Cours 2 : Espaces et mesure de probabilités

06/02/2015
Feuille 1

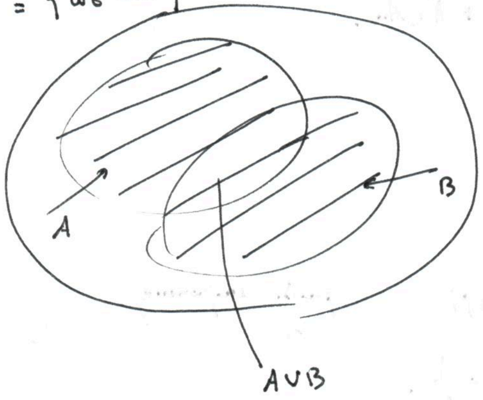
1. Événements

Terme	Définition	Exemples
Expérience aléatoire	exp. dont le résultat est incertain	E_1 = "lancer un dé" E_2 = "lancer une pièce"
Espace fondamental Ω	ensemble des résultats possibles	$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\Omega_2 = \{P, F\}$
événement élémentaire	tout élément $\omega \in \Omega$	$\omega_1 = 3 \in \Omega_1$ $\omega_2 = F \in \Omega_2$
événement	toute partie (sous-ensemble) $A \subset \Omega$ c-à-d tout ensemble d'évén. élémentaires.	$A_1 = \{1, 3, 5\}$ = "on obtient un chiffre impair" $\subseteq \Omega_1$ $A_2 = \{2, 4, 6\}$ = "on obtient un chiffre pair" $\subseteq \Omega_1$ $A_3 = \{1, 2, 3\}$ = "on obtien un chiffre ≤ 3" $\subseteq \Omega_1$

Opérations sur les événements = op. sur les ensembles : $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$, $A \setminus B$.

On se place dans un espace Ω, A et $B \subseteq \Omega$.

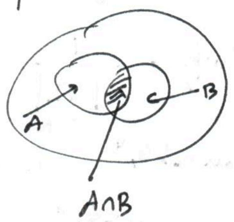
- $A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A$ ou $\omega \in B\}$ = " A ou B se réalise " (peut être les deux)



(Réunion des sous-ensembles)

Ex $A_1 \cup A_3 = \{1, 3, 5, 2\}$ = " on obtien un chiffre impair ou ≤ 3 "

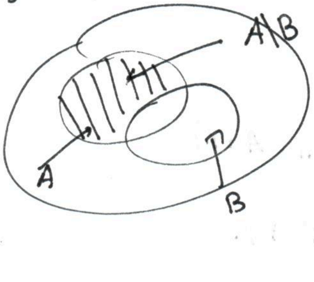
- $A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A$ et $\omega \in B\}$ = " A et B se réalise "



(intersection des sous-ensembles)

Ex. $A_1 \cap A_3 = \{1, 3\}$ = " impair et ≤ 3 "

- $A \setminus B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A$ et $\omega \notin B\}$ = " A se réalise et B ne se réalise pas "



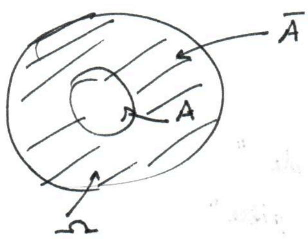
(différence des sous-ensembles)

Ex. $A_1 \setminus A_3 = \{5\}$ = " impair mais non ≤ 3 ".

Remarque $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

$\bar{A} = \{ \omega \in \Omega \mid \omega \notin A \} = \Omega \setminus A =$ "A ne se réalise pas"

(complémentaire d'un s-ens.)



Ex. $\bar{A}_1 = \{2, 4, 6\} = A_2$.

Déf. Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont disjoints ou incompatibles.

2. Probabilités

Soit Ω esp. fond.

Déf. probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω : application qui associe à tout $A \subset \Omega$ un nombre $P(A) \in [0,1]$ t.q.

i) $P(\Omega) = 1$

ii) Si $A \cap B = \emptyset$, $\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}$.

ii bis) Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont 2 à 2 disjoints ($A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$)

alors $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + P(A_n)$.

Exemple fondamental : Prob. uniforme :

dé à 6 faces. $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

$\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \dots + \mathbb{P}(\{6\})$

le dé est équilibré $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \dots = \mathbb{P}(\{6\})$ (prob. uniforme)

$\Rightarrow 1 = 6 \cdot \mathbb{P}(\{1\}) \Rightarrow \mathbb{P}(\{1\}) = \dots = \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6}$.

Par conséquent $\mathbb{P}(\text{"pair"}) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ etc.

En général, Ω fini a une loi de prob. uniforme si $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ ← Cardinal, nombre d'élmts.

Alors $\forall A$, $\boxed{\mathbb{P}(A) = |A| \cdot \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{"nombre de cas favorables"}}{\text{"nombre des cas possibles"}}}$ → (prob. de dénombrement)

Déf si $\mathbb{P}(A) = 0$ A impossible, si $\mathbb{P}(A) = 1$ A certain.

Propriétés de $\mathbb{P}$:

i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

ii) $P(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

iii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

iv) si $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Ex. 13, 15