Applications linéaires

26/09/2014

Motivation : $f: V \longrightarrow W$ qui respecte la structure d'esp. vect.

Déf. V, W deux $\mathbb{K}$-esp. vect. $f: V \longrightarrow W$ lin. si

$f(u+v) = f(u) + f(v)$, $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

(ou : $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.)

Homomorphisme : $f: V \longrightarrow W$ lin.

si $V = W$ $f: V \longrightarrow V$ *endomorphisme*.

(*) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-y \\ x+y \\ x+4y \end{pmatrix}$

$g: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$
$a + bx + cx^2 \longmapsto 3a + b + 2c$

$\boxed{\text{Ex. 1.}}$

Petites propriétés : . $f(0) = 0$, $f(-v) = -f(v)$.

. $f\left(\sum_i \alpha_i v_i\right) = \sum_i \alpha_i f(v_i)$ $\Rightarrow$ f connue si on connaît ~~$f(\mathcal{B})$~~ ~~$\mathcal{B}$~~ les images d'une base. (finie ou infinie).

. Si on définit $f(v_i)$ $v_i \in$ (base de V), on définit f ~~de~~ univoquement (*prolongement par linéarité*).

. $f: V \xrightarrow[\text{lin.}]{} W$, $g: W \xrightarrow[\text{lin.}]{} U$ $\Rightarrow$ $g \circ f: V \xrightarrow[\text{lin.}]{} U$

Ex. $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x \\ 3x+2z \\ 4x+y+3z \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) = \{ f: V \longrightarrow W \mid f \text{ lin.} \}$

$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V) = \{ f: V \longrightarrow V \text{ linéaire} \}$. ~~K~~ linéarité.

Noyau, Image, th. du rang :

$f: V \longrightarrow W$.

Noyau : $\ker f := \{ v \in V \mid f(v) = 0 \} = f^{-1}(\{0_W\}) \subseteq V$

Image : $\mathrm{Im}\, f := \{ f(v) \mid v \in V \} \subseteq W$

$= \{ w \in W \mid w = f(v) \ \exists v \in V \}. = f(V)$ (image ensembliste).

Petites propriétés . $\ker f$, $\mathrm{Im}\, f$ *sous-espaces* de V et W resp.

. si $\mathcal{B}$ base de V, alors $\mathrm{Im}\, f = \langle f(v_1), \ldots, f(v_n) \rangle$ (pas néc. indép.).
$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$

Ex. (*), $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y \end{pmatrix}$,

la dérivation $\frac{d}{dx}: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$
$P(x) \longmapsto P'(x)$

et $\frac{d}{dx}: \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$
$P(x) \longmapsto P'(x)$

$\boxed{\text{Ex. 2.}}$

Th. du rang : $f: V \longrightarrow W$ lin., et V de dim. *finie*. Alors

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \ker f + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, f$$

+ *Démonstration*. $\boxed{\text{Ex. 3, 4}}$

Injectivité, surjectivité, isomorphismes

Rappel: $f : A \longrightarrow B$ injective si $\forall x, y \in A$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

surjective si $f(A) = B$, c-à-d $\forall y \in B$, $\exists x \in A$ t.q. $f(x) = y$.

Prop. 1. Équivalentes pour $f : V \longrightarrow W$ lin.

i) f injective

ii) $\boxed{\ker f = 0}$

iii) $\dim \ker f = 0$

iv) f envoie familles libres en fam. libres.

(Dém.)

Conséquence:

f injective $\Rightarrow$ $\dim V \leq \dim W$

Prop. 2. Équiv. pour $f : V \longrightarrow W$ lin.

i) f surjective ($\operatorname{Im} f = W$)

ii) f envoie systèmes de gén. de V en syst. de gén. de W.

iii) l'image d'une base de V contient une base de W.

(Dém.)

Conséquence

f surjective $\Rightarrow$ $\dim V \geq \dim W$.

Rappel. $f : A \longrightarrow B$ bijective $\Leftrightarrow$ f injective & surjective $\Leftrightarrow$ $\forall y \in B$, $\exists !\, x \in A$ t.q. $y = f(x)$. $\Leftrightarrow$ $\exists f^{-1} : B \longrightarrow A$ t.q. $f^{-1}(f(x)) = x$ et $f(f^{-1}(y)) = y$

$f^{-1} \circ f = id_A$ $\quad f \circ f^{-1} = id_B$.

Exercice. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \longmapsto (x - y,\ y - z)$. Injective ? NON $\dim \mathbb{R}^3 = 3 > \dim \mathbb{R}^2$.

~~Projections et symétries~~

Isomorphisme : $f : V \longrightarrow W$ t.q. $\exists$ une appl. lin. inverse $f^{-1} : W \longrightarrow V$ t.q. $f \circ f^{-1} = id_W$, $f^{-1} \circ f = id_V$.

