$$f_2 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$$
$$P \longmapsto P-(X+2)P'$$

linéaire : $(P+Q) \longmapsto (P+Q)-(X+2)(P+Q)' = \underbrace{P-(X+2)P'}_{f_2(P)} + \underbrace{Q-(X+2)Q'}_{f_2(Q)}$

$$\lambda P \longmapsto \lambda P - (X+2)(\lambda P)' = \lambda P - (X+2)\lambda P' = \lambda f_2(P).$$

ker f_2 : fixons n :

$P(X) = a_0 + \dots + a_n X^n \qquad P'(X) = a_1 + \dots + a_n n X^{n-1}$

$f_2(P) = a_0 + \dots + a_n X^n - (X+2)(a_1 + 2a_2X + \dots + n a_n X^{n-1})$

$= (a_0 - 2a_1) + (a_1 - a_1 - 4a_2)X + (a_2 - 2a_2 - 6a_3)X^2 + \dots + (a_{n-1} - (n-1)a_{n-1} - 2na_n)X^{n-1} + (a_n - na_n)X^n$

$= (a_0 - 2a_1) + (-4a_2)X + (-a_2 - 6a_3)X^2 + \dots + ((-n+2)a_{n-1} - 2na_n)X^{n-1} + (-(n-1)a_n)X^n$

$$\begin{cases} a_0 - 2a_1 = 0 \\ -4a_2 = 0 \\ -a_2 - 6a_3 = 0 \\ \dots \\ -(n-2)a_{n-1} - 2a_n = 0 \\ -(n-1)a_n = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 - 2a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ \dots \\ a_n = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 2a_1 \\ a_2 = \dots = a_n = 0 \end{cases}$$

$P(X) \in \ker f_2 \iff P(X) = 2\lambda + \lambda X = \lambda(X+2) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

On peut aussi utiliser ~~[illegible]~~ une approche analytique, en résolvant l'équadiff $y - (x+2)y' = 0$.

Im f_2 : Soit $Q = b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n$. Alors le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \dots & & \\ & & -4 & & & \\ & & -1 & -6 & & \\ & & & -2 & -8 & \\ & & & & -3 & -10 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & -(n-2) & -2 \\ & & & & & -(n-1) \end{pmatrix} \begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{vmatrix}$$

a toujours des solutions donc $\exists P$ de deg n t.q. $f_2(P) = Q$ pour $n \geq 2$

pour $n=1$: $Q(X) = b_0 + b_1 X$