Feuille 9. Polynômes

Ex. 67

$$P_{n+1}(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x+1)}{1\cdot 2} + \dots + \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{1\cdot 2\cdots(n+1)}$$

$$P_1 = P_{0+1} = 1 + x$$

$$P_2 = 1 + x + \frac{x(x+1)}{1\cdot 2} = \frac{2(1+x) + x(1+x)}{1\cdot 2} = \frac{(x+1)(x+2)}{1\cdot 2}$$

$$P_3 = \underbrace{1 + x + \frac{x(x+1)}{2}} + \frac{x(x+1)(x+2)}{2\cdot 3}$$

$$= \frac{(x+1)(x+2)}{2} + \frac{x(x+1)(x+2)}{2\cdot 3} = \dots = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{3!}$$

$$\boxed{P_n = \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n!}}$$

par récurrence :

$$P_{n+1}(x) = \cancel{P_n}\ 1 + x + \dots + \frac{x\cdots(x+n-1)}{n!} + \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{(n+1)!}$$

$$= P_n(x) + \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{(n+1)!} = \frac{(x+1)\cdots(x+n)}{n!} + \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{(n+1)\,n!} = (x+1)\cdots + \dots$$

etc.

Ex. 68. On doit avoir $(x^2+mx+n)^2 - x^4 = \cancel{x^4} + m^2x^2 + n^2 + 2x^3m + 2x^2n + 2mnx \cancel{-x^4} =$

$$= 4P(x) = 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16 \iff$$

$$\begin{cases} 2m = 4 \\ m^2 + 2n = 12 \\ 2mn = 16 \\ n^2 = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} m = 2 \\ 2n = 8 \\ n = 4 \\ n^2 = 16 \end{cases} \qquad \begin{matrix} m = 2 \\ n = 4 \end{matrix}$$

$$\text{donc } 4P = (x^2 + 2x + 4)^2 - x^4$$

$$= (\cancel{x^2} + 2x + 4 - \cancel{x^2})(x^2 + 2x + 4 + x^2)$$

$$= (2x+4)(2x^2+2x+4) \implies P(x) = (x+2)(x^2+x+2)$$

Ex. 69. $P(x) = x^4 + 2x^2 + 9 = (ax^2 + bx + c)(a'x^2 + b'x + c')$

et on peut choisir $a = a' = 1$

$$= (x^2 + bx + c)(x^2 + b'x + c')$$

$$= x^4 + b'x^3 + c'x^2 + bx^3 + bb'x^2 + bc'x + cx^2 + cb'x + cc'$$

système en $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} b' + b = 0 \\ c' + bb' + c = 2 \\ bc' + cb' = 0 \\ cc' = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} b' = -b \\ c' - b^2 + c = 2 \\ bc' - bc = 0 \\ cc' = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} b' = -b \\ b(c'-c) = 0 \\ c' + c - b^2 = 2 \\ cc' = 9 \end{cases}$$

après qq manip. on trouve

$$\begin{cases} b = 2 \\ b' = -2 \\ c = c' = 3 \end{cases}$$

On a donc

$P(x) = (x^2+2x+3)(x^2-2x+3) = ((x^2+3)+2x)((x^2+3)-2x) = x^4+6x^2+9-4x^2$ ok.

Les deux facteurs sont deux polynômes avec des racines complexes $(\Delta = 4 - 12 < 0)$

donc pas de déc. en facteurs ~~de~~ degré 1 en $\mathbb{Q}[x]$.

Ex. 70. $(x^3+x^2-1)(x^2-x+1) = x^5 \cancel{-x^4} \cancel{+x^3} \cancel{+x^4} \cancel{-x^3} \cancel{+x^2} \cancel{-x^2} + x - 1$

$= x^5 + x - 1$

$x \rightsquigarrow -x$: $-x^5 - x - 1 = (-x^3+x^2-1)(x^2+x+1)$

soit $x^5+x+1 = (x^3-x^2+1)(x^2+x+1)$

ensuite on pose $x=10$ et on l'applique à 100009 e 100011.

Ex. 71.

$$(x+1)^{a+b} = (x+1)^a (x+1)^b$$

$$\sum_{j=0}^{a+b} \binom{a+b}{j} x^j = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^k \cdot \sum_{l=0}^{b} \binom{b}{l} x^l$$

on en déduit

coefficient de x^p : $\displaystyle\binom{a+b}{p} = \sum_{k+l=p} \binom{a}{k}\binom{b}{l}$

Ex. 72.

$$\begin{array}{l|l}
3x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 4x^2 + 0x + 1 & x^2+2x+3 \\
\hline
-3x^5 - 6x^4 - 9x^3 & 3x^3 - 6x^2 + 3x + 16 \\
\quad -6x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 0x + 1 & \\
\quad +6x^4 + 12x^3 + 18x^2 & \\
\qquad 3x^3 + 22x^2 + 0x + 1 & \\
\qquad -3x^3 - 6x^2 - 9x & \\
\qquad\quad +16x^2 - 9x + 1 & \\
\qquad\quad \mp 16x^2 \mp 48x \quad -48 & \\
\qquad\quad 21x - 47 &
\end{array}$$

donc $\underbrace{3x^5+4x^2+1}_{P_1(X)} = \underbrace{(x^2+2x+3)}_{P_2(X)}\underbrace{(3x^3-6x^2+3x+16)}_{Q(X)} + \underbrace{21X-47}_{R(X)}$

$\deg R < \deg P_2$

Même chose pour les autres.

