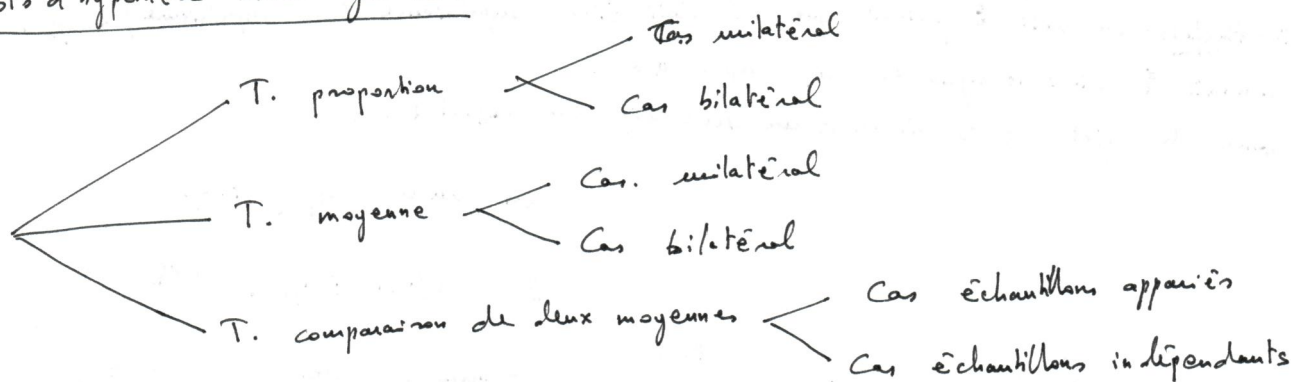




Test d'une proportion

Le problème : Population P ; on a un caractère statistique qui a deux modalités A et $\bar{A}$. Soit p_0 la proportion des individus qui présentent A .
 On dispose d'un échantillon de taille n . Sur l'échantillon on observe une proportion $\hat{p}$.
 La question qui se pose : l'échantillon est représentatif de P , la différence entre $\hat{p}$ et p_0 est explicable par les aléas dus à l'échantillonnage

l'échantillon n'est pas représentatif

∴ faut faire un test → donc il s'agit d'un test de conformité entre p_0 et $\hat{p}$.

Le test (H_0) : la proportion observée $\hat{p}$ est conforme à la proportion théorique p_0 .

Fait : Supposons qu'on puisse approximer $B(n, p)$ par une loi normale, savoir $n \geq 30$, $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$. Alors sous (H_0), la variable :

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \text{ suit presque } \mathcal{N}(0, 1).$$

Procédure : On calcule $u = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ sur l'échantillon. Puis on fixe le risque α .

Cas d'un test bilatéral :

(H_1) est le contraire de (H_0), c-à-d. la différence entre $\hat{p}$ et p_0 est trop importante pour être explicable en termes par les fluctuations de l'échantillonnage

On cherche z_α t.q. $P(|\mathcal{N}(0, 1)| > z_\alpha) = \alpha$.

(table de probabilité)

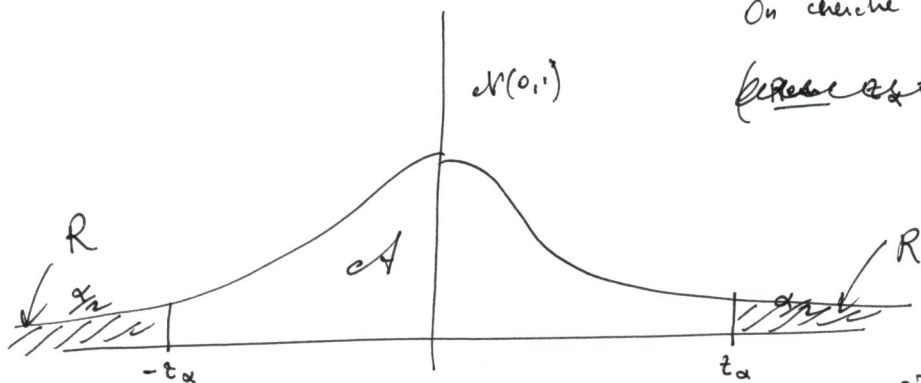
Alors conclusion :

si $u \in]-z_\alpha, z_\alpha[= \text{ad}$

⇒ (H_0) n'est pas acceptée

si $u \notin]-z_\alpha, z_\alpha[\Rightarrow$

on rejette (H_0) avec proba α de se tromper

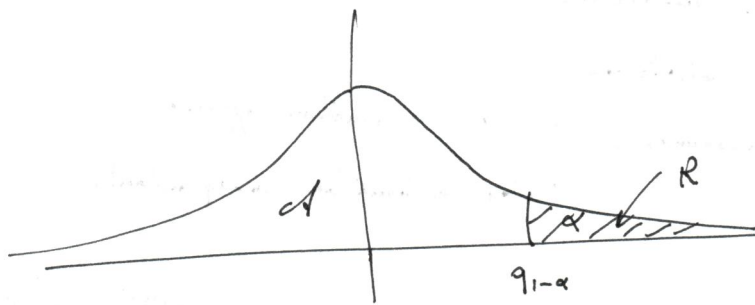


Cas d'un test unilatéral

Dans ~~cet~~ ^{cas} ~~particulier~~ ^{on sait à priori} que $\hat{p}$ doit être supérieure (ou inférieure) à p_0 . Page 2

Alors on connaît à priori le signe de μ , sup. $\mu > 0$.

Alors la zone de rejet R est située d'un seul côté par rapport à 0.



on cherche $q_{1-\alpha}$ t.q.

$$P(X(0,1) \leq q_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$$

(Remarque est $q_{1-\alpha} = z_{1-\alpha}$ donc t.j.s table de dépassement)

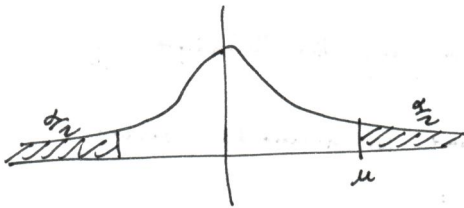
conclusion :

si $\mu < q_{1-\alpha} \Rightarrow (H_0)$ acceptée

si $\mu \geq q_{1-\alpha} \Rightarrow (H_0)$ rejetée avec risque d'erreur α .

La p-valeur

Cas du test bilatéral



(supposons $\mu > 0$)

ici la p-valeur est $\bar{\alpha}$ t.q.

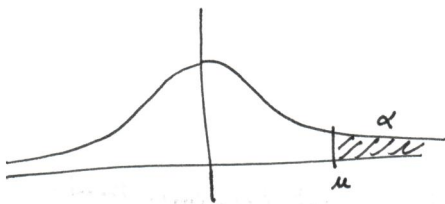
$$P(X(0,1) \geq \mu) = \frac{\bar{\alpha}}{2} \text{ donc}$$

$$P(X(0,1) \leq \mu) = 1 - \frac{\bar{\alpha}}{2}$$

$$\Rightarrow \Phi(\mu) = 1 - \frac{\bar{\alpha}}{2}$$

$\Rightarrow \bar{\alpha} = 2 - 2\Phi(\mu)$ table de la fonction de répartition.

Cas du test unilatéral



(supposons $\mu > 0$)

p-valeur : α t.q.

$$P(X(0,1) \geq \mu) = \alpha \text{ donc}$$

$$1 - \Phi(\mu) = \alpha$$