

Présentation du cours

Pla : GL Bureau 361 à l'IMB (Bat A33)

courriel : glattari @ math. u-bordeaux. fr.

Site internet : [www.math.u-bordeaux.fr](http://www.math.u-bordeaux.fr/~glattari) / ~ glattari contient

- Notes de cours
- feuilles de TD + corrigé
- infos sur les DS
- énoncés et corrigés des DS.
- Liens matériel supplémentaire

Structure du cours : contenu : espaces vect., matrices, déterminants, diagonalisation et appl. lin.  
de matrices, systèmes différentiels linéaires.

Contrôles Examen : 1 DS le samedi 18/10  
1 examen en janvier  
(+ rattrapage en juin).

Espaces Vectoriels

Exemples  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\rightarrow \mathbb{R}^n$  (les vects ont toujours le "pied" dans l'origine).

polynômes

applications  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), +, \cdot)$

Définition formelle avec propriétés  $+$ ,  $\cdot$ .

propriétés de  $+$ , propriétés de  $\cdot$ , relation entre  $+$  et  $\cdot$ .  
(linéaire sur les scalaires)  
(linéaire sur les vecteurs)

Autres exemples : page 3 +  $\mathbb{R}_k[x]$ .

$+$   $\mathbb{C}$  comme  $\mathbb{R}$ -esp. vect.

Rem. multiplication scalaire  $\lambda \cdot v$   $\lambda, v \in E$

$\neq$  mult. vecteur par vecteur (au gén. non définie).

Autres propriétés de  $\mathbb{R}$ -e.v. (qui se déduisent des autres)

$$1. \quad u+v = v+u \quad : \quad (1+1) \cdot (u+v) = 1 \cdot (u+v) + 1 \cdot (u+v) = u+v+u+v$$

$$" \quad (1+1) \cdot (u) + (1+1) \cdot v = u+u+v+v$$

$\mathbb{K}$ -esp. vect.

vecteurs  $v \in E$

scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

[Ex. 1.]

$$2) 0 \cdot u = 0_E, (-1) \cdot u = -u$$

$$\lambda \cdot u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } u = 0_E$$

$$\text{si } \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou, si } \lambda \neq 0 \quad \frac{1}{\lambda}(\lambda u) = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)u = u = 0_E.$$

## Sous-espaces vectoriels

Déf.  $\{$  Sous-ensemble de  $E$  qui est un espace.

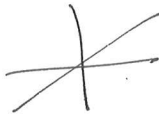
Sous-esp. triviaux,  $0$  et  $E$ .

Critères pour les s-esp.

$$i) \text{ } F \subseteq E$$

$$ii) (0 \in F) + (u, v \in F \Rightarrow u+v \in F) + (u \in F, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda u \in F)$$

$$iii) F \neq \emptyset + (u, v \in F \text{ et } \lambda, \mu \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda u + \mu v \in F).$$

Exemples   $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \quad n \in \mathbb{R}$

Ex. 2.

Remarque :  $F = 0$  s-esp. <sup>triviale</sup>  $0 \in F$  toujours.

$$F \neq \emptyset.$$

Op. ensembles sur les esp. vect.

$$U: F \cup G \subseteq E \Leftrightarrow F \subseteq G \text{ ou } G \subseteq F$$

$\Leftarrow$  clair.

$$\Rightarrow : \text{si } F \not\subseteq G \text{ et } G \not\subseteq F$$

$$\Rightarrow \exists x \in F \setminus G, y \in G \setminus F$$

$x \in F \cup G, y \in G \cup F \Rightarrow$  On considère  $x+y$  et je dis que  $x+y \notin F \cup G$ :

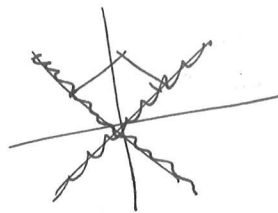
en effet, si  $x+y \in F \cup G \Rightarrow$

$$x+y \in F \Rightarrow x \in F, x+y \in F \Rightarrow x+y-x=y \in F \quad \text{c}$$

$$x+y \in G \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in G \quad \text{c}$$

$\cap$ : ok.

Compl. jamais.



Déf. Sous-esp. engendré par  $A \subset E$

$\text{Vect}(A)$ ,  $\text{Span}(A)$ ,  $\langle A \rangle$ .

10/03/2014

Fenêl 2.

i) plus petit  $F \subseteq E$  t.q.  $F \supseteq A$

ii)  $\bigcap F$   
 $F \subseteq E$   
 $F \supseteq A$

iii)  $\{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_i \in K, v_i \in A \}$  ensemble de toutes les combinaisons

(Famille génératrice ou système de générateurs : après) linéaires (finie) des vecteurs de  $A$ .

Somme  $F+G = \langle F \cup G \rangle$ . Plus petit s-esp. qui contient  $F$  et  $G$ .

ex.   $\longrightarrow \mathbb{R}^2$

Sous-esp. supplémentaires :  $F \cap G = 0$  (Attention : jamais  $F \cap G = \emptyset$ )  
et  $F+G = E$

$\Rightarrow$  somme directe  $F \oplus G$  si  $F \cap G = 0$ .

+ Généralisation à  $n$  sous-espaces.

$\downarrow$  Syst. de générateurs

$\langle A \rangle = E \Leftrightarrow \forall v \in E, v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$  (somme finie).

$A$  peut être infini, mais les combinaisons linéaires sont tjs finies.

Ex. 3, G<sub>1</sub>.

Représentation des sous-espaces de  $E$   $\leftarrow$  générateurs  
eq. linéaires  
paramètres.