Exercice 1 Le but de cet exercice est de diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1. écrire le polynôme caractéristique de A, $p_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_2)$.
2. déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A.
3. dire si A est effectivement diagonalisable, et écrire la forme diagonale Δ de A
4. déterminer un vecteur propre v_{λ_1} de valeur propre λ_1 (c.-à-d. une solution non nulle de $(A - \lambda_1\mathbb{I}_2)X = 0$).
5. déterminer un vecteur propre v_{λ_2} de valeur propre λ_2.
6. déterminer la matrice P telle que $P^{-1}AP = \Delta$.
7. * calculer A^n, pour n naturel.

Exercice 2 dériver les fonctions suivantes

$$g(x) = \frac{\tan x + 5x^2}{\cos x}, \quad h(x) = \arctan(e^x)$$

Exercice 3 énoncer la règle d'intégration par parties, et calculer

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx, \quad \int_{1/2}^{1} \ln 2x \, dx$$

Exercice 4 calculer avec un changement de variable

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \text{ (poser } e^x = t\text{)}, \quad \int_0^{1/2} \arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \text{ (poser } \arcsin x = t\text{)}$$