Prop. 3. Éq. pour $f : V \longrightarrow W$:

i) f isom. (c-à-d. $\exists f^{-1}$)

ii) f injective & surjective.

iii) $\ker f = 0$, $\operatorname{Im} f = W$

iv) f envoie bases de V en bases de W.

Conséquence. f isom. $\Rightarrow$ $\dim V = \dim W$

Isomorphisme (non canonique) : si $\dim V = n$ alors $V \cong \mathbb{R}^n$ de façon non canonique.

Prop. / Lemme. Si $\dim V = \dim W$ (en particulier pour $V = W$, f endomorphisme) équiv. pour $f : V \longrightarrow W$.

i) f isom.

ii) f injective

iii) $\ker f = 0$

iv) f surjective

v) $\operatorname{Im} f = W$.

Rem. $\dim < \infty$ est essentiel. (ex. polynômes. $X^i \longmapsto X^{i+1}$) c-à-d $P \longmapsto XP$

Ex. importants Projections et symétries:

$U_1, U_2 \leq V$ t.q. $U_1 \oplus U_2 = V$ Alors $\forall v \in V$, $v = \underset{\in U_1}{u_1} + \underset{\in U_2}{u_2}$

$\pi_{U_1}^{U_2} : V \longrightarrow V$, $v \longmapsto u_1$ projection sur U_1 de direction U_2

($\pi_{U_2}^{U_1} : V \longrightarrow V$, $v \longmapsto u_2$ projection sur U_2 de direction U_1.)

$\pi_{U_1}^{U_2}\left(\pi_{U_1}^{U_2}(v)\right) = \pi_{U_1}^{U_2}(v)$, $\quad \pi_{U_2}^{U_1} \circ \pi_{U_1}^{U_2} = 0$.

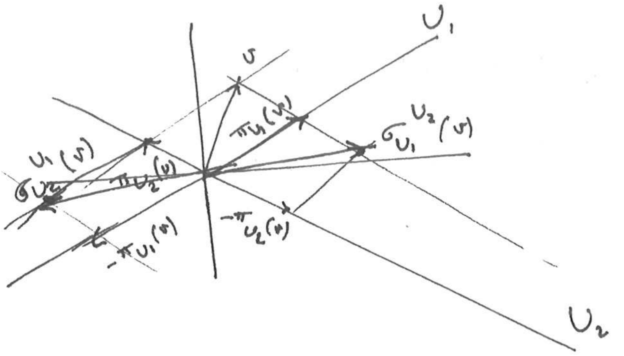
Propriété :

$\pi_{U_1}^{U_2}(v) + \pi_{U_2}^{U_1}(v) = v$

$\ker \pi_{U_1}^{U_2}(v) = U_2$ $\left(\begin{array}{l}\text{donc isom.} \\ \text{si } U_2 = 0 \\ \Rightarrow \pi_{U_1} = id\end{array}\right)$

$\operatorname{Im} \pi_{U_1}^{U_2}(v) = U_1$

Feuille 2.



<u>Symétrie</u> : dans le même contexte $V = U_1 \oplus U_2$,

$$\sigma_{U_1}^{U_2} : V \longrightarrow V$$
$$v \longmapsto u_1 - u_2 = \pi_{U_1}^{U_2}(v) - \pi_{U_2}^{U_1}(v)$$

symétrie d'<u>axe</u> U_1 et <u>direction</u> U_2.

($\sigma_{U_2}^{U_1} : V \longrightarrow V$

$v \longmapsto u_2 - u_1 = \pi_{U_2}^{U_1}(v) - \pi_{U_1}^{U_2}(v)$

sym. d'axe U_2 et direction U_1.)

<u>Propriétés</u> : $\ker \sigma_{U_1}^{U_2} = 0$, $\mathrm{Im}\, \sigma_{U_1}^{U_2} = V \Rightarrow$ toujours isom.

$\sigma_{U_1}^{U_2} \circ \sigma_{U_1}^{U_2}(v) = v \Rightarrow \left(\sigma_{U_1}^{U_2}\right)^{-1} = \sigma_{U}^{U_2}$.

<u>Ex.</u> $V = \mathbb{R}^3$, $U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, $W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$. π_U^W, π_W^U. (Il faut aussi vérifier $U \oplus W = V$)

$V = \mathbb{R}^4$, $U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ $W = \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{Ex.}}$ V esp. de dim 3 sur $\mathbb{R}$, base $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$. φ_λ définie par : $(\lambda \in \mathbb{R})$

$\varphi_\lambda(v_1) = (\lambda-1)v_1 + 2v_2 + (\lambda+1)v_3$ $\quad \varphi_\lambda(v_2) = 2v_1 - \lambda v_3$ $\quad \varphi_\lambda(v_3) = -\lambda v_1 - v_2 + (\lambda+2)v_3$

