Questions de cours

Question 1

1. Un sous-ensemble U de W est un sous-espace vectoriel de W si et seulement si
   (a) $0_W \in U$;
   (b) pour tous $u_1, u_2 \in U$, on a $u_1 + u_2 \in U$;
   (c) pour tout $u \in U$ et $a \in \mathbf{K}$, on a $au \in U$.

   Ou bien (équivalent) si et seulement si
   (a) $U \neq \emptyset$;
   (b) pour tous $u_1, u_2 \in U$, et pour tous $a_1, a_2 \in \mathbf{K}$, on a $a_1u_1 + a_2u_2 \in U$.
2. Démontrons-le avec la caractérisation précédente :
   (a) Puisque f est linéaire, on a $f(0_V) = 0_W$, donc $0_W \in \mathrm{im} f$.
   (b) Soient $w_1, w_2 \in \mathrm{im} f$, alors $w_1 = f(v_1)$ et $w_2 = f(v_2)$ avec $v_1, v_2 \in V$. Alors $w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$, donc $w_1 + w_2 \in \mathrm{im} f$.
   (c) Soient $w \in \mathrm{im} f$ et $a \in \mathbf{K}$, alors $w = f(v)$ avec $v \in V$. Alors $aw = af(v) = f(av)$, donc $aw \in \mathrm{im} f$.

Question 2 L'espace vectoriel $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ a dimension 2 sur $\mathbf{R}$, une base étant $\{1, i\}$. En effet, tout complexe z s'écrit de façon unique comme $z = a + ib = a \cdot 1 + b \cdot i$.

Exercices

Exercice 1 Considérons les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$

$$U = \mathrm{Vect}\{(1,1,3), (1,0,-4), (2,1,-1)\}, \qquad W = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 3x + y + z = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$$

1. On voit tout de suite que les trois générateurs pour U sont liés, car
$$(1,1,3) + (1,0,-4) = (2,1,-1).$$
   Donc on peut supprimer le dernier vecteur, et ainsi
$$U = \mathrm{Vect}\{(1,1,3), (1,0,-4)\}.$$
   Ces deux vecteur sont linéairement indépendants (on peut le vérifier directement en résolvant $\lambda(1,1,3) + \mu(1,0,-4)$), donc ils forment une base de U, qui a par conséquent dimension 2.
2. Un vecteur (x,y,z) appartient à U si et seulement si
$$(x,y,z) = \lambda(1,1,3) + \mu(1,0,-4),$$
   pour $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. On a donc le système
$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda - 4\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = y \\ x = y + \mu \\ z = 3y - 4\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = y \\ \mu = x - y \\ z = 3y - 4(x - y) \end{cases}$$
   d'où l'on tire l'équation (dernière ligne) $4x - 7y + z = 0$.
3. Il faut résoudre le système
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$
   donc une base de W est donnée par le vecteur $(0,-1,1)$, et W a dimension 1.

4. Un vecteur v de $\mathbf{R}^3$ appartient à $U \cap W$ si et seulement s'il appartient à U et à W. v est dans W ssi $v = \lambda(0, -1, 1) = (0, -\lambda, \lambda)$, et il est dans U ssi il satisfait à l'équation qui caractérise U. On doit avoir donc
$$4(0) - 7(-\lambda) + (\lambda) = 0 \Leftrightarrow 8\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$
c'est-à-dire ssi $v = 0$, donc $U \cap W = \{0\}$.
Pour montrer que $U \oplus W = \mathbf{R}^3$ il reste à montrer que $U + W = \mathbf{R}^3$, et puisque
$$U + W = \text{Vect}\{(1, 1, 3), (1, 0, -4), (0, -1, 1)\},$$
il suffit de montrer que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbf{R}^3$. En fait, puisqu'on a 3 vecteurs, et que $\dim(\mathbf{R}^3) = 3$, il suffit de montrer qu'ils sont indépendants, et cela se fait avec un calcul direct, en résolvant le système
$$a(1, 1, 3) + b(1, 0, 4) + c(0, -1, 1) = (0, 0, 0),$$
qui donne (calculs omis) $a = b = c = 0$.

Exercice 2 [On rappelle que $\mathbf{R}_2[X]$ est le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.]

