

Matrices d'appl. lin.

Ex. 3. $M_E(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\ker \varphi: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x+y+z=0 \quad x=-y-z$

$\ker \varphi = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \dim \ker \varphi = 2$

$\rightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi = 3-2=1$ et en effet $\operatorname{Im} \varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3M$

$M^3 = M \cdot M^2 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} = 9M$

$M^3 = M \cdot M^2 = M \cdot 3M = 3M^2 = 3 \cdot 3M = 9M$

$M^4 = M \cdot M^3 = M \cdot 9M = 9M^2 = 9 \cdot 3M = 27M$

$\rightarrow M^n = 3^{n-1} M$

$M(\varphi^n)$

Ex. 4. $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3y+3z \\ 2x-4y-2z \\ 5x-5y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

donc $M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 5 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2E_1 + 0E_2 + 0E_3$

$M_{B'}(\varphi) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0E_1 + 4E_2 + 0E_3$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 - 6E_3$

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, ses coordonnées dans B sont simplement $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et ses

coordonnées dans B' sont $M_{B',B}(\operatorname{id}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

On sait $M_{B',B}(\operatorname{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc il nous faut son inverse:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \text{II} - \text{I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \text{III} + \text{II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim -\text{II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \text{II} + \text{III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \text{I} - \text{II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

donc $M_{B, B'}(\text{id}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y-z}{2} \\ \frac{x-y+z}{2} \\ \frac{-x+y+z}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \text{coordonnées de } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ en } B'.$

Alors les coordonnées de $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en B' sont

$$M_{B'}(\varphi) \begin{pmatrix} \frac{x+y-z}{2} \\ \frac{x-y+z}{2} \\ \frac{-x+y+z}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+y-z \\ x-y+z \\ -x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+y-z \\ x-y+z \\ -x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-y+z \\ 2x-2y+2z \\ 3x-3y-3z \end{pmatrix}$$

Et les coordonnées de $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en B sont $M_{B, B}(\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x-y+z \\ 2x-2y+2z \\ 3x-3y-3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3y+3z \\ 2x-4y-2z \\ 5x-5y-2z \end{pmatrix} = M_B(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ok.

Ex. 5. $u_1 = [x \mapsto e^x]$ $\langle u_1, u_2 \rangle = E$
 $u_2 = [x \mapsto e^{-x}]$

1) u_1, u_2 sont générateurs par def.

Indépendants: $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha u_1(x) + \beta u_2(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \alpha e^x + \beta e^{-x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $\begin{cases} x=0 & \alpha + \beta = 0 \\ x=1 & \alpha e + \beta \frac{1}{e} = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\beta \Rightarrow -\beta e + \frac{1}{e} \beta = 0 \Rightarrow \beta \left(\frac{1}{e} - e \right) = 0$
 $\Rightarrow \alpha = \beta = 0$. ok.

2) $v_1 = \text{ch}$ $\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow \text{ch} = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_2$
 $v_2 = \text{sh}$ $\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow \text{sh} = \frac{1}{2} u_1 - \frac{1}{2} u_2$

$\Rightarrow \text{ch}$ et $\text{sh} \in E$, et en regardant leurs coordonnées en B , $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, on voit qu'ils sont indépendants $\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = E$, et

$B' = (v_1, v_2)$ est base de E .

$P = M_{B', B}(\text{id}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

donc $f = [x \mapsto 3e^x - 5e^{-x}]$ a coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ en B

et $M_{B, B'}(\text{id}) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ en B' .

Ex. 6. B base canonique.

III - Feuille 2.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 23 \\ 11 & 3 & 26 \\ 15 & 4 & 36 \end{pmatrix}$$

$$P^3 - 4P^2 + P = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 23 \\ 11 & 3 & 26 \\ 15 & 4 & 36 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

~~$\Rightarrow P^3 - 4P^2 + P = -I_3$~~ $P^3 - 4P^2 + P = -I_3$ donc $P(-P^2 + 4P - I_3) = I_3$.

donc $P^{-1} = -P^2 + 4P - I_3 = - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 10 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

On remarque que P est la matrice qui a les coordonnées des e_i en base B en colonne, et P est inversible. Donc B' base,

$$M_{B', B}(\text{id}) = P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_{B, B'}(\text{id}) = P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M_{B, B}(\varphi) = \begin{pmatrix} m & 4-3m & 2m-3 \\ 0 & 5-2m & -4+2m \\ 0 & 6-3m & -5+3m \end{pmatrix}.$$

$$M_{B', B'}(\varphi) = M_{B, B}(\text{id}) \cdot M_{B, B}(\varphi) \cdot M_{B', B}(\text{id})$$

$$\begin{aligned} \text{donc } M_{B', B'}(\varphi) &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 4-3m & 2m-3 \\ 0 & 5-2m & -4+2m \\ 0 & 6-3m & -5+3m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4m & -1+m \\ 1 & 0 & -2+2m \\ 1 & 0 & -3+3m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & -1+m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

discuter le rang de φ en utilisant $M_B(\varphi)$ ou $M_{B'}(\varphi)$ avec produits les mêmes résultats. Donc on peut utiliser $M_{B'}(\varphi)$:

si $m \neq 0, m \neq 1$: $\text{rk } \varphi = 3$

si $m = 0$: $\text{rk } \varphi = 2$

si $m = 1$: $\text{rk } \varphi = 2$.