Matrices d'applications linéaires 08/10/2014

$\varphi : V \longrightarrow W$

dim $= n$ $\qquad$ dim $= m$

on fixe

$\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ base de V $\qquad$ $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_m)$ base de W

$v_1 \overset{\varphi}{\longmapsto} \varphi(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m$

$v_2 \longmapsto \varphi(v_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m$

$\vdots$

$v_n \longmapsto \varphi(v_n) = a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m$

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(v_1) & \varphi(v_2) & \dots & \varphi(v_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Alors : si $v \in V$, $\quad v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$\Longrightarrow \varphi(v) = x_1 \varphi(v_1) + \dots + x_n \varphi(v_n) = x_1 (a_{11} w_1 + \dots + a_{m1} w_m) + \dots + x_n (a_{1n} w_1 + \dots + a_{mn} w_m) =$

$= (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n}) w_1 + \dots + (x_1 a_{m1} + \dots + x_n a_{mn}) w_m$

c-à-d si $v \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ en $\mathcal{V}$ alors $\varphi(v) \longleftrightarrow M_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ en $\mathcal{W}$.

$\boxed{\varphi(v) \longleftrightarrow \cancel{A}\, M \underline{x}}$ étant fixées $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$.

Composition et chang. de base :

i) Comp. d'appl. = produit de matrices :

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W & \xrightarrow{\psi} & U \\ \text{dim } n & & m & & p \\ \text{base } \mathcal{V} & & \mathcal{W} & & \mathcal{U} \end{array} \qquad \underbrace{V \longrightarrow U}_{\psi \circ \varphi}$$

alors $\boxed{M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\psi \circ \varphi) = M_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\psi) \cdot M_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)}$

en particulier : φ bijective $\Longleftrightarrow$ $M_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$ inversible,

et $M_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\varphi^{-1}) = \left(M_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)\right)^{-1}$.

ii) Chang. de base $\quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \mathcal{V} & & \mathcal{W} \end{array}$ a matrice $M_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$.

je change de base : $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$, $\mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}'$:

$$\boxed{M_{\mathcal{V}',\mathcal{W}'}(\varphi) = M_{\mathcal{W},\mathcal{W}'}(\mathrm{id}) \cdot M_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(\mathrm{id})}$$

en particulier, si $\varphi : \underset{U}{V} \longrightarrow \underset{U}{V}$ endom, même base au dép. et à l'arrivée,

alors $\boxed{M_{U',U'}(\varphi) = M_{U,U'}(id) \cdot M_{UU}(\varphi) \cdot M_{U',U}(id)}$

et $\left(M_{U,U'}(id)\right) = \left(M_{U',U}(id)\right)^{-1}$ matrices de passage.

Matrice de passage de U à U' : $M_{U',U}(id)$ = je prends les vecteurs de U' et je les exprime en fonction de U.

" " de U' à U : $M_{U,U'}(id)$ = je prends les vecteurs de U et je les exprime en fonction de U'.

Une est l'inverse de l'autre.