

Le problème Population P. On a un caractère ~~qualitatif~~ quantitatif de loi $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

(Cas des populations gaussiennes) On observe X sur un échantillon de taille n.

On observe une moyenne $\bar{x}$ et un écart-type S_{n-1} .

Soit l'échantillon représentatif de P, la différence entre $\bar{x}$ et μ s'explique

Question $\left\{ \begin{array}{l} \text{par l'échantillonnage} \\ \text{l'échantillon n'est pas représentatif.} \end{array} \right.$

donc il s'agit d'un test de conformité entre $\bar{x}$ et μ .

Le test (H_0): l'échantillon est représentatif de P, $\bar{x}$ est conforme à μ .

Fait. Si $n \leq 30$ (petit échantillon) et on ne connaît pas σ , alors sous (H_0), la variable

$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}}$ suit la loi $\mathcal{T}(n-1)$ de Student à $n-1$ d.d.l.

Procédure. On calcule $t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}}$ sur l'échantillon. On fixe le risque α .

Cas bilatéral

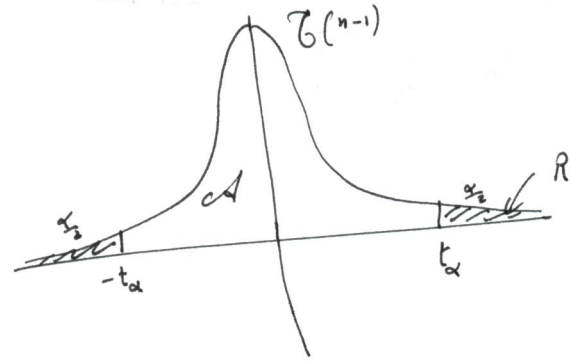
(H_1) est la contraire de H_0 .

On cherche t_α t.q. $P(|\mathcal{T}(n-1)| > t_\alpha) = \alpha$

Conclusion:

$t \in]-t_\alpha, t_\alpha[\Rightarrow H_0$ acceptée

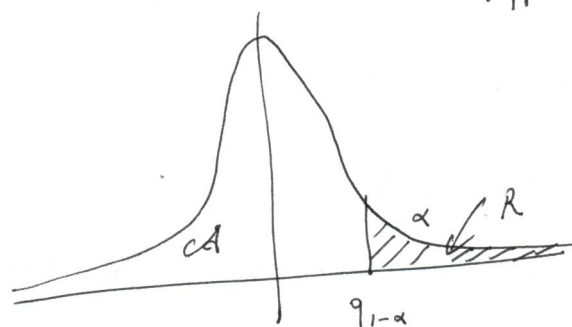
$t \notin]-t_\alpha, t_\alpha[\Rightarrow H_0$ rejetée au risque α .



Cas unilatéral (p.ex. $t > 0$)

supposons que $t > 0$ a priori, alors la zone de rejet R est située d'un seul côté.

supposons $t > 0$



on cherche $q_{1-\alpha}$ t.q.

$$P(\mathcal{T}(n-1) \leq q_{1-\alpha}) = \alpha$$

Remarque $\boxed{q_{1-\alpha} = t_{2\alpha}}$ (donc toujours table de dépassement)

Conclusion:

$t < q_{1-\alpha} \Rightarrow t \in ca, (H_0)$ acceptée ;

$t \geq q_{1-\alpha} \Rightarrow t \in R, (H_0)$ rejetée au risque α

Le problème Dans deux populations P_1, P_2 on étudie une quantité X .

On suppose que X ~~est~~ dans P_1 et dans P_2 suit une loi normale (populations gaussiennes);
~~de plus~~ Alors $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ dans P_1

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \text{ dans } P_2.$$

De plus, on suppose $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

On a un échantillon E_A de P_1 , ^{détaille n_A} avec moyenne observée $\bar{x}_A$ et écart $\hat{\sigma}_A$ S_A ; et on a

un échantillon E_B de P_2 , ^{détaille n_B} avec moyenne observée $\bar{x}_B$ et écart $\hat{\sigma}_B$ S_B

Les deux échantillons E_A et E_B sont supposés indépendants.

Question $\left\{ \begin{array}{l} \text{soit la différence entre } \bar{x}_A \text{ et } \bar{x}_B \text{ n'est pas significative, d'elle est} \\ \text{due à l'échantillonnage et en réalité } P_1 \text{ et } P_2 \text{ sont la même population (homogénéité)} \\ \text{soit la différence est significative.} \end{array} \right.$

On doit donc faire un test d'homogénéité entre $\bar{x}_A$ et $\bar{x}_B$.

Le test (H_0): $\mu_A = \mu_B$, et la différence entre $\bar{x}_A$ et $\bar{x}_B$ n'est pas significative.

Fait. Si $n_A \leq 30$ ou $n_B \leq 30$ (cas de petits échantillons), populations gaussiennes et $\sigma_A = \sigma_B = \sigma$,

alors $T = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}}$ suit à peu près la loi de Student $\mathcal{C}((n_A-1) + (n_B-1))$.

