

Ex. 91. $P(x) = x^4 + i x^3 - 3x^2 - 2i x + 1 - i \in \mathbb{C}[x]$.

9

Si α est racine réelle, alors

$$\alpha^4 + i \alpha^3 - 3\alpha^2 - 2i \alpha + 1 - i = 0$$

$$\underbrace{(\alpha^4 - 3\alpha^2 + 1)}_{\text{Re}} + i \underbrace{(\alpha^3 - 2\alpha - 1)}_{\text{Im}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^4 - 3\alpha^2 + 1 = 0 & P_1 \\ \alpha^3 - 2\alpha - 1 = 0 & P_2 \end{cases}$$

on observe que -1 est racine de P_2 : $-1 + 2 - 1 = 0$

$$\alpha_1 = -1$$

je fais la division :

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & & & \\ \hline & -1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & -1 \\ \hline & & & 0 \end{array}$$

$$\alpha^3 - 2\alpha - 1 = (\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha - 1)$$

$$\alpha_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

il suffit de vérifier si quelqueune de trois racines $\alpha_1 = -1$, $\alpha_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ est aussi racine de P_1 , et cela est un calcul direct.

Ex. 92. On montre que $P(2i) = 0$ par calcul direct :

$$32i - 6i \cdot 16 - 11 \cdot 8(-i) + 2i(-4) - 12 \cdot 2i + 8i = (32 - 96 + 88 - 8 - 24 + 8)i = 0$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & -6i & -11 & 2i & -12 & 8i \\ & 2i & 8 & -6i & +8 & -8i \\ \hline 1 & -4i & -3 & -4i & & -4 \\ & 2i & 4 & 2i & & 4 \\ \hline 1 & -2i & 1 & -2i & & \\ & 2i & 0 & 2i & & \\ \hline 1 & 0 & 1 & & & \end{array}$$

$\Rightarrow$ au moins multiplicité 2

mult. ≥ 3

le quotient est $x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$ donc

$2i$ a multiplicité 3 et $P(x) = (x+i)(x-i)(x-2i)^3$.

Ex. 93. Rem On a $(x+1)^5 - x^5 - 1 = \cancel{x^5} + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 - \cancel{x^5} - 1 =$

$$5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x = 5x(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)$$

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = x^3 + 1 + 2x(x+1) = (x+1)(x^2 - x + 1) + 2x(x+1) = (x+1)(x^2 + x + 1)$$

donc $P(x) = 5x(x+1)(x^2 + x + 1)$ multiple de $Q(x) = x^2 + x + 1$.

Ex. 94. $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$$\begin{aligned} Q(x^2) &= (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)(x^2 - \gamma^2) \\ &= (x+\alpha)(x-\alpha)(x+\beta)(x-\beta)(x+\gamma)(x-\gamma) \\ &= -P(x)P(-x) \end{aligned}$$

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma) = -P(-x)$$

$$\begin{aligned}
 &= - (x^3 - 2x^2 + 3x + 1)(-x^3 - 2x^2 - 3x + 1) \\
 &= - ((2x^2 + 1) + (x^3 + 3x))(-2x^2 + 1) - (x^3 + 3x) \\
 &= - (4x^4 - 4x^2 + 1 + x^6 + 6x^4 + 9x^2) = x^6 + 2x^4 + 13x^2 - 1 = Q(x^2)
 \end{aligned}$$

donc $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 13x - 1$.

Ex. 95. i) $f_1: \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$P \longmapsto \begin{pmatrix} P(3) \\ P'(2) \\ P(1) - P(2) \end{pmatrix}$$

Rappel: pour $a \in \mathbb{R}$, $P \longmapsto P(a)$, $(P \longmapsto P')$, $P \longmapsto P'(a)$ sont des applications linéaires $\mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$.

En outre, si φ_i , $i=1, \dots, n$ sont formes $V \longrightarrow \mathbb{K}$, alors

$$\begin{aligned}
 \varphi: V &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\
 v &\longmapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(v) \\ \varphi_2(v) \\ \vdots \\ \varphi_n(v) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

est une app. linéaire.

Donc f_1 est bien linéaire.

ker f_1 : les polynômes t.q.

$$\begin{cases} P(3) = 0 \\ P'(2) = 0 \\ P(1) - P(2) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{non-esp. lin. de dim infinie} \\ \text{fixons } n \geq 1 \end{array} \quad \begin{aligned} P_n(X) &= a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \\ P'_n(X) &= a_1 + 2a_2 X + \dots + na_n X^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_0 + 3a_1 + \dots + 3^n a_n = 0 \\ a_1 + 2a_2 \cdot 2 + \dots + na_n 2^{n-1} = 0 \\ a_0 + a_1 + \dots + a_n - (a_0 + a_1 \cdot 2 + \dots + a_n 2^n) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 + 3a_1 + \dots + 3^n a_n = 0 \\ a_1 + 2^2 a_2 + \dots + n \cdot 2^{n-1} a_n = 0 \\ -a_1 + 3a_2 - \dots - (2^n - 1)a_n = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & \dots & 3^n \\ 0 & 2 & 2 \cdot 2 & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & -1 & -3 & -(2^n - 1) \end{pmatrix} \quad \text{etc.}$$

image: $\mathbb{R}^3$, c.-à-d. f_1 surjective, en effet,

$$\begin{cases} P(3) = b_1 \\ P'(2) = b_2 \\ P(1) - P(2) = b_3 \end{cases}$$

je choisis $n=2$ et j'ai le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

qui a une unique solution, donc $\exists!$ un polynôme $a_0 + a_1 X + a_2 X^2$

en particulier, f_1 est un isomorphisme $\mathbb{R}[X]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$ l.q. $f_1(P) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$