Variables aléatoires continues et lois usuelles

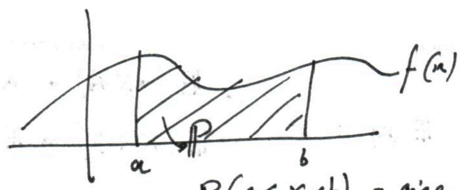
1. Var. al. continues.

f densité de probabilité de X

Ω esp. $\mathbb{P}$ proba.

Déf. X v.a. continue si $\exists$ une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ (sauf au plus en un nombre fini de points) t.q.

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt \quad \forall a \leq b.$$



$\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ = aire de la courbe $f(x)$ entre a et b.

Rem. 1) $f(x) \geq 0 \ \forall x$;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1 \qquad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \cdots \right)$$

2) $\boxed{\mathbb{P}(X = a) = 0 \ \forall a \in \mathbb{R}}$ (chaque point a proba négligeable) ~~nulle~~

donc $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X < b)$.

Déf. fonction de répartition de X : $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

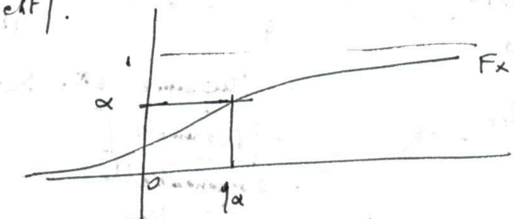
c'est une fonction continue.

Propriétés de F_X :

- F_X dérivable et $F_X'(x) = f(x)$ (sauf au plus en un nbre fini de points)
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx = F_X(b) - F_X(a)$
- F_X croissante, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

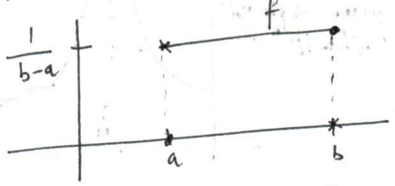
Déf. Soit $\alpha \in \,]0,1[$. On appelle quantile d'ordre α (q_α) un nombre t.q. $\mathbb{P}(X \leq q_\alpha) = \alpha$. $\Leftrightarrow \boxed{F_X(q_\alpha) = \alpha}$

(s'il y a plusieurs nombres, on prend le plus petit).



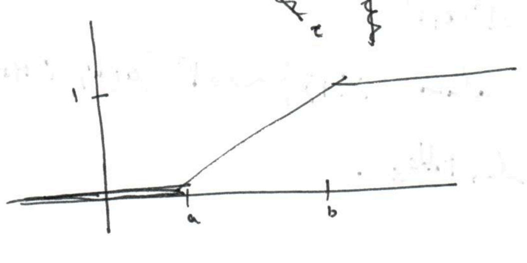
Exemple. Loi uniforme $X \sim \mathcal{U}(a,b)$

X à valeurs dans $[a,b]$ est uniforme, $X \sim \mathcal{U}(a,b)$ si $f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{]a,b]}(x)$



où $\mathbb{1}_{]a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \,]a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{]a,b]}(x)\,dx = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ 1 & x > b. \end{cases}$



2. Espérance, variance, écart-type

Rem. mêmes déf. et propriétés des v.a. discrètes, mais on remplace $\sum$ par $\int$

Soit X v.a. continue

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \quad ; \quad Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mathbb{E}(X)\right)^2 f(x)\,dx \quad ; \quad \sigma(X) = \sqrt{Var(X)} .$$

espérance (moyenne) — variance — écart-type

Propriétés de $\mathbb{E}(X)$:

- $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$
- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- si X, Y indép. $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.
- si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction, $\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$ → j'applique g à X seulement, je ne touche pas ~~les~~ pas à $f(x)$

prop. de $Var(X)$:

- $\boxed{Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$
- $Var(aX+b) = a^2\, Var(X)$
- Si X, Y indép., $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$.

Exemple de la loi $\sim \mathcal{U}(a,b)$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\,\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b+a}{2}$$

→ milieu de $[a,b]$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\,\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

d'où

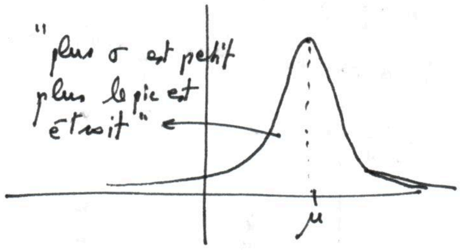
$$Var(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4} = \frac{4b^2+4ab+4a^2-3b^2-6ab-3a^2}{12} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

3. Lois usuelles

- Uniforme ok. $X \sim \mathcal{U}(a,b)$
- Normale
- exponentielle
- (chi-deux)
- (Student)

b) Loi normale

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$



on a 1) $\mathbb{E}(X) = \mu$ 2) $Var(X) = \sigma^2$.

Si $\mu = 0, \sigma = 1$ on a la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Propriétés 3) Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

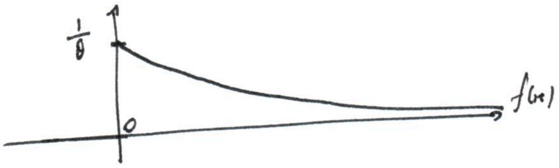
4) Si X, Y indép. de lois $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(\mu', (\sigma')^2)$ alors $(X+Y) \sim \mathcal{N}(\mu+\mu', \sigma^2+(\sigma')^2)$

En pratique, on se ramène à $\mathcal{N}(0,1)$ et on utilise des tables.

c) Loi exponentielle

Feuille 2

$X \sim \mathcal{E}(\theta)$ (X à val. positives) si $f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}$



$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = \theta \\ \mathrm{Var}(X) = \theta^2 \end{cases}$$

En outre :

d) loi du chi-deux à n degrés de liberté $\chi^2(n)$:
loi de $Z_1^2 + \dots + Z_n^2$ où les Z_i sont i.i.d et $\sim \mathcal{N}(0,1)$. (cf. poly)

e) loi de Student ~~St~~ $\mathcal{T}(n)$:
loi de $\frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$, U et V indép., $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $V \sim \chi^2(n)$. (cf. poly).