

Matrices.

01/10/2014

Matrice m lignes n colonnes à coeff. en $\mathbb{K}$:

tableau de scolaires

matrice $m \times n$.

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ colonnes}} \quad m \text{ lignes}$$

$$M_{m,n}(\mathbb{K}).$$

a_{ij} = élément de ligne i colonne j .

Op. sur les matrices:

lignes de A : $(a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}), \dots, (a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{mn})$

colonnes de A : $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

si $m=n$, matrice carrée: matrice $n \times n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$$

$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

si A carrée $n \times n$, sa

Diagonale principale:

Matrice diagonale:

si $m=1$, $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$

si $n=1$, $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

si A carrée $n \times n$, sa

Diagonale principale:

Matrice diagonale:

si $m=1$, $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$

si $n=1$, $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

si A carrée $n \times n$, sa

Diagonale principale:

Matrice diagonale:

si $m=1$, $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$

si $n=1$, $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

si A carrée $n \times n$, sa

Diagonale principale:

Matrice diagonale:

si $m=1$, $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$

si $n=1$, $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

c'est l'ensemble des a_{ii} , $i=1, \dots, n$.
 c-à-d si $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$. $A = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n)$.
 vecteurs ligne | $A = (d_1, \dots, d_n) = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ matrice colonne.
 donc les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ sont égaux.
 des matrices.

Autre part, Réciproquement, les matrices $M_{m,n}(\mathbb{K})$ forment un esp. vectoriel.
 (même dimension)

Addition: $A = (a_{ij})_{m \times n}$ $B = (b_{ij})_{m \times n}$

$A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{ij}$ (compos. par compos.)

Produit par scalaire: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{ij}$ (comp. par comp.)

El. neutre: $0 \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ $0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ $0+A = A+0 = A$.

El. opposée: $A \mapsto -A = (-a_{ij})_{ij}$ $A+(-A) = (-A)+A = 0$.

$\Rightarrow M_{m,n}(\mathbb{K}) \Leftarrow \mathbb{K}$ -esp. vect.

Dimension: $\dim_{\mathbb{K}} M_{m,n}(\mathbb{K}) = mn$. Base $E = (e_{ij})_{ij}$ où $e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

$A = (a_{ij}) = \sum_{ij} a_{ij} e_{ij}$

Matrice identité $n \times n$: $I_n = \text{Diag}(1, \dots, 1)$

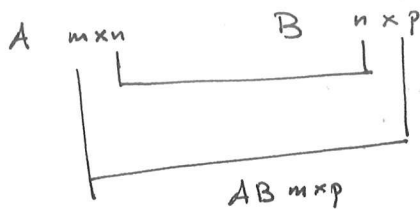
Matrice triang. sup $\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$ triang. inf. $\begin{pmatrix} \times & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}$

(Exemples)

Produit matriciel (lignes par colonnes)

(mult. terme à terme très peu utilisée).

possible si n. colonnes de A = n. lignes B.



$$A = (a_{ij}) \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$

$$B = (b_{ij}) \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p \end{matrix}$$

$$\text{alors } AB = (c_{ij}) \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p \end{matrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Règle $(m \times n)(n \times p) = m \times p$.

Rechte: le terme de place (i,j) est le prod. de la ligne $i^{\text{de}} A$ et de la colonne j de B.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3 \times 4$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad 4 \times 2$$

$$\Rightarrow AB \text{ est } 3 \times 2$$

schéma:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque: si AB existe, BA peut ne pas exister, et même si BA existe, en gën. $AB \neq BA$.
(taille en gën. différente, mais aussi si même taille).

P.P. associativité: $(AB)C = A(BC)$ (si les produits sont définis)
ABC

$$A(B+C) = AB + AC \quad \text{dist. par rapp. sur l'addition.}$$

$$(A \cdot B)C = A(B \cdot C) = A(AB)$$

1_n élém. neutre:

$$1_n A = A \quad \forall A \in M_{n,m}(K)$$

$$A 1_n = A \quad \forall A \in M_{m,n}(K)$$

$$A 1_n = 1_n A = A \quad \forall A \in M_n(K)$$

Matrice inverse: $a \in \mathbb{R}$

Rappel: $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. l'inverse de a. est a^{-1} t.q. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

$$\text{ex. } 5 \neq 0 \Rightarrow 5^{-1} = \frac{1}{5} \text{ t.q. } 5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1.$$

Def. A matrice $n \times n$ (carrée). A inversible si $\exists B$ t.q. $AB = BA = 1_n$.

B est l'inverse de A, $B = A^{-1}$. (unique)

(si C autre inverse, $C = C \cdot 1_n = C \cdot AB = 1_n \cdot B = B$).

Méthode du pivot de Gauss

opérations sur les lignes :

Feuille 2.

1. $L^{(i)} \leftrightarrow L^{(j)}$
2. $L^{(i)} \leftarrow L^{(i)} + \lambda L^{(j)} \quad i \neq j$
3. $L^{(i)} \leftarrow \lambda L^{(i)} \quad \lambda \neq 0$

mêmes op.
à dte et à gauche

si non, si on trouve une matrice triangulaire avec des 0 sur la diag., A non inversible.

Phase A: $(\square) \rightarrow (\nabla)$ "descente"

Pivot pour colonne 1 :

$$\begin{array}{l} \text{III} \\ \text{II} \\ \text{I} \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

éliminer au-dessous du pivot

$$\begin{array}{l} \text{II} + \text{I} \\ \text{III} - 2\text{I} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & | & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{III} \\ \text{II} \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & -3 & | & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & | & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A inversible.

Phase B: $(\nabla) \rightarrow (\diagup)$ "remontée".

une ligne de I_n

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & | & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & | & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

éliminer au-dessus

$$\begin{array}{l} \text{I} - 2\text{III} \\ \text{II} + 3\text{III} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

autre ligne de I_n

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & | & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & | & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

éliminer au-dessus :

$$\begin{array}{l} \text{I} + \text{II} \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & | & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & | & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & | & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Phase C : vérifier les calculs :

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{OK.}$$