1. La base canonique $\mathcal{B}$ est $(1, X, X^2)$ et la dimension est 3.
2. On veut montrer qu'il existe une application linéaire $f : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$ telle que
$$f(X + X^2) = X^2, \quad f(-1 + X) = 1, \quad f(X^2) = X^2.$$
   (a) Par linéarité, on doit avoir $f(X) = f((X+X^2)-X^2) = f(X+X^2)-f(X^2) = X^2-X^2 = 0$, et analoguement $f(-1) = f(-1 + X) - f(X) = 1 - 0 = 1$, d'où $f(1) = -1$.
   (b) Puisque $1, X, X^2$ forment une base, il existe une unique application linéaire f telle que $f(1) = -1$, $f(X) = 0$ et $f(X^2) = X^2$, nommément
$$f(a + bX + cX^2) = af(1) + bf(X) + cf(X^2) = -a + cX^2.$$
   On voit bien que f ainsi déterminée satisfait aux conditions du point 2.
3. Soit $P(X) = a + bX + cX^2$, alors
$$f(P) = -a + cX^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } c = 0$$
donc ssi $P(X) = bX$, $b \in \mathbf{R}$. Donc $\ker f = \text{Vect}\{X\}$, qui a dimension 1.
Par le théormème du rang $\text{im}f$ a dimension $3 - 1 = 2$, et puisque $f(1), f(X^2)$ sont indépendants, on peut écrire
$$\text{imf} = \text{Vect}\{f(1), f(X^2)\} = \text{Vect}\{-1, X^2\} = \{-a + cX^2 | a, c \in \mathbf{R}\}.$$
4. On a $\ker f = \text{Vect}\{X\}$ et $\text{im}f = \text{Vect}\{-1, X^2\} = \text{Vect}\{1, X^2\}$. Or, 1, X et X^2 sont une base de $\mathbf{R}_2[X]$ (la base canonique), donc ils sont indépendants (ce qui implique $\ker f \cap \text{im}f = 0$) et générateurs (ce qui implique $\ker f + \text{im}f = \text{Vect}\{1, X, X^2\} = \mathbf{R}_2[X]$). En conclusion, $\ker f \oplus \text{im}f = \mathbf{R}_2[X]$.
5. Considérons enfin l'application g définie pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}_2[X]$, par $f(P) = XP' - P$, où P' indique la dérivée usuelle.
   (a) Vérification directe : si $P, Q \in \mathbf{R}_2[X]$, alors
$$g(P+Q) = X(P+Q)' - (P+Q) = XP' + XQ' - P - Q = (XP' - P) + (XQ' - Q) = g(P) + g(Q)$$
   et de la même façon on montre que $g(aP) = ag(P)$.
   (b) Il suffit de vérifier que $f = g$ sur une base de $\mathbf{R}_2[X]$, pour que cela soit vrai sur tout $\mathbf{R}_2[X]$. En effet, on a $g(1) = -1 = f(1)$, $g(X) = 0 = f(X)$ et $g(X^2) = X^2 = f(X^2)$.

Exercice 3 Considérons les matrices réelles 3×3

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. M est inversible parce qu'elle est une matrice en forme triangulaire supérieure avec tous les termes sur la diagonale non nuls. Son inverse M^{-1} peut se calculer avec la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \begin{array}{c} -I \\ \\ (1/3)III \end{array} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \; II - III \; \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \; (1/3)II$$

Donc
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/9 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

2. N n'est pas inversible, car elle est en forme triangulaire supérieure avec des termes diagonaux nuls. Un calcul direct montre que :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Un calcul direct montre que
$$\Delta N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N\Delta$$

4. Puisque Δ et N commutent, la formule du binôme de Newton est valable :

$$\begin{aligned} M^n = (N+\Delta)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \Delta^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} N^0 \Delta^n + \binom{n}{1} N^1 \Delta^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 \Delta^{n-2} + \cdots \\ &= \Delta^n + nN\Delta^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 \Delta^{n-2} + \cdots \end{aligned}$$

Or, N^2 et toutes les puissances supérieures de N sont la matrice nulle, donc tous les termes à partir de $\binom{n}{2} N^2 \Delta^{n-2}$ disparaissent. Par conséquent

$$\begin{aligned} M^n &= \Delta^n + nN\Delta^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 3^{n-1}n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$