

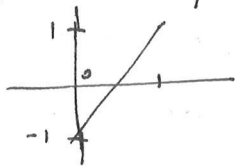
Famille 8 Dualité

1

Ex. 60. $F: E \rightarrow \mathbb{R}$

i) $F(g+h) = \int(g+h) = \int g + \int h$ et $F(\lambda g) = \int \lambda g = \lambda \int g$ d'après.

ii) P. ex. la fonction: $f(t) = 2t - 1$



iii) Évidemment non, car $\forall F(0) = 0$, où 0 est la fonction nulle (autrement dit, $\forall F \neq 0$).

iv) Oui, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction constante

$$g(t) = \lambda \text{ est t.q. } F(g) = \int_0^1 \lambda dt = \lambda.$$

Ex. 61.

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont évidemment une base de $\mathbb{R}^3$, B .

Base duale: $v_1^*, v_2^*, v_3^*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ t.q.

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$$

donc $v_1^*(v_1) = 1$ $v_1^*(v_2) = 0$ $v_1^*(v_3) = 0$ $M_{B,1}(v_1^*) = (1 \ 0 \ 0)$

et ainsi $M_{B,1}(v_2^*) = (0 \ 1 \ 0)$ $M_{B,1}(v_3^*) = (0 \ 0 \ 1)$

je veux $M_{E,1}(v_i^*) = M_{B,1}(v_i^*) \cdot M_{E,B}(\text{Id})$

$= (1 \ 0 \ 0) M_{E,B}(\text{Id}) =$ première ligne de la matrice de chgt de base $(M_{B,E}(\text{Id}))^{-1}$

$M_{B,E}(\text{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $M_{E,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I-III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I-II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

donc $v_1^* = (1 \ -1 \ 0)$ $v_2^* = (0 \ 1 \ -1)$ $v_3^* = (0 \ 0 \ 1)$

Monnaie: $v_i^*(v_j) = \delta_{ij} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overline{v_1^*} \\ \overline{v_2^*} \\ \overline{v_3^*} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}}_{M_{B,E}(\text{Id})} = I_3$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \overline{v_1^*} \\ \overline{v_2^*} \\ \overline{v_3^*} \end{pmatrix} = (M_{B,E}(\text{Id}))^{-1}$

Ex. 62. On fixe une base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de E . Je peux écrire

$$f_1 = (a_{1,1} \dots a_{1,n}) \in M_{1,n}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \neq 0$$
$$\vdots$$
$$f_n = (a_{n,1} \dots a_{n,n})$$

$$f_i(\vec{v}) = 0 \quad \forall i \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow A \text{ n'a pas rang } n$$

$\Rightarrow$ ses colonnes sont dép.
 $\Rightarrow$ ses lignes aussi.
 $\Rightarrow f_1, \dots, f_n$ lin. dép.

Attention : cela suppose de savoir que le rang par lignes = le rang par colonnes, d'une matrice.

Sinon : Par absurde, $f_1, \dots, f_n$ famille libre donc $f_1, \dots, f_n$ base de E^* : je prends $x \neq 0 \in E$ et je la complète à une base $x, x_2, \dots, x_n$ de E . Soit $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ la forme qui vaut 1 en x et 0 en $x_2, \dots, x_n$:

$$f = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n \quad \text{mais} \quad \underbrace{f(x)}_1 = c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0. \quad \text{Donc } f_1, \dots, f_n \text{ pas libre.}$$

Ex. 63. Voir ex. 61. Si $\{v, e_2, \dots, e_n\}$ est base, alors

$$\begin{pmatrix} \overline{v^*} \\ \overline{e_2^*} \\ \vdots \\ \overline{e_n^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ v & e_2 & \dots & e_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{donc } v^* \text{ est défini seulement par rapport au } \{v, \dots, e_n\}.$$

Ex. 64. Attention : En France, la matrice de passage de B à B' est en général $M_{B', B}(\text{id})$, qui écrit les vecteurs de la nouvelle base B' en B .

En d'autres pays, c'est $M_{B, B'}(\text{id}) = (M_{B', B}(\text{id}))^{-1}$.

Donc : $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ $B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$. Nous savons

$$P = M_{B_2, B_1}(\text{id}) \in \text{et nous voulons calculer } M_{B_2^*, B_1^*}(\text{id}) =$$

$$B_1^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\} \quad B_2^* = \{w_1^*, \dots, w_n^*\}$$

$$\text{Soit } w_i^* \in B_2^* : w_i^* = a_{i,1} v_1^* + \dots + a_{i,n} v_n^* \quad \text{et} \quad M_{B_2^*, B_1^*}(\text{id}) = (a_{ij})^T$$