Ex. 73.

$$
\begin{array}{l|l}
(*)\quad X^2 \quad -3iX \quad -5(1+i) & X - (-1+i) \\ \cline{2-2}
-X^2 - (-1+i)X & X + 1 - 4i \\ \cline{1-1}
\quad (1-4i)X - 5(1+i) & \\
\quad -(1-4i)X - (-1+4i+i+4) & \\ \cline{1-1}
\quad (-5+1-4)+i(-5-4-1) = -8-10i &
\end{array}
$$

donc $(*) = (X+1-4i)(X-1+i) \underbrace{-8-10i}_{R}$

Ex. 74. $X^{n}-1 = (X-1)(X^{n-1}+X^{n-2}+\dots+X+1)$

n impair $\quad X^n+1 = (X+1)(X^{n-1}-X^{n-2}+X^{n-3}+\dots+X+1)$

rappeler le th. de Ruffini

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & 1 & 0 & \dots & & & 0 & 1 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & -1 & & & -1 \\ \hline
 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & \cancel{\ }
\end{array}
$$

Ex. 75. On sait que

$(a \neq b)$ $\quad \begin{cases} P(X) = (X-a)\,Q_1(X)+1 \\ P(X) = Q_2(X)\,(X-b)-1 \end{cases}$ $\quad$ en particulier $\begin{cases} P(a)=1 \\ P(b)=-1 \end{cases}$

on écrit $\quad P(X) = (X-a)(X-b)\,Q_3(X) + R(X)$ $\quad$ avec $\quad R(X) = \alpha X+\beta$

$\deg R(X) < 2$

donc $\begin{cases} P(a) = R(a) = \alpha a+\beta = 1 \\ P(b) = \alpha b+\beta = -1 \end{cases}$

le système donne $\begin{cases} \alpha = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1\end{vmatrix}} = \dfrac{2}{a-b} \\[2ex] \beta = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1\end{vmatrix}} = \dfrac{-a-b}{a-b} \end{cases}$ $\quad$ donc $R(X) = \dfrac{2X-(a+b)}{a-b}$

Ex. 76. j'écris $\quad X^n+X+1 = (X-1)^2\,Q(X) + R(X)$ $\quad R(X) = aX+b$

$X^n+X+1 = (X-1)^2\,Q(X) + aX+b$. j'évalue en 1 :

$1+1+1 = a+b \quad \Rightarrow \quad a+b = 3$

l'autre information me vient en dérivant :

$nX^{n-1}+1 = 2(X-1)\,Q(X) + (X-1)^2\,Q'(X) + a$ $\quad$ et en évaluant en 1 :

$n+1 = a \quad \Rightarrow \quad a = n+1$ $\quad$ (traiter séparément les cas $n=0$, $n=1$)

$\begin{cases} a = n+1 \\ a+b = 3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a = n+1 \\ b = -n+2 \end{cases}$ $\quad \Rightarrow \quad R(X) = (n+1)X - n+2$.

Même chose pour les autres polynômes.

Ex. 77. On remarque que $(X-1)(X+5) = X^2+4X-5$, donc l'exercice est analogue au numéro 75.

Ex. 78. On effectue la division

$$\begin{array}{rl|l}
 & X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2 & X^2+2 \\
 & -X^4 \qquad\quad -2X^2 & \overline{X^2 + X + (a-2)} \\
\hline
/ & X^3 + (a-2)X^2 + bX + 2 & \\
 & -X^3 \qquad\qquad -2X & \\
\hline
/ & (a-2)X^2 + (b-2)X + 2 & \\
 & -(a-2)X^2 \qquad -2(a-2) & \\
\hline
/ & (b-2)X - 2a + 6 = R(X) &
\end{array}$$

X^2+2 divise $P(X) \Leftrightarrow R(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b-2 = 0 \\ -2a+6 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 2 \\ a = 3 \end{cases}$

Ex 79. P deg $P \leq 2$ t.q.

$P(1) = -2$, $P(-2) = 3$, $P(0) = -1$

$P(X) = aX^2 + bX + c$ $\quad \begin{array}{l} P(1) \\ P(-2) \\ P(0) \end{array} \begin{cases} a + b + c = -2 \\ 4a - 2b + c = 3 \\ c = -1 \end{cases}$ etc.

Ex. 80. $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$

$$\begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 0 \\ -a + b - c + d = -2 \\ 8a + 4b + 2c + d = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 1 \\ a + b + c = -1 \\ -a + b - c = -3 \\ 8a + 4b + 2c = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 1 \\ a + b + c = -1 \\ 2b = -4 \\ -4b - 6c = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 1 \\ b = -2 \\ c = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$P(X) = \frac{3}{2}X^3 - 2X^2 - \frac{1}{2}X + 1$ la solution est unique, donc c'est aussi celle de degré minimum.