

Matrices

Def. Matrice : tableau de nombres réels, à m lignes et n colonnes

ou matrice $m \times n$.

$$m \text{ lignes } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

n colonnes

on écrit : $A = (a_{ij})$ $\begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$

a_{ij} = élément de situation ligne i colonne j.

les lignes de A sont $(a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}), \dots, (a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{mn})$

les colonnes de A sont $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

la diagonale principale de A est $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

si $m=n$, la matrice est dite carrée $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A = (a_{ij}) \ 1 \leq i, j \leq n$$

si $m=1$, $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ est un vecteur ligne

si $n=1$, $A = v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne.

Une matrice carrée est diagonale si :

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

et $a_{ij} = 0$ si $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$

on écrit aussi $A = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n)$

Et si A diagonale et $d_1 = \dots = d_n = d \Rightarrow$ A matrice scalaire

$$A = \begin{pmatrix} d & & \\ & \ddots & \\ & & d \end{pmatrix} = \text{Diag}(d, \dots, d)$$

Matrice identité :

$$I_n = \mathcal{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{R}).$$
$$= \text{Diag}(1, \dots, 1)$$

Opérations sur les matrices

- Addition
- Multiplication par un scalaire (= nombre)
- Produit de deux matrices.

Addition

A $m \times n$

B $m \times n$

mêmes dimensions

l'addition se fait composante par composante

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

l'élément neutre est la matrice 0, dont tous les coeff. sont nuls.

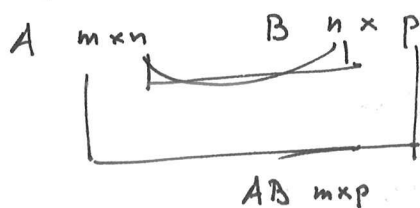
Multiplication par scalaire : $\lambda \in \mathbb{R}, A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ex. 1, 2.

Produit "lignes par colonnes", produit matriciel

(multiplication terme à terme n'est très peu utilisée)



le produit est possible si :

nombre de colonnes de A = nombre de lignes de B.

Règle : $(m \times n)(n \times p) = m \times p$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

$$\text{alors } AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Recette: le terme de place (i,j) est le produit de la ligne i de A avec la colonne j de B .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 x 4

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4 x 2

$\Rightarrow AB$ est (3×2)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41} \text{ etc.}$$

$$= (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0$$

$$= 1 + 0 + 1 + 0 = 2$$

Par contre, BA n'est pas possible.

Remarque Si AB existe, BA peut ne pas exister, et même s'il existe $\neq$ en général $AB \neq BA$.
(taille différente mais aussi avec même taille)

Ex. 3, 5.

Relation Matrices - Systèmes:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ x + 3y + 2z = -1 \\ 3x + 5y + 8z = 8 \end{cases}$$

peut s'écrire $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ (*)

en général $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

et en gen sur les ordinateurs.

$$AX = b$$

Pour les TP avec Scilab, les systèmes sont tjrs vus en forme matricielle.

système en forme matricielle {

$$\text{ou } \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

résolution de (*) et de Ex. 6 qq-uns.

Inverse des matrices :

Rappel : $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. l'inverse de a est a^{-1} , t.q. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

ex. $5 \neq 0 \Rightarrow 5^{-1} = \frac{1}{5}$ t.q. $5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$.

Def. A matrice $n \times n$ (carrée). A invertible si $\exists B$ t.q.

$$AB = BA = I_n. \quad B \text{ est l'inverse de } A.$$

Si B existe, alors elle est unique, et s'écrit A^{-1} .

Proposition : Équivalentes ; pour A $n \times n$:

i) A invertible

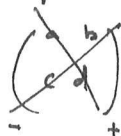
ii) $x \in \mathbb{R}^n$, si $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ (vecteurs)

6) Pourquoi calculer l'inverse, si elle existe ?

Matrices 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Def. Déterminant de A : $\det A = |A| = ad - bc$



Prop. A invertible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ et dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

en effet, $A \cdot \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}$

Ex. 8

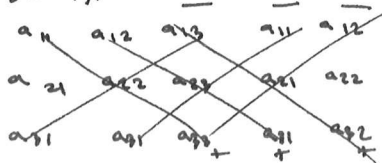
Matrices 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Def. Déterminant de A :

Formule de Sarrus

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{12}a_{23} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{23}a_{11}a_{32}$$



Prop. A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Méthode pour le calcul de l'inverse (valable en dimension n quelconque) Pivot de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

D I_3

mêmes opérations
 $\Rightarrow \dots \Rightarrow$
sur les lignes.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right) \quad \} D^{-1}$$

< si on ne peut transformer D en I , K , alors D n'est pas inversible
sinon, quand à gauche il y a I , à droite on trouve D^{-1} .

justification: opérations sur les lignes de $D \Leftrightarrow TD$

$$(D | I) \rightsquigarrow (T_k T_{k-1} \dots T_1 D | T_k T_{k-1} \dots T_1) = (I | T_k T_{k-1} \dots T_1)$$

alors $(T_k T_{k-1} \dots T_1) D = I \quad \text{c-à-d} \quad T_k T_{k-1} \dots T_1 = D^{-1}$

Ex. 8, 9, 10.