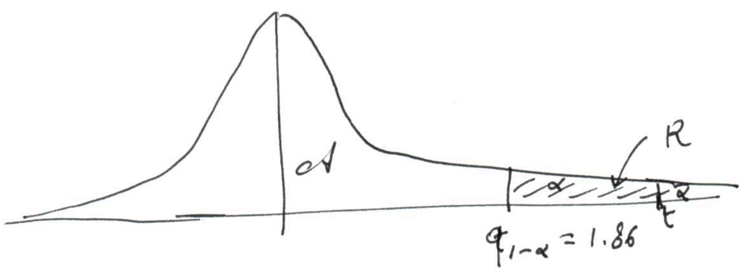
$$S_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{8}\left((60.5 - \bar{x})^2 + \cdots + (48 - \bar{x})^2\right)} \approx 4.678$$

On calcule l'estimation

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}} = \frac{54.1 - 50}{\frac{4.678}{\sqrt{9}}} \approx 2.629$$

et $t > 0$ a priori

risque $\alpha = 5\%$.



On cherche $q_{1-\alpha}$ t.q. $\mathbb{P}(\mathcal{T}(8) \leq q_{1-\alpha}) = 5\%$

$q_{1-\alpha} = t_{2\alpha} = t_{10\%} = 1.86$

<u>Conclusion:</u> on a $t > q_{1-\alpha}$ donc $t \in R$: on rejette H_0 et on conclut que $\bar{x}$ et μ ne sont pas conformes, donc la machine est déréglée, au risque 5%.

<u>p-valeur:</u> On veut $\bar{\alpha}$ t.q. $q_{1-\bar{\alpha}} = t = 2.629$, alors $t_{2\bar{\alpha}} = 2.629$

table de dépassement : $2\bar{\alpha} \approx 0.035$ donc $\bar{\alpha} \approx 0.0175 = 1{,}75\%$.
(toujours $\mathcal{T}(8)$!) (on prend le milieu de 0.05 et 0.02)

Ex. 70. $n = 30$ on a encore (c'est limite !) un petit échantillon.

On doit faire un test de conformité entre la moyenne observée $\bar{x} = 1.24$ et la moyenne théorique $\mu = 1.2$. Soit X la masse. On sait que $X \sim (1.2, \sigma^2)$ donc population gaussienne.

(H_0) : $\bar{x}$ et μ sont conformes, leur différence est due à l'échantillonnage.

Alors $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}}$ suit presque une loi $\mathcal{T}(29)$.

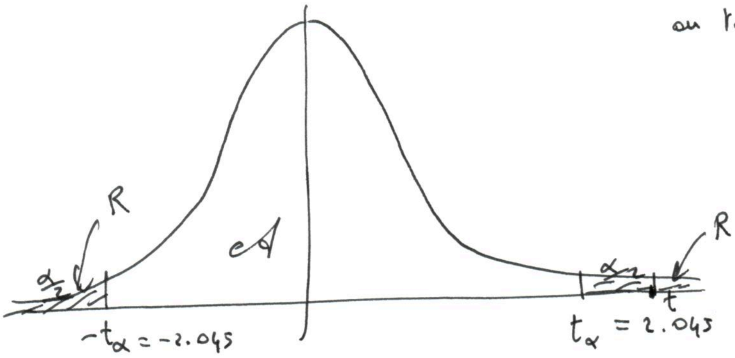
On nous dit que $S_{n-1} = 0.07$. On calcule l'estimation $t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}} = \dfrac{1.24 - 1.2}{\frac{0.07}{\sqrt{29}}} \approx 3.077$

On choisit un test bilatéral, car la moyenne $\bar{x}$ peut être supérieure ou inférieure à μ.

risque $\alpha = 5\%$.

on cherche t_α t.q. $\mathbb{P}(|\mathcal{T}(39)| > t_\alpha) = 5\%$

on trouve $t_\alpha = 2.045$



Conclusion :

$t > t_\alpha$ donc $t \in R$:

H_0 rejetée avec risque 5%. :

à 5% d'erreur, on conclut que la machine est déréglée.

p-valeur : on cherche $\bar{\alpha}$ t.q. $t_{\bar{\alpha}} = t = 3.077$. on trouve $0.001 < \bar{\alpha} < 0.01$ donc $0,1\% < \bar{\alpha} < 1\%$.

~~Exercice~~. Exercice sur le test de la proportion. Dans la population française, le pourcentage d'individus dont le sang est Rh négatif est de 15%. Dans un échantillon de 200 Basques français on observe que 44 personnes sont de Rh négatif. Peut-on dire, au 5% de risque, que les Basques diffèrent du reste de la France en ce qui concerne le caractère Rh ?

Test de conformité entre proportion observée $\hat{p} = \frac{44}{200} = 0.22$ et la proportion théorique $p = 0.15$.

(H_0) : la différence entre $\hat{p}$ et p n'est pas significative ; elle est explicable par l'échantillonage.

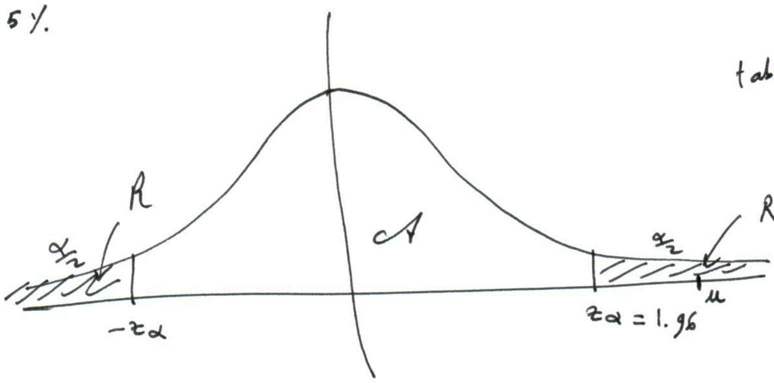
Test bilatéral car il n'y a pas de raison à priori d'avoir $\hat{p} > p_0$.

$n = 200 > 30$, $np_0 > 5$, $n(1-p_0) > 5$ $\Rightarrow$ on peut approximer $\mathcal{B}(n,p)$ par une loi normale.

on calcule $u = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \dfrac{\frac{44}{200} - 0{,}15}{\sqrt{\dfrac{0.15\,(1-0{,}15)}{200}}} \approx 2.77$

$\alpha = 5\%$. on cherche z_α t.q. $\mathbb{P}\left(|\mathcal{N}(0,1)| > z_\alpha\right) = \alpha = 5\%$.

table : $z_\alpha = 1.96$



Conclusion : $u > z_\alpha$ donc $u \notin A$: on rejette H_0. Donc, au risque 5%, les Basque diffèrent du reste de la France en ce qui concerne le caractère Rh.

p-valeur : on cherche $\bar{\alpha}$ t.q. $\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) > u\right) = \frac{\bar{\alpha}}{2} \Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) \leq u\right) = \frac{\bar{\alpha}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - \Phi(u) = \frac{\bar{\alpha}}{2} \Leftrightarrow \bar{\alpha} = 2\left(1 - \Phi(u)\right) = 2\left(1 - \Phi(2.77)\right) \approx$

$2(1 - 0.9972) = 0.0056 = 0.56\%$