Variables aléatoires discrètes et lois usuelles

Feuille 1

1) Variables aléatoires < discrètes / continues

Déf. formelle Soit Ω esp. fond. Une var. al. est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Ex. On lance deux dés et on s'intéresse à la somme.

$\Omega = \{(i,j),\ 1 \le i,j \le 6\}$ $X =$ "somme des dés" c-à-d $X((i,j)) = i+j$

Alors ~~P(X...~~ X prend les valeurs $2, 3, \dots, 12$.

p. ex. $\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$

$\mathbb{P}(X=4) = \mathbb{P}(\{(1,3),(2,2),(3,1)\}) = \frac{3}{36}$

$\mathbb{P}(X \le 5) = \mathbb{P}(X \in \{2,3,4,5\}) = \dots$

$\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{P}(X=a)\\ \mathbb{P}(X\in E),\ E\subset\mathbb{R}\\ \mathbb{P}(X\le a)\end{array}}$

donc $\mathbb{P}(X=a) = \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega) = a\})$

$\mathbb{P}(X\le a) = \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\le a\})$

si $E\subset\mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X\in E) = \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\in E\})$.

En pratique : ·) vous pouvez penser X comme une quantité qui peut prendre certaines valeurs avec une certaine probabilité.

··) Souvent, on ~~se~~ n'explicite pas Ω, mais on raisonne seulement avec les valeurs de X.

Loi de probabilité de X : c'est l'application $\mathbb{P}_X$: parties de $\mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$E\subset\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{P}(X\in E)$.

Ex. $\mathbb{P}(X\in[3,7])$, $\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}_X(\{3\})$.

$= \mathbb{P}(\{(1,2),(2,1)\}) = \frac{2}{36}$

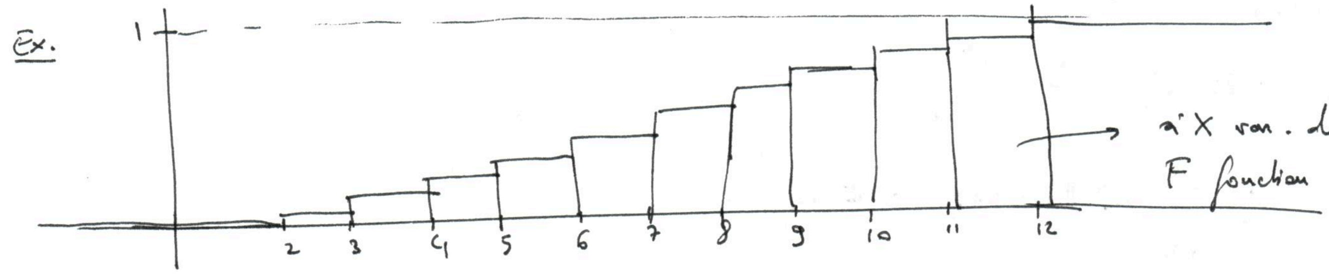
Fonction de répartition de X : l'application $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$x \longmapsto \mathbb{P}(X\le x)$

c'est une fonction croissante, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, ~~fonction~~ ~~...~~

On peut la ~~v~~ voir comme une "courbe des probas cumulées" :

Ex.



si X var. discrète, F fonction en escalier

Déf. X, Y var. al. indépendantes si $\forall E \subset \mathbb{R}, F \subset \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}(\{X \in E\} \cap \{Y \in F\}) = \mathbb{P}(\{X \in E\})\, \mathbb{P}(\{Y \in F\})$$ (cad les év. $\{X \in E\}$ et $\{Y \in F\}$ sont indép.).

2). Variables discrètes

Déf. X discrète si ses valeurs sont en nombre fini ou dénombrable (une suite).

Ex. X = "somme de deux dés" X va de 2 à 12.

On note alors $x_1, x_2, \dots, x_n$ les valeurs de X.

Propriétés

. Connaître loi proba $\Leftrightarrow$ connaître $P(X = x_i)$ $\forall i$.

. $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i)$

. X et Y indép. si $\forall x_i$ valeur de X et $\forall y_j$ valeur de Y

$$\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = \mathbb{P}(X = x_i)\, \mathbb{P}(Y = y_j).$$

Déf. Espérance de X (parfois valeur moyenne)

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$ moyenne pondérée des valeurs de X

$$= x_1 \mathbb{P}(X = x_1) + \dots + x_n \mathbb{P}(X = x_n).$$

Propriétés. * $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$

* $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
* $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ si X, Y indépendantes
* Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, alors $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)$

Déf. On appelle variance de X

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x_i)$$

– l'écart-type (déviation standard) de X : $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Propriétés * $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$

* $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$ si X, Y indépendantes.
* $\boxed{\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2}$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

3) Lois Usuelles

i) Loi de Bernoulli à valeurs dans $\{0,1\}$. On fixe $p \in [0,1]$ et

$$X \sim \mathcal{B}(p) \quad \text{si} \quad \begin{cases} \mathbb{P}(X=1) = p \\ \mathbb{P}(X=0) = 1-p \end{cases}$$

Ex. pile ou face non néc. équilibré.

Propriétés. $\mathbb{E}(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 1 \cdot p + 0(1-p) - p^2 = p - p^2 = p(1-p)$.

ii) Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, à valeurs dans $\{0,1,\dots,n\}$. On fixe $p \in [0,1]$ et

$$X \sim \mathcal{B}(n,p) \quad \text{si} \quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{pour } k \in \{0,1,\dots,n\}.$$

Rem. Somme de n ~~fois~~ var. de Bernoulli indép. Pour $n=1$, $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Propriétés $\mathbb{E}(X) = np$; $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

iii) Loi uniforme à valeurs dans $\{1,\dots,n\}$. ~~Alors~~ Proba uniforme = chaque k a même probabilité, donc $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}$.

Propriétés. $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ $\quad \mathrm{Var}(X) = \frac{n^2-1}{2}$.

iv) Loi de Poisson On fixe un paramètre $\lambda \in]0,+\infty[$. Alors

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \quad \text{si} \quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad k = 0,1,\dots$$

Propriétés

$\mathbb{E}(X) = \lambda$, $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Ex. Un téléphone reçoit en moyenne 4 appels par minute, on veut étudier le nombre d'appels dans un laps de temps de 10 minutes. On choisit alors $\lambda = 10 \cdot 4 = 40$,

et $\mathbb{P}(X=k) = \frac{40^k}{k!} e^{-40}$.

λ = nombre moyen d'occurrences dans l'intervalle étudié.