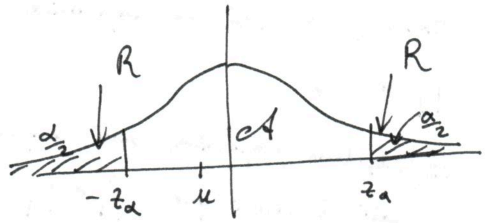
Ex. 66. Il s'agit d'un test de conformité entre la proportion observée $\hat{p} = \frac{19}{197} = 0.0964$ et la proportion théorique $p_0 = 0.1$.

(H_0) : les deux proportions sont conformes. Leur différence n'est pas significative.

test bilatéral, on peut avoir $\hat{p} < p_0$ ou $\hat{p} > p_0$.

On a $n = 197$, ~~p_0~~ $n p_0 = 19{,}7 > 5$ $\quad n(1-p_0) > 5$. On peut utiliser l'approximation de la loi normale.

On calcule $u = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \dfrac{\frac{19}{197} - 0.1}{\sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{197}}} \approx -0.166$



risque $\alpha = 5\%$

donc on cherche z_α t.q. $\mathbb{P}\left(|\mathcal{N}(0,1)| \geq z_\alpha\right) = \alpha = 5\%$

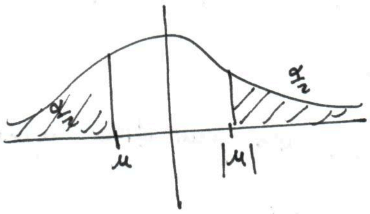
on trouve $z_\alpha = 1.96$.

Conclusion : on a $u \in \left]-z_\alpha, z_\alpha\right[$ donc H_0 acceptée ~~avec~~ au risque 5%.

p-valeur : c'est $\bar{\alpha}$ t.q. $\mathbb{P}\left(|\mathcal{N}(0,1)| \geq |u|\right) = \bar{\alpha} \iff \bar{\alpha} = 2\,\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) \geq |u|\right) =$

$= 2\left(1 - \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) < |u|)\right) = 2\left(1 - \Phi(|u|)\right) = 2\left(1 - \Phi(0.166)\right) = 2\left(1 - 0.5675\right) \approx 0.865$

p-valeur grande.



Ex. 67. Test de conformité entre la proportion observée $\hat{p} = \frac{61}{147}$ et la proportion théorique $p_0 = 0.5$

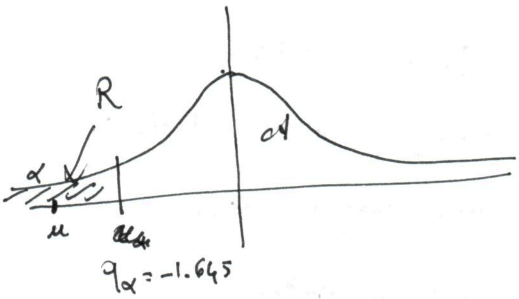
(H_0) : les deux proportions sont conformes, donc le traitement n'est pas efficace.

test unilatéral, car on sait a priori que $\hat{p} < p_0$ (sinon ce ne serait pas un vaccin!)

On a $n = 147$, $n p_0 > 5$, $n(1-p_0) > 5 \Longrightarrow$ l'approximation par loi normale marche.

On calcule $u = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \dfrac{\frac{61}{147} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{147}}} \approx -2.062$ $\quad$ ($u < 0$ a priori)

risque $\alpha = 5\%$.



on cherche q_α t.q.

$\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) < q_\alpha\right) = \alpha = 5\%$ alors

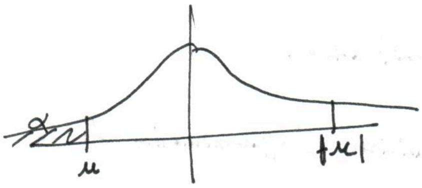
$\mathbb{P}\left(|\mathcal{N}(0,1)| > |q_\alpha|\right) = 10\%$

donc (table) $|q_\alpha| = 1.645$ et $q_\alpha = -1.645$

on a $u < q_\alpha$ donc H_0 rejetée et H_1 acceptée ~~avec ris~~ (c-à-d. vaccin efficace) avec risque $\alpha = 5\%$.

