Exercice 1

1. Soient $A(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $R(X)$ le reste de la division euclidienne de A par $(X-\alpha)^3$.
   (a) Que peut-on dire du degré de R ?
   (b) Quelle relation y a-t-il entre $A(\alpha)$ et $R(\alpha)$?
   (c) Quelle relation y a-t-il entre $A'(\alpha)$ et $R'(\alpha)$ (où A', respectivement R', désigne le polynôme dérivé de A, resp. R) ?
   (d) Quelle relation y a-t-il entre $A''(\alpha)$ et $R''(\alpha)$?
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par $P(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$.
   (a) Décomposer P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) À l'aide de la question 1, calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}_{>0}$ le reste de la division euclidienne de X^n par P (il faudra distinguer $n = 1$ et $n \geq 2$).

Exercice 2 On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1. Donner (sans démonstration) la dimension et une base $\mathcal{B}_n$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & P & \longmapsto & \begin{pmatrix} P(2) \\ P''(1) \\ P(0) - 2P(1) \end{pmatrix} \end{array}.$$

   (a) Montrer que Φ est linéaire. Peut-elle être un isomorphisme ?
   (b) Calculer l'image par Φ des éléments de la base $\mathcal{B}_3$.
   (c) En déduire la matrice M de Φ dans la base $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (d) Déterminer la dimension et une base du noyau et de l'image de Φ.