$v = av_1 + bv_2 + cv_3$

$\ker \varphi_\lambda = ?$ $\varphi_\lambda(v) = a\left((\lambda-1)v_1 + 2v_2 - (\lambda+1)v_3\right) + b\left(2v_1 - \lambda v_3\right) + c\left(-\lambda v_1 - v_2 + (\lambda+2)v_3\right)$

$= v_1\left(a(\lambda-1) + 2b - \lambda c\right) + v_2\left(2a - c\right) + v_3\left(-(\lambda+1)a - \lambda b + (\lambda+2)c\right)$

$\varphi_\lambda(v) = 0 \iff \begin{cases} a(\lambda-1) + 2b - \lambda c = 0 \\ 2a - c = 0 \\ -(\lambda+1)a - \lambda b + (\lambda+2)c = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2a - c = 0 \\ 2b + \left(\frac{1}{2}(\lambda-1) - \lambda\right)c = 0 \\ -\lambda b + \left(-\frac{1}{2}(\lambda+1) + (\lambda+2)\right)c = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2a - c = 0 \\ 2b + \left(-\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\right)c = 0 \\ -\lambda b + \left(\frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2}\right)c = 0 \end{cases}$ $\mathrm{III} + \frac{1}{2}\lambda\,\mathrm{II}$ $\begin{cases} 2a - c = 0 \\ 2b + \left(-\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\right)c = 0 \\ \left[\frac{1}{2}\lambda\left(-\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2}\right)\right]c \end{cases}$ $\begin{cases} 2a - c = 0 \\ 2b + \left(-\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\right)c = 0 \\ \left(-\frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda + \frac{3}{2}\right)c = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2a - c = 0 \\ 2b + \left(-\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\right)c = 0 \\ \left(\lambda^2 - \lambda - 6\right)c = 0 \end{cases}$

$\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} \frac{1-5}{2} = -2 \\ \frac{1+5}{2} = 3 \end{cases}$

$\lambda \neq -2, 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \ker \varphi_\lambda = \{0\}$ $\Rightarrow \varphi_\lambda$ isomorphisme

$\boxed{\text{pour } \lambda = -2 :}$

$\begin{cases} 2a - c = 0 \\ 2b + \left(1 - \frac{1}{2}\right)c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = \frac{1}{2}c \\ b = -\frac{1}{4}c \end{cases}$ $\ker \varphi_{-2} = \{$

$= \langle \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{4}v_2 + v_3 \rangle$

$= \langle 2v_1 - v_2 + 4v_3 \rangle$

pour $\lambda = 3$:

$$\begin{cases} 2a - c = 0 \\ 2b + \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2}c \\ 2b - 2c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2}c \\ b = c \end{cases}$$

$$\ker \varphi_3 = \langle \tfrac{1}{2} v_1 + v_2 + v_3 \rangle = \langle v_1 + 2v_2 + 2v_3 \rangle$$

<u>images</u> : $\mathbb{R}^3$ si $\lambda \neq -2, 3$.

pour $\lambda = -2$: $\dim \operatorname{im} \varphi_{-2} = 3 - 1 = 2$

les vecteurs $\varphi(v_1) = -3v_1 + 2v_2 + v_3$ et $\varphi(v_2) = 2v_1 + 2v_3$ sont lin. indép.

donc $\operatorname{im} \varphi_{-2} = \langle \varphi(v_1), \varphi(v_2) \rangle$.

Même chose pour $\lambda = 3$: $\operatorname{im} \varphi_{-2} = \langle \varphi(v_1), \varphi(v_2) \rangle$.

b) Pour quelles valeurs de λ, $\operatorname{im} \varphi_\lambda \ni v_1 + 2v_2 + 2v_3$?

Si $\lambda \neq -2, 3$, φ_λ isom. ok. $v = v_1 + 2v_2 + 2v_3 \in \varphi_\lambda$.

Si $\lambda = -2$: en coordonnées de la base v_i

$$\operatorname{im} \varphi_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} ?$$

$$\begin{cases} -3a + 2b = 1 \\ a = 2 \\ a + 2b = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -6 + 2b = 1 \\ a = 2 \\ 2b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{7}{2} \\ a = 2 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{NON}$$

$$\Rightarrow v \notin \operatorname{im} \varphi_{-2}.$$

Si $\lambda = 3$:

$$\operatorname{im} \varphi_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} a \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2a + 2b = 1 \\ 2a = 2 \\ -4a + 3b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b = -1 \\ a = 1 \\ -4 + 3b = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a = 1 \\ 3b = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \quad \text{NON} \Rightarrow v \notin \operatorname{im} \varphi_3.$$

$$\left\langle \bigcup_\lambda \ker \varphi_\lambda \right\rangle \overset{?}{=} V \qquad \bigcup_\lambda \ker \varphi_\lambda = \underset{\text{si } \lambda \neq -2,3}{0} \cup \underset{\dim = 1}{\ker \varphi_{-2}} \cup \underset{\dim = 1}{\ker \varphi_3} \Rightarrow \dim \leq 2$$

$\Rightarrow$ NON.