La p-valeur : $\bar{\alpha}$ t.q. $\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \le u) = \bar{\alpha}$

donc $\bar{\alpha} = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \ge |u|) = 1 - \Phi(|u|) = 1 - \Phi(2.062) = 1 - 0.98 \approx 2\%$



Ex. 68 a) Test de conformité entre la proportion observée $\hat{p}_A = \frac{389}{887} = 0.439$ et la proportion théorique $p_A = 0.4$

(H$_0$) : ~~les~~ deux proportions sont conformes, en particulier : non, le candidat A ne recevra pas plus de 40%.

On sait à priori que $\hat{p}_A > p_A$ donc test unilatéral, avec $u > 0$.

On a $n > 30$, $np_A > 5$, $n(1-p_A) > 5$ donc $\mathcal{N}(0,1)$ marche.

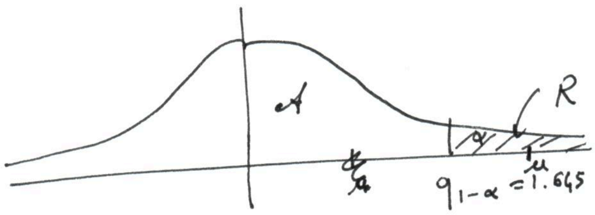
On calcule $u = \dfrac{\hat{p}_A - p_A}{\sqrt{\frac{p_A(1-p_A)}{n}}} = \dfrac{\frac{389}{887} - 0.4}{\sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{887}}} \approx 2.344$

Maintenant on fixe $\alpha = 5\%$.

on cherche $q_{1-\alpha}$ t.q. $\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \le q_{1-\alpha}) = 1-\alpha$

donc $q_{1-\alpha} = z_{2\alpha}$ t.q. $\mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| \ge z_{2\alpha}) = 2\alpha = 10\%$

on a $q_{1-\alpha} = 1.645$



Conclusion Alors $u \notin A$ donc H$_0$ ~~ne peut être~~ rejetée, donc le candidat, au risque α, recevra plus de 40% de votes.

b) Même question avec $\hat{p}_B = \frac{369}{887} = 0.416$ et $p_B = 0.4$

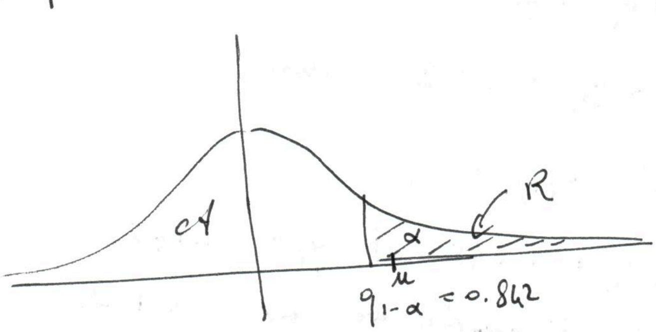
même test et même (H$_0$).

$$u = \frac{\hat{p}_B - p_B}{\sqrt{\frac{p_B(1-p_B)}{n}}} = \frac{\frac{369}{887} - 0.4}{\sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{887}}} \approx 0.973$$

On fixe $\alpha = 20\%$.

$q_{1-\alpha} = z_{2\alpha}$ t.q. $\mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| \ge z_{2\alpha}) = 40\%$

on trouve $q_{1-\alpha} = 0.842$



Conclusion : $u > q_{1-\alpha}$ donc $u \in R$, H$_0$ rejetée avec risque 20%, donc le candidat B, au risque 20%, recevra plus de 40% de votes.