Ex. 56. $\underset{\dim n}{h : E} \longrightarrow \underset{m}{F}$ de rang r donc $r \leq \min(n,m)$

1\. On a la formule des dimensions :

$\dim E = \dim \ker h + \dim \operatorname{Im} h = \dim \ker h + r$. En particulier $\dim \ker h = n-r$

Soit $e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n$ une base de $\ker h$

$$\begin{array}{ccccc} e_{r+1} & e_{r+2} & \dots & e_n \\ \downarrow h & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & 0 & & 0 \end{array}$$

je la complète à une base de E avec $e_1, \dots, e_r$.

$$\begin{array}{ccc} e_1 & \dots & e_r \\ \downarrow & & \downarrow \\ h(e_1) & & h(e_r) \\ \| & & \\ f_1 & \dots & f_r \end{array}$$

Les vecteurs $f_1, \dots, f_r \in E$ sont <u>indép</u> :

si $c_1 f_1 + \dots + c_r f_r = 0 \Rightarrow c_1 h(e_1) + \dots + c_r h(e_r) = 0 \Rightarrow h(c_1 e_1 + \dots + c_r e_r) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c_1 e_1 + \dots + c_r e_r \in \ker h$, mais $\langle e_1, \dots, e_r \rangle \cap \ker h = \langle 0 \rangle \Rightarrow c_1 e_1 + \dots + c_r e_r = 0$

$\Rightarrow c_1 = \dots = c_r = 0$.

Enfin, je complète la famille $f_1, \dots, f_r$ à une base de F avec $f_{r+1}, \dots, f_m$.

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_i$, $\mathcal{B}' = (f_j)_j$

On a alors $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(h) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}_{r \quad\quad n-r} \begin{matrix} \}\, r \\ \}\, m-r \end{matrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

2\. $h\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

Noyau de h : Pivot de Gauss :

$$\begin{array}{c} \text{III} \\ \text{II} \\ \text{I}-2\text{III} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \text{III}+5\text{II} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -x_4 \\ x_2 + x_3 = 2x_4 \\ 4x_3 = 13x_4 \end{cases}$$

$r = 3$

ex.

$$\begin{cases} x_3 = 13 \\ x_4 = 4 \\ x_2 = 2 \cdot 4 - 13 = -5 \\ x_1 = -4 - 13 + 10 = -7 \end{cases}$$

base de $\ker h$: $\begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix} = e_4$

je complète e_4 à base de $\mathbb{R}^4$ avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}$

les vecteurs f_1, f_2, f_3 sont les 3 prem. colonnes de la matrice A

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice résultante est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \underbrace{}_{3} \; \underbrace{}_{1}$$

Le point 3. se fait comme le 2.

(N.B. La matrice finale doit avoir les mêmes tailles)

Ex. 58.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & 0 & 0 \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\begin{array}{l} e_1 \xmapsto{f} e_n \xmapsto{f} e_1 \xmapsto{f} e_n \\ e_2 \longmapsto 0 \longmapsto 0 \\ \vdots \\ e_{n-1} \longmapsto 0 \longmapsto 0 \\ e_n \longmapsto e_1 \xmapsto{f} e_n \longmapsto e_1 \end{array}$$

etc. donc $A_1^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & \iddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ si k impair

$$A_1^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad k \text{ pair}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\begin{array}{l} e_1 \xmapsto{f} e_n \xmapsto{f} e_1 \\ e_2 \longmapsto e_{n-1} \longmapsto e_2 \\ e_3 \longmapsto e_{n-2} \longmapsto e_3 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ e_{n-1} \longmapsto e_2 \longmapsto e_{n-1} \\ e_n \longmapsto e_1 \longmapsto e_n \end{array}$$

etc. donc $A_2^k = \begin{cases} A_2 & \text{si } k \text{ impair} \\ \mathbb{1}_n & \text{si } k \text{ pair.} \end{cases}$

Ex. 59. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto e^{i\theta}\bar{z}$ $\qquad$ $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-esp. vect.

$\mathcal{E} = \{1, i\}$

i) $f(z_1+z_2) = e^{i\theta}\overline{(z_1+z_2)} = e^{i\theta}(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = e^{i\theta}\bar{z}_1 + e^{i\theta}\bar{z}_2$ ok

$f(\underset{\in \mathbb{R}}{\lambda} z) = e^{i\theta}\overline{\lambda z} = \lambda e^{i\theta}\bar{z} = \lambda f(z)$ car $\bar{\ }$ est $\mathbb{R}$-linéaire

ii) $f(1) = e^{i\theta}\cdot\bar{1} = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$f(i) = e^{i\theta}\cdot(-i) = -(\cos\theta + i\sin\theta)\, i = \sin\theta - i\cos\theta$

$$A = M_E(f) = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

iii) j'écris $x = \lambda e^{i\varphi}$ $(\lambda \neq 0)$

$f(x) = \lambda e^{-i\varphi} e^{i\theta} = \lambda e^{i\varphi} \iff e^{i\theta} = e^{2i\varphi}$

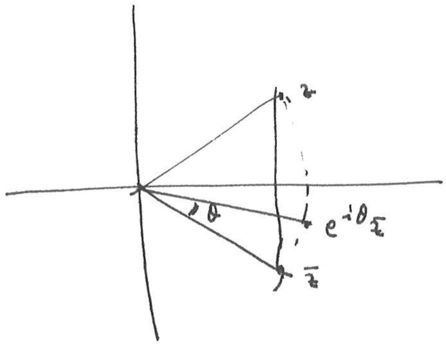
tous les points $x = \lambda e^{i\frac{\theta}{2}}$ sont points fixes de f. ex. $e^{i\frac{\theta}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}$

Pour $f(y) = -y$, j'écris

$e^{i\theta}\lambda e^{-i\varphi} = -\lambda e^{i\varphi} \iff e^{2i\varphi} = -e^{i\theta} = e^{\pi i} e^{i\theta} = e^{i(\pi+\theta)}$

tous les points $y = \lambda e^{i\frac{\pi+\theta}{2}}$ sont t.q. $f(y) = -y$. ex. $e^{i\frac{\pi+\theta}{2}} = -\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}$

iv)



f est la reflexion par rapport à $\mathbb{R}$ (la conjugaison) suivie d'une rotation d'angle θ.

v) $(g\circ f)(z) = g\left(e^{i\theta}\bar{z}\right) = e^{i\rho} e^{-i\theta} z = e^{i(\rho-\theta)} z$

$(g\circ f)(1) = e^{i(\rho-\theta)} = \cos(\rho-\theta) + i\sin(\rho-\theta)$

$(g\circ f)(i) = e^{i(\rho-\theta)}\, i = -\sin(\rho-\theta) + i\cos(\rho-\theta)$

$$\begin{pmatrix}\cos(\rho-\theta) & -\sin(\rho-\theta)\\ \sin(\rho-\theta) & \cos(\rho-\theta)\end{pmatrix}$$

c'est la rotation d'angle $\rho-\theta$.