$\rightarrow$ (une colonne)

il suffit de calculer les a_{ij} : soit $v_j \in B_1$, on a :

$$w_i^*(v_j) = \sum_k a_{i,k} v_k^*(v_j) + \dots + a_{i,n} v_n^*(v_j) = a_{i,j}$$

$$w_i^*(c_1 w_1 + \dots + c_n w_n) \quad \text{ou} \quad c_k = P_{k,j}^{-1}$$

$$= w_i^* (P_{ij}^{-1} w_1 + \dots + P_{ij}^{-1} w_n) = (P^{-1})_{ij}$$

donc $(a_{ij})_{i,j}^* = (P^{-1})_{ij}$ c-a-d $(a_{ij})_{i,j}^T = \boxed{(P^{-1})^T = M_{\beta_2^*, \beta_1^*}(\text{id})}$

Moralité: $M_{\beta_2^*, \beta_1^*}(\text{id}) = \left(M_{\beta_2, \beta_1}(\text{id}) \right)^{-T}$

Ex. 65. Évidemment $e_1^* + e_2^*$ et $2e_1^* - e_2^*$ sont une base de E^* , car e_1^*, e_2^* est une base et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont libres.

$e_1 = (1 \ 0)$ $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} e_1^* \\ e_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $e_1^* = (1 \ 0)$

$e_2^* = (0 \ 1)$

$f_1^* = e_1^* + e_2^* = (1 \ 1)$ $f_2^* = 2e_1^* - e_2^* = (2 \ -1)$

Si $\begin{pmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & \dots & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & \dots & | \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} | & \dots & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & \dots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1^* \\ \vdots \\ -v_n^* \end{pmatrix}^{-1}$

donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ donc $\{f_1^*, f_2^*\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$

Ex. 66. Base de $M_n(\mathbb{K})$: $e_{ij} = i \begin{pmatrix} & & j \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$ $i, j = 1, \dots, n$

$e_{ij} e_{kl} = \begin{cases} e_{il} & \text{si } j=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ la Trace est commutative $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

$F(e_{ij} e_{jl}) = F(e_{il})$

" $F(e_{jl} e_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq i \\ F(e_{jj}) & \text{si } l = i \end{cases}$

$\Rightarrow F(e_{ij}) = 0$ si $i \neq j$, $F(e_{jj}) = F(e_{ii}) \quad \forall j$

donc $F(A) = F\left(\sum_{i,j} a_{ij} e_{ij}\right) = \sum_{i,j} a_{ij} F(e_{ij}) = \sum_{j=1}^n a_{jj} F(e_{jj}) = F(e_{ii}) \sum_{j=1}^n a_{jj}$

Soit $F: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ forme.

On observe que $\boxed{\text{Tr}(A e_{jj}) = A_{jj}} \quad \forall A \in M_n(\mathbb{K})$. Posons $(A_{ij}) = F(e_{ji})$

Soit donc $M = \sum_{i,j} m_{ij} e_{ij} \Rightarrow F(M) = \sum_{i,j} m_{ij} F(e_{ij}) = \sum_{i,j} m_{ij} A_{ji} =$

$$= \sum_i \sum_j m_{ij} A_{ji} = \sum_i (MA)_{ii} = \text{Tr}(MA) = \text{Tr}(AM).$$

2. Soit H hyperplan, de $M_n(\mathbb{K})$, f forme (non nulle) t.q. $H = \ker f$
 i.e. $0 = f(H) = \text{Tr}(AM) = \sum_{i,j} A_{ij} M_{ji} \exists A$. On distingue deux cas :

A est diagonale :

$$\text{donc } \text{Tr}(AM) = \sum_{i=1}^n A_{ii} M_{ii}$$

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & \diagdown & \\ & & \end{pmatrix}$$

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} = e_{2,1} + e_{3,2} + \dots + e_{n-1,n}$ inversible et $M_{ii} = 0 \forall i$
 (c'est une matrice de changement de base) donc $\text{Tr}(AM) = 0$.

Si A non diagonale : soit $i \neq j$ t.q. $A_{ij} \neq 0$

il suffit de prendre la matrice $M = \mathbb{1}_n - \frac{\text{Tr}(A)}{A_{ij}} e_{ij}$

$$M = \begin{pmatrix} \diagdown & & * \\ & \ddots & \\ & & \diagdown \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \diagdown & & \\ * & \ddots & \\ & & \diagdown \end{pmatrix} \text{ est triangulaire, avec des 1 sur la diag., donc } M \text{ inversible.}$$

(voir pag. préc.) A_{ij}

On a :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AM) &= \text{Tr}\left(A\left(\mathbb{1} - \frac{\text{Tr}(A)}{A_{ij}} e_{ij}\right)\right) = \text{Tr}\left(A - \frac{\text{Tr}(A)}{A_{ij}} A e_{ij}\right) = \text{Tr}(A) - \frac{\text{Tr}(A)}{A_{ij}} \text{Tr}(A e_{ij}) \\ &= \text{Tr}(A) - \frac{\text{Tr}(A)}{A_{ij}} A_{ij} = 0. \end{aligned}$$