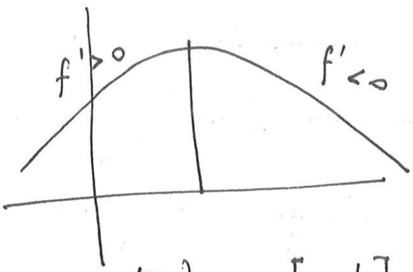
Compléments sur ~~les dérivées~~ continuité et les dérivées

07/10/2013

Feuille 1

1. Croissance et décroissance

f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors



i) f croissante (resp. décroissante) sur $[a,b]$ si $\forall x \in]a,b[$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$).

ii) Si f vérifie $\forall x \in]a,b[$ $f'(x) > 0$ (resp. $\forall x \in]a,b[$ $f'(x) < 0$) alors f est strict. croissante (resp. décroissante) sur $[a,b]$.

iii) Si $f'(x) = 0$ $\forall x \in]a,b[$ alors f est constante sur $[a,b]$.

Ex. 5.

2. Négligeabilité

3. Comparaison des croissances

4. Règle de l'Hôpital

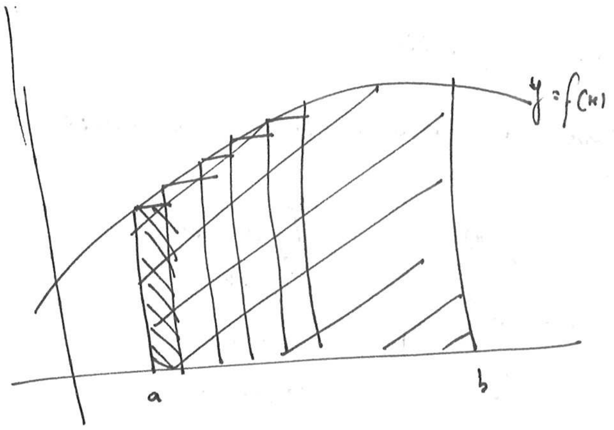
Ex. 7.

Intégration

f continue sur $[a,b]$, positive

$\int_a^b f(x)\,dx =$ "aire sous la courbe"

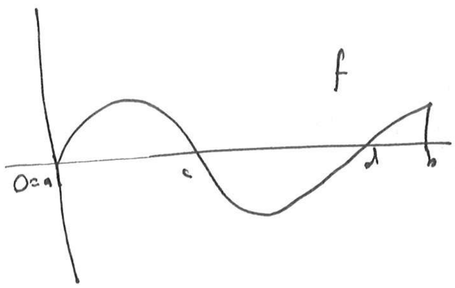
$\vdots$ lui "aire de fonctions à escalier"

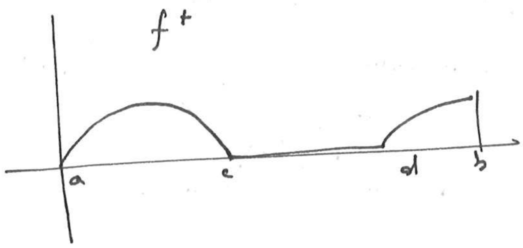


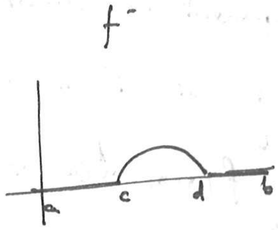
f non positive : alors

$f = f^+ - f^-$ $\quad f^+(x) = \sup(f(x), 0)$ $\quad f^-(x) = \sup(-f(x), 0)$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx$ "aire avec signe"





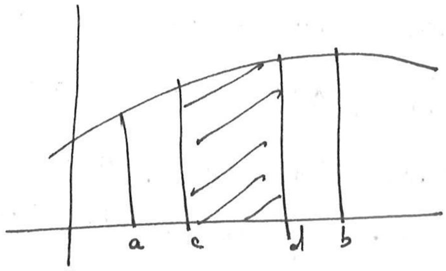


Définition f, F définie : $]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$

F primitive de f sur I si F dérivables et $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

Théorème fondamental du calcul intégral

f continue sur $]a,b[$, $\quad a<c<d<b$



i. Soit $F : \underset{\substack{\Uparrow \\ I}}{x} \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$

alors $F'(x) = f(x)$, et $F(a) = 0$

(F est la primitive de f qui s'annule en a)

ii. Soit G une primitive de f sur I. Alors $\boxed{\int_c^d f(x)\,dx = G(d) - G(c)}$

conclusion : intégration et dérivation sont opérations réciproques.

Propriété de l'intégrale : $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int f + \int g \qquad \int \lambda f = \lambda \int f$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad \forall c \in]a,b[$$

si $a<b \Rightarrow \int_b^a f = -\int_a^b f$.

Calcul des primitives

$\int f(x)\,dx$ = calculer toutes les primitives : $F(x) + C$ ↳ constante d'intégration

ex.

	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\alpha \neq -1$	x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
	$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert + C$
	e^x	$e^x + C$
	$\sin x$	$-\cos x + C$
	$\cos x$	$\sin x + C$

ex. 1.

changement de variables : Si $\left(F(g(x))\right)' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$

alors si F est une primitive de f,

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \Big[F(g(x))\Big]_{x=a}^{x=b} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du$$

ex. 2, 5, 6, 7, méthode directe et inverse.

Intégration par parties

Feuille 2

$u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables en $]a,b[$ avec dérivée continue

$$\int_a^b u'(t)\, v(t)\, dt = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u(t)\, v'(t)\, dt$$

Démo. $\int_a^b u'(t)\, v(t)\, dt + \int_a^b u v'\, dt = \int_a^b (u'v + uv')\, dt = \int_a^b (uv)'\, dt = \left[uv\right]_a^b$.

Attention : 1. Question de cours aux DS.

2. Il y a un seul "prime" de chaque côté de $=$.

3. Le "prime" change de u à v.

Ex. 4 et les autres.