

Déterminants

15/10/2014

Def. déterminant de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -esp. vect. de $\dim = n$, avec une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ fixée.

$$\det : V^n = \overbrace{V \times V \times \dots \times V}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(v_1, \dots, v_n) \longmapsto \det_B(v_1, \dots, v_n)$$

l'unique appl. t.q.

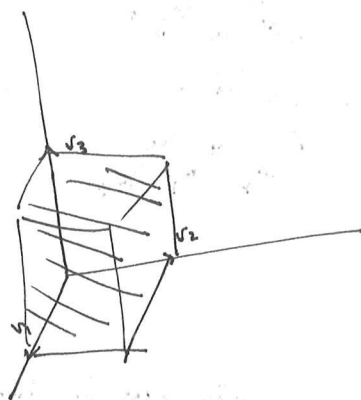
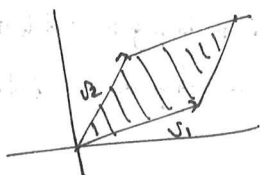
• multilinéaire, c-à-d lin. sur chacune des n variables.

• Alternance: si on échange deux vecteurs, $\det$ prend le signe opposé:

$$\det_B(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) = -\det_B(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

• valeur 1 sur la base de référence: $\det_B(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Géométriquement: volume des n vecteurs, (du parallélépipède), avec le signe d'orientation



Propriétés fondamentales:

• Si en $v_1, \dots, v_n$ il y a deux vecteurs égaux, alors $\det(v_1, \dots, v_n) = 0$: en effet:

$$\det(v_1, \dots, w_i, \dots, w_j, \dots, v_n) = -\det(v_1, \dots, w_j, \dots, w_i, \dots, v_n) \Rightarrow \det(\text{---}) = 0.$$

• Si $v_1, \dots, v_n$ sont lin. dép. alors $\det(v_1, \dots, v_n) = 0$:

on peut supposer $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i v_i$, alors

$$\det(v_1, \dots, v_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} c_i v_i) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \det(v_1, \dots, v_{n-1}, v_i) = 0.$$

Dét. de la matrice:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \det \left(\left(\begin{pmatrix} | \\ | \\ | \end{pmatrix}, \left(\begin{pmatrix} | \\ | \\ | \end{pmatrix}, \dots, \left(\begin{pmatrix} | \\ | \\ | \end{pmatrix} \right) \right)$$

on pense les colonnes comme les coordonnées des vecteurs en base canonique.

• $\det(AB) = \det A \det B$. (M. de Binet).

• $\det(A^T) = \det A$ (matrice transposée).

Formules directes
 Ex. en $\mathbb{R}^2$, avec $B = (e_1, e_2)$ base canonique :

$$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x e_1 + y e_2$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x' e_1 + y' e_2$$

Techniques de calcul de det (A)

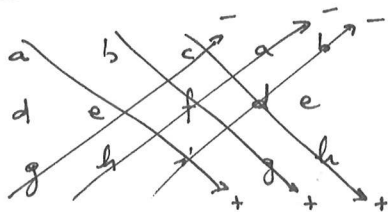
$$\begin{aligned} \text{donc } \det(v_1, v_2) &= \det(x e_1 + y e_2, x' e_1 + y' e_2) \\ &= x \det(e_1, x' e_1 + y' e_2) + y \det(e_2, x' e_1 + y' e_2) \\ &= x x' \cancel{\det(e_1, e_1)} + x y' \det(e_1, e_2) + y x' \cancel{\det(e_2, e_1)} + y y' \cancel{\det(e_2, e_2)} \\ &= x y' \det(e_1, e_2) - x' y \det(e_1, e_2) = x y' - x' y \end{aligned}$$

et on retrouve le classique

$$\det \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} = x y' - x' y$$

en $\mathbb{R}^3$, formule de Sarrus :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$



$$\det A = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Développements de Laplace :

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \quad (\text{dév. sur la ligne } i)$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \quad (\text{dév. sur la colonne } j)$$

A_{ij} = sous-matrice de A qui s'obtient en supprimant la ligne i et la colonne j .

Pivot de Gauss : on peut faire des op. sur les lignes et sur les colonnes

(car $\det A = \det(A)$), mais attention :

$$\det \left(\dots \underset{\text{place}}{c^i + \lambda c^{i'}} \dots \underset{j'}{c^{i'}} \right) = \det \left(\dots c^i \dots c^{i'} \right) + \lambda \underbrace{\det \left(\dots c^{i'} \dots c^{i'} \right)}_0$$

et idem pour les lignes

si on échange deux lignes / colonnes, det change de signe

si on multiplie une ligne / colonne par λ , det est multiplié par λ aussi.

Cas particuliers : matrice triangulaire sup/inf : det = produit des éléments diagonaux.
 matrice par blocs : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det B = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ (Laplace)

1. indép. des vecteurs: $v_1, \dots, v_n$ en V , $\dim V = n$, B base fixée.
 $(v_1, \dots, v_n)$ base $\Leftrightarrow \det_B(v_1, \dots, v_n) \neq 0$. $(e_1, \dots, e_n)$

2. Appl. lin. inversible: $\varphi: V \rightarrow V$
 $\det(\varphi) = \frac{\det(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))}{\det(e_1, \dots, e_n)}$ $(e_1, \dots, e_n) = B$ base

$\det M_{B,B}(\varphi)$

φ inversible $\Leftrightarrow \det \varphi \neq 0$.

3. Pour les matrices: A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$, et dans ce cas.

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Matrice des cofacteurs, inverse de la matrice:

$$A \in M_n(\mathbb{R}).$$

$$\text{Cof}(A) = \left((-1)^{i+j} \det A_{ij} \right)_{i,j}$$

A_{ij} = sous-mat. de A
 obtenue en supprimant la i -ème
 ligne et la j -ème colonne.

On a: A^{-1} inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t(\text{Cof}(A))$$