

Diagonalisation, Similitude "Transformer une matrice en une matrice diagonale, 05/11/2014

Motivation (1) $\begin{cases} i) \text{ Puissance de matrices} \\ ii) \text{ Equations récursives} \end{cases}$

A^k : Si $A = \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ semblable à celle donnée". $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ Famille 1.

$$\begin{cases} x_{n+1} = 5x_n + 6y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

je le écris en forme matricielle: $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ pt.  quivalent au calcul de } A^n.$$

iii) Systèmes d'équations différentielles linéaires

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

$$\text{ici aussi, } A = \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\dot{X}(t) = A X(t) + b(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \cos t \\ \dot{y} = \lambda_2 y - e^t \\ \dot{z} = \lambda_3 z + 4t^2 \end{cases}$$

ok, "  variables séparées".

des, ..., des

Conclusion: "diagonal, c'est bon".

Notre tâche: on part d'une matrice A , on la pense $A = M_{B,B}(\varphi)$ ou B est la base canonique de $\mathbb{R}^n$; on cherche une base B' t.q. $M_{B',B'}(\varphi) = \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ diagonal.

$$\text{On, } M_{B',B'}(\varphi) = M_{B',B}(\text{id}) \cdot M_{B,B}(\varphi) \cdot M_{B,B'}(\text{id}), \text{ donc:}$$

$$\Delta = P^{-1} A P \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \text{ une l'inverse de l'autre } P$$

Déf. A diagonalisable s'il existe P inversible t.q. $P^{-1}AP = \Delta$, ou Δ diagonale.

Déf. A, B matrices semblables: $P^{-1}AP = B$.

Remarque Si $B' = \{v_1, \dots, v_n\}$ est t.q. $M_{B',B'}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ diagonale, alors $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \varphi(v_2) = \lambda_2 v_2, \dots, \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$.

Cela justifie:

Déf. $v \neq 0$ (Non nul) est un vecteur propre de φ si $\varphi(v) = \lambda v, \exists \lambda \in \mathbb{R}$. (consist ence à la diag. sur $\mathbb{R}$).

$\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre pour φ s'il existe $v \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ t.q. $\varphi(v) = \lambda v$.

Attention: vecteur propre toujours $\neq 0$ (le 0 est l'élément t.q. $\varphi(0) = \lambda 0 \forall \lambda$).

Une valeur propre λ peut bien être 0. (les  l m ts de $\ker \varphi$). λ peut ne pas être inversible. P doit être inversible.

Conséquences A diagonalisable si $\exists$ une base B' de vecteurs propres de φ et $P = M_{B', B}^{(id)}$

Rem. Trouver v.t.q. $Av = \lambda v$ est à première vue difficile car on ne connaît ni λ ni v , mais avec la stratégie classique on peut d'abord trouver les λ_i et ensuite les v_i .

Rem. fondamentale: Si $v \neq 0$ t.q. $Av = \lambda v \exists \lambda$, alors $Av - \lambda v = (A - \lambda I)v = 0$

$$\Rightarrow \ker(A - \lambda I) \neq \ker(\varphi - \lambda id) \neq \{0\} \Rightarrow \boxed{\det(A - \lambda I) = 0}^{\neq 0}, \text{ et } \boxed{v \in \ker(A - \lambda I)}$$

Stratégie / Recette Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

1. polynôme caractéristique de A, $P_A(X) = \det(A - X I)$

$$P_A(X) = \det(A - X I) = \det \begin{pmatrix} 3-X & 2 & 0 \\ 0 & 4-X & 0 \\ 0 & -2 & 3-X \end{pmatrix} = (4-X) \det \begin{pmatrix} 3-X & 0 \\ 0 & 3-X \end{pmatrix} = (4-X)(3-X)^2$$

les racines sont les valeurs propres, car ce sont le λ t.q. $\det(A - \lambda I) = 0$

Rem. il faut chercher à mettre en évidence les facteurs, sinon on tombe sur une eq. de deg 3. Donc Gauss ✓ Sans X

2. Valeurs propres: racines de $P_A(X)$:

$$P_A(X) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3 \text{ avec multiplicité 2.}$$

3. Espaces propres: $\ker(A - \lambda I)$, l'espace vect. de tous les vecteurs propres de val. propre λ :

pour $\lambda = 4$: $\ker(A - 4I)$

$$\begin{pmatrix} 3-4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = -2y \end{cases} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ dim } \ker(A - 4I) = 1$$

Rem. des équations doivent disparaître, et le système doit avoir une infinité de sol, car λ valeur propre donc $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$.

pour $\lambda = 3$: $\ker(A - 3I)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ y = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ dim } \ker(A - 3I) = 2.$$

4. A diagonalisable?

sont lin. indép:

Remarque: vecteurs propres relatifs à val. propr. différentes

Donc: $\varphi(v_1) = d_1 v_1$, $\varphi(v_2) = d_2 v_2$, $v_1, v_2 \neq 0$ et $d_1 \neq d_2$.

Alors soit ~~triviale~~ $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$ (*)

si $c_1 = 0 \Rightarrow c_2 v_2 = 0$ mais $v_2 \neq 0$ donc $c_2 = 0$ ok.

si $c_1 \neq 0$ on peut diviser: ~~car~~ $v_1 = -\frac{c_2}{c_1} v_2$

j'applique φ à (*): $c_1 \varphi(v_1) + c_2 \varphi(v_2) = 0 \Rightarrow c_1 d_1 v_1 + c_2 d_2 v_2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow c_1 d_1 \left(-\frac{c_2}{c_1} v_2\right) + c_2 d_2 v_2 = 0 \Rightarrow \underbrace{c_2 v_2}_{\neq 0} \left(\underbrace{d_2 - d_1}_{\neq 0}\right) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \text{ mais}$$

si $c_2 = 0$ on a $\underbrace{c_1}_{\neq 0} \underbrace{v_1}_{\neq 0} = 0$ absurde. Donc l'unique possibilité est $c_1 = c_2 = 0$ $\square$

Conséquence: on met ensemble les bases des espaces propres on obtient toujours une famille libre;

ici on a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3 vecteurs indép. $\Rightarrow$ base.

$\Rightarrow$ OUI, A diagonalisable.

5. Matrice P:

Simplement

$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, t. q. $P^{-1}AP = A = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

$\swarrow$
dans l'ordre!

(6. Vérification)

Ici $\det P = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\swarrow$ λ en colonne

$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A \text{ OK.}$

Exemple de matrice non diag:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonalisable $\Leftrightarrow$ chaque sp. propre a la "bonne" dimension (la multiplicité de la somme racine de $P_A(x)$)