Familles génératrices, familles libres, bases   17/09/2014

Feuille 1.

Rappel. $\boxed{\text{S. esp. engendré}}$: $A \subset E$ (A $\neq \emptyset$) $\rightsquigarrow$ $\langle A \rangle = \mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(A) \leq E$.

i) plus petit $F \leq E$ t.q. $F \supseteq A$

ii) $\displaystyle\bigcap_{\substack{F \leq E \\ F \supseteq A}} F$

iii) $\boxed{\langle A \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_i \in \mathbb{K},\ v_i \in A\}}$ ensemble des toutes les comb. lin. (finies) des vecteurs de A.

Ex. $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{\alpha \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}\right\}$

$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{\alpha \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{K}\right\}$, en gén. $\langle u \rangle = \{\alpha u \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ multiples de u

$\langle x, 1+x^2 \rangle = \{\alpha(x) + \beta(1+x^2) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$.

$\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \mid \alpha_i \in \mathbb{K}\}$.

$\boxed{\text{Somme de sous-espaces}}$ E, $F, G \leq E$. $F + G = \langle F \cup G \rangle =$

i) plus petit V t.q. $V \geq F$, $V \geq G$.

ii) $\displaystyle\bigcap_{\substack{V \geq F \\ V \geq G}} \{V \leq E\}$

iii) $\{u_F + u_G \mid u_F \in F,\ u_G \in G\}$.

Remarque 1. : si $F = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, $G = \langle w_1, \dots, w_s \rangle \Rightarrow F + G = \langle v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_s \rangle$.

ex. $\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$ et $\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ $F + G = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$.

Remarque 2. $F + G$: "mettre ensemble les générateurs".

$F \cap G$: "mettre ensemble (= a système) les équations".

Somme directe : si $F \cap G = 0$, on écrit $F + G = F \oplus G$.

S-esp. supplémentaires : $F \oplus G = E$, c-à-d $F + G = E$ et $F \cap G = 0$.

ex. $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$ et $\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$; $\langle 1, x \rangle$ et $\langle 1 + x + x^2 \rangle$ $\boxed{\text{Exo. 4.}}$

$\boxed{\text{Famille génératrice ou système de générateurs}}$ suite $(v_i)_{i \in I}$ ($I = \{1, 2, \dots, n\}$ fini ou $I = \mathbb{N}$ infini)

t.q. $\mathrm{Vect}(\{v_i \mid i \in I\}) = E$.

Autres exemples : $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2$ mais $\left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2$ aussi

$\left\langle \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2$.

ex. $< 1, X, X^2, \dots, X^i, \dots > = \mathbb{R}[X]$ mais aussi

$< 1, 1+X, 1+X+X^2, \dots, 1+X+\dots+X^i, \dots > = \mathbb{R}[X]$.

Propriété d'un syst. de générateurs $\mathcal{S}$: $\forall u \in E$, $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $v_i \in \mathcal{S}$.

Remarques
- $\exists$ espaces qui n'admettent pas de syst. de gén. $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
- $\exists$ esp. avec familles infinies $\mathbb{R}[X]$.
- espaces avec systèmes finis $E = < v_1, \dots, v_n >$.

Vecteurs (linéairement) indépendants ou famille libre

Motivation: $\mathbb{R}^2 = < \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} > = \dots$

syst. de gén. avec nombre min. de vect?

On remarque que: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ c-a-d $1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ c-a-d $1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 0$.

cela justifie:

Def. $\{v_1, \dots, v_n\}$ lin. indép. (ou famille libre) si

$$\boxed{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \quad \alpha_i \in \mathbb{K}}$$

$(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (fam. infinie) est libre si $\forall$ sous-famille finie est libre.

ex. $\{1, X, \dots, X^i, \dots\}$

vect. dépendants (ou fam. liée) si $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ non tous nuls t. q. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$.

Base de E: syst. de ~~vecteurs~~ géné. lin. indép. $\equiv$ fam. libre + gén. $\boxed{\text{Ex. 5.}}$

Propriétés: (v_i) indép. $\iff$ écriture unique des combinaisons.

(v_i) dép. $\iff$ ~~au~~ au moins un v_i est comb. lin. des autres.

$V = (v_i)$ base $\iff$ $\forall u \in E$, $u = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i$ $\boxed{\text{uniquement}}$.

~~coeff~~ $(\alpha_i)_{i \in I}$ coordonnées de u dans la base V.

ex. $\mathbb{R}^n = < \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} > = < e_1, \dots, e_n >$ base canonique de $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{E}_n$

$\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ donc coord. de $\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{E}_n$

mais $\mathbb{R}[X]_3 = < 1, X, X^2, X^3 >$ $\qquad$ $\boxed{\text{vecteurs} \in E \neq \text{coordonnées}}$ même si avec $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ on peut les identifier.

$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \longleftrightarrow \begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$

ex. $\mathcal{E}_3 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ $\quad \mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ Feuille 2.

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \overset{II-I}{} \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \overset{III-II}{} \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ 2\gamma = 0 \end{cases} \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Indép.

gén. $\alpha \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ \alpha + \beta = y \\ \beta + \gamma = z \end{cases} \overset{II-I}{} \begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ \beta - \gamma = y - x \\ \beta + \gamma = z \end{cases} \overset{III-II}{} \begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ \beta - \gamma = y - x \\ 2\gamma = z - y + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{x-y+z}{2} + x = \dfrac{x+y-z}{2} \\ \beta = \dfrac{x-y+z}{2} + y - x = \dfrac{-x+y+z}{2} \\ \gamma = \dfrac{x-y+z}{2} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{x+y-z}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{-x+y+z}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{x-y+z}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

en particulier, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ a coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ en $\mathcal{E}_3$, et $\begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\\frac12\end{pmatrix}$ en $\mathcal{V}$.

Résultats :

- esp. qui n'ont pas de base $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
- esp. avec bases infinies $\mathbb{R}[X]$, $\{X^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ base canonique de $\mathbb{R}[X]$.
- esp. avec bases finies. Dans ce cas :

. Toutes les bases ont même nombre (fini) de vecteurs. dimension de E. $\dim_{\mathbb{K}} E$.

. $\dim_{\mathbb{K}} E$ ne dép. pas de la base mais ~~de~~ bien de $\mathbb{K}$ (ex. $\mathbb{C}^n$).

. E dim. finie n. Si $(v_1, \dots, v_n)$ base, alors $(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n)$ gén. non indép., $(v_1, \dots, v_r)$ $r < n$, indép. non gén.

. Si $(v_1, \dots, v_n)$ sont indép. dans un espace E de dim n, alors il sont gén.

ainsi gén. / indép., donc $(v_1, \dots, v_n)$ base. $\boxed{\text{Ex. } 6, 7}$

. ~~Toutes~~ De tout syst. de gen. je peux extraire une base, ~~de~~ toute famille de vect. indép. peut se compléter en base de E.

Dimension des sous-espaces

. $F \subseteq E \Rightarrow \dim F \leq \dim E$ et si $\dim F = \dim E \Rightarrow F = E$

. $\dim F = 0 \Leftrightarrow F = 0$ (par convention)

. $F \subseteq G$ s-esp. de E $\Rightarrow \dim F \leq \dim G$ et $= \Rightarrow F = G$.

. $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ Formule de Grassmann.

(+ Ex. supplémentaires).