Contrôle 2, corrigé

A. 1. $\varphi : \overset{n}{V} \longrightarrow \overset{m}{W}$ $\quad n < m$

φ peut être injective (ex. $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$), mais pas surjective

($n = \dim V = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi \leq n < m \Rightarrow \operatorname{Im} \varphi \subsetneq W$)

$\Rightarrow \varphi$ ne peut être ~~surjective~~ bijective

2. $\psi : \overset{m}{W} \longrightarrow \overset{n}{V}$ $\quad n < m$

ψ peut être surjective (ex. $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto x_1$), mais pas injective

($m = \dim W = \dim \ker \psi + \underset{\hat{n}}{\dim \operatorname{Im} \psi} \leq n + \dim \ker \psi \Rightarrow \ker \psi \supsetneq 0 \Rightarrow \psi$ non injective)

$\Rightarrow \psi$ pas bijective

3. $\varphi \circ \varphi$ et $\psi \circ \psi$ ne sont pas définies, $\varphi \circ \psi : W \longrightarrow W$ et $\psi \circ \varphi : V \longrightarrow W$ sont bien définies.

4. Évidemment $\psi \circ \varphi = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} \varphi \subseteq \ker \psi$. Pareil pour $\varphi \circ \psi$.

5. ψ n'est pas injective, donc $\ker \psi \supsetneq 0 \Rightarrow \exists\ \overset{W}{w} \neq 0$ t.q. $\psi(w) = 0$
mais alors $\varphi(\psi(w)) = \varphi(0) = 0$ donc $w \in \ker(\varphi \circ \psi) > 0 \Rightarrow \varphi \circ \psi$ ~~pas~~ non injective.

6. $\psi \circ \varphi : V \longrightarrow V$ isomorphisme. Alors :

i) si φ non injective, $\exists\ \overset{0}{\overset{\neq}{v}} \in V$ t.q. $\varphi(v) = 0 \Rightarrow \psi(\varphi(v)) = \psi(0) = 0 \Rightarrow \ker(\psi \circ \varphi) > 0$
$\Rightarrow \psi \circ \varphi$ pas isomorphisme.

ii) $\psi \circ \varphi$ est surjective : donc si $v \in V$, $\exists\ x \in V$ t.q. $(\psi \circ \varphi)(x) = v$, donc $\psi(\varphi(x)) = v$. $\varphi(x)$ est une préimage de v pour ψ donc ψ est surjective.

iii) Soit $\overset{W}{w} \in \operatorname{Im} \varphi \cap \ker \psi \Rightarrow w = \varphi(v)$ et $\psi(w) = \psi(\varphi(v)) = 0 = (\psi \circ \varphi)(v)$
mais $\psi \circ \varphi$ est isomorphisme, donc $v = 0$ et $w = \varphi(v) = \varphi(0) = 0$.

7. i) Soit v t.q. $(\psi \circ \varphi)(v) = 0$: $\psi(\varphi(v)) = 0$ donc $\varphi(v) \in \ker \psi$ et $\varphi(v) \in \operatorname{Im} \varphi \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(v) = 0$ mais φ injective donc $v = 0$. $\Rightarrow \ker(\psi \circ \varphi) = 0$.

ii) si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\psi \circ \varphi)(v_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi(\varphi(v_i)) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \psi(\lambda_i \varphi(v_i)) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \psi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i)\right) = 0$ ~~et~~ alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) \in \ker \psi$ mais aussi
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right)$ donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) \in \operatorname{Im} \varphi$.

Donc ~~Σ~~ $\sum_i \lambda_i \varphi(v_i) = 0$ car $\operatorname{im}\varphi \cap \ker \psi = 0$

$\Rightarrow \varphi\left(\sum \lambda_i \cancel{\varphi} v_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_i \lambda_i v_i = 0$ car φ injective $\Leftrightarrow \ker\varphi = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ car v_i base de V.

donc $(\psi\circ\varphi)(v_i)_{i=1\dots n}$ indépendants.

iii) On a donc $\dim \operatorname{Im}(\psi\circ\varphi) \geq n$, ~~mais~~ ~~et~~ c-à-d $\dim \operatorname{Im}(\psi\circ\varphi) = n$ car $\dim V = n$. Donc $\psi\circ\varphi$ est surjective et enfin isomorphisme de V.

B. 1. $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $MN = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{E}_{3c}}(\varphi\circ\psi)$ où $\mathcal{E}_3$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. Réduction de MN par lignes :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\operatorname{rk}(\varphi\circ\psi) = 2$ et $\dim\ker(\varphi\circ\psi) = 1$, $\ker(\varphi\circ\psi) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

4. $\overset{NM}{\cancel{NM}} = M_{\mathcal{E}_2}(\psi\circ\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

5. NM est inversible (p. ex. $\det NM = -6+2 \neq 0$), ~~on doit donc~~ donc $\psi\circ\varphi$ est un isomorphisme.

6. j'ai une base de $\ker \varphi\circ\psi$: $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\varphi\circ\psi} 0$

je la complète à base de $\mathbb{R}^3$, p. ex. $\underset{w_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{w_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{w_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ et celle-ci est la base $\mathcal{W}_1$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\underset{\substack{(\varphi\circ\psi)(w_1^{\mathcal{E}}) \\ \shortparallel \\ w_1'}}{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \quad \underset{\substack{\varphi\circ\psi(w_2^{\mathcal{E}}) \\ \shortparallel \\ w_2'}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \quad 0$$

on vérifie ~~que~~ aisément que $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est bien une base de $\mathbb{R}_3$.

je complète w_1' et w_2' à base de $\mathbb{R}^3$, p. ex. $w_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et j'obtiens ~~la~~ la base $\mathcal{W}_2$.

Alors $M_{\mathcal{W}_1,\mathcal{W}_2}(\varphi\circ\psi) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$