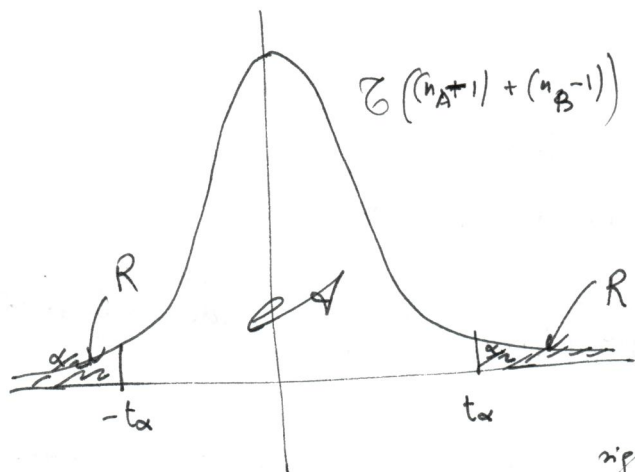
Procédure On fixe α risque. On calcule $t = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\hat{\sigma}_{AB} \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}}$, ^{estimation}

où $\hat{\sigma}_{AB} = \sqrt{\frac{(n_A-1)S_A^2 + (n_B-1)S_B^2}{(n_A-1) + (n_B-1)}}$ estime σ .

Cas bilatéral (on ne traite pas le cas unilatéral)

(H_1) est le contraire de (H_0)

On cherche t_α t.q. $P(|\mathcal{C}(n_A+n_B-2)| \geq t_\alpha) = \alpha$
 (table de paramètre loi de Student).



Conclusion: Si $t \in]-t_\alpha, t_\alpha[\Rightarrow t \in A \Rightarrow$
 $\Rightarrow (H_0)$ acceptée

Si $t \notin]-t_\alpha, t_\alpha[\Rightarrow t \in R \Rightarrow$

(H_0) rejetée. Alors $\bar{x}_A$ et $\bar{x}_B$ sont
 significativement différentes au risque α .

p-valeur: c'est α t.q. $P(|\mathcal{C}(n_A+n_B-1)| > |t|) = \alpha$ (table de paramètre loi de Student)

Le problème Deux échantillons ~~sur~~ A et B sont dits appariés lorsque chaque valeur $x_{A,i}$ de A est associée à une valeur $x_{B,i}$ de B (appariés = associés par paires)

(p.ex. A = n malades avant traitement, B = les mêmes n malades après traitement)

Donc A et B ont la même taille $n_A = n_B = n$.

L'échantillon A donne une moyenne observée $\bar{x}_A$, B donne $\bar{x}_B$.

On veut savoir si $\bar{x}_A$ et $\bar{x}_B$ sont homogènes (leur différence n'est pas significative) ou non.

Le test (H_0): $\mu_A = \mu_B$, la diff. entre $\bar{x}_A$ et $\bar{x}_B$ n'est pas significative.

Rem. On considère les n différences $\Delta x_i = x_{A,i} - x_{B,i}$.

Écart. Sous (H_0), la variable $\bar{\Delta x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i$ (moyenne des différences) doit avoir une moyenne nulle: $\Delta \mu = 0$. Donc test comparer $\bar{x}_A$ et $\bar{x}_B$ revient à comparer une moyenne observée $\bar{\Delta x}$ à une moyenne théorique $\Delta \mu = 0$.

Fait. Si n est (petit échantillon), et Δx suit une loi normale, alors

$T = \frac{\bar{\Delta x}}{\frac{\Delta S_{n-1}}{\sqrt{n}}}$ suit la loi $T(n-1)$ de Student.

$$\Delta S_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i - \bar{\Delta x})^2}$$

(écart des différences)

Procédure on calcule les différences Δx_i , leur moyenne $\bar{\Delta x}$, leur écart ΔS_{n-1} ;

on calcule $t = \frac{\bar{\Delta x}}{\frac{\Delta S_{n-1}}{\sqrt{n}}}$ sur l'échantillon. On fixe α risque.

Cas bilatéral (ici on ne traite pas le cas unilatéral): comme pour le test de la moyenne. (H_1) est le contraire de (H_0).

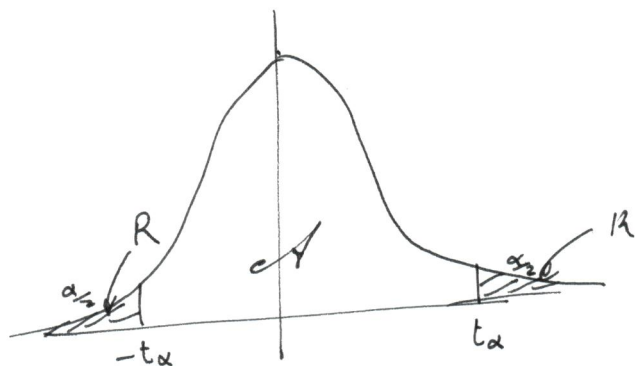
On cherche t_α t.q. $P(|T(n-1)| > t_\alpha) = \alpha$.

Conclusion:

$t \in]-t_\alpha, t_\alpha[\Rightarrow (H_0)$ acceptée.

$t \notin]-t_\alpha, t_\alpha[\Rightarrow t \in R \Rightarrow (H_0)$ rejetée

au risque α .



Remarque Faire le test de la différence des moyennes sur deux échantillons appariés revient à faire le test de la moyenne des différences Δx_i .