Tous documents et la calculatrice sont interdits. Durée : 1h30.

Questions de cours

Question 1 Soient V et W deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbf{K}$.

1. Donnez (sans la démontrer) la caractérisation d'un sous-espace vectoriel de W.
2. Étant donnée une application linéaire $f : V \to W$ entre V et W, démontrez que l'image $\mathrm{im} f$ de f est un sous-espace vectoriel de W.

Question 2 Considérons le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ des nombres complexes. Donnez-en une base. Quelle est sa dimension ?

Exercices

Exercice 1 Considérons les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$

$$U = \mathrm{Vect}\{(1,1,3),(1,0,-4),(2,1,-1)\}, \qquad W = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 3x+y+z=0 \text{ et } x+y+z=0\}.$$

1. Déterminez une base et la dimension de U.
2. Déterminez une équation linéaire caractérisant l'appartenance d'un vecteur (x,y,z) à U.
3. Déterminez une base et la dimension de W.
4. Déterminez $U \cap W$. Est-il vrai que $U \oplus W = \mathbf{R}^3$? Justifiez votre réponse.

Exercice 2 On rappelle que $\mathbf{R}_2[X]$ est le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

1. Donnez-en la base canonique $\mathcal{B}$ et la dimension.
2. On veut montrer qu'il existe une application linéaire $f : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$ telle que
$$f(X+X^2) = X^2, \quad f(-1+X) = 1, \quad f(X^2) = X^2.$$
   (a) En supposant que f existe, déterminez les images par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.
   (b) Déduisez de cela que f existe et qu'elle est unique.
3. Déterminez le noyau et l'image de f.
4. Est-il vrai que $\ker f$ et $\mathrm{im} f$ sont supplémentaires ? Justifiez votre réponse.
5. Considérons enfin l'application g définie pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}_2[X]$, par $g(P) = XP' - P$, où P' indique la dérivée usuelle.
   (a) Montrez que g est linéaire.
   (b) Montrez que $f(P) = g(P)$ pour tout $P \in \mathbf{R}_2[X]$.

Exercice 3 Considérons les matrices réelles 3×3

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Dites si M est inversible et, dans ce cas, calculez son inverse M^{-1}.
2. Calculez N^2. La matrice N est-elle inversible ?
3. Montrez que Δ et N commutent, c'est-à-dire $\Delta N = N\Delta$.
4. Calculez M^n pour tout $n \in \mathbf{N}$. (*Indication :* binôme de Newton).