

A. Soient V et W deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels avec $\dim V = n$, $\dim W = m$, $0 < n < m$, $\varphi : V \rightarrow W$ et $\psi : W \rightarrow V$ deux applications linéaires.

1. Dire si φ peut être injective, surjective, bijective.
2. Même question pour ψ .
3. Dire quelles sont les compositions possibles parmi $\varphi \circ \varphi$, $\varphi \circ \psi$, $\psi \circ \varphi$, $\psi \circ \psi$.
4. Supposons que $\psi \circ \varphi = 0$ (resp. $\varphi \circ \psi = 0$). Quelle relation y a-t-il entre $\ker \psi$ et $\operatorname{im} \varphi$? (resp. entre $\ker \varphi$ et $\operatorname{im} \psi$).
5. On considère $\varphi \circ \psi$: montrer qu'elle n'est pas un isomorphisme (on pourra montrer qu'elle n'est pas injective).
6. Supposons que $\psi \circ \varphi$ soit un isomorphisme de V : montrer que
 - i) φ est injective ;
 - ii) ψ est surjective ;
 - iii) $\operatorname{im} \varphi \cap \ker \psi = 0$.
7. Montrer que le vice-versa est vrai aussi, c-à-d si φ est injective, ψ est surjective et $\operatorname{im} \varphi \cap \ker \psi = 0$, alors la composition $\psi \circ \varphi$ est un isomorphisme de V :
 - i) montrer que $\psi \circ \varphi$ est injective (on pourra montrer que $\ker(\psi \circ \varphi) = 0$)
 - ii) soient $v_1, \dots, v_n$ une base de V : montrer que $(\psi \circ \varphi)(v_1), \dots, (\psi \circ \varphi)(v_n)$ sont indépendants.
 - iii) en déduire que $\psi \circ \varphi$ est surjective et conclure.

B. On pose maintenant $n = 2$, $m = 3$, $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 & \psi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 \\ -2x_1 + x_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Écrire les matrices M de φ et N de ψ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer MN . Que représente MN par rapport à φ et ψ ?
3. Déterminer le rang de $\varphi \circ \psi$ et trouver une base de son noyau.
4. Calculer NM . Que représente NM par rapport à φ et ψ ?
5. Montrer que $\psi \circ \varphi$ est un isomorphisme.
6. Trouver, si elles existent, deux bases $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$ de $\mathbb{R}^3$ telles que

$$M_{\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2}(\varphi \circ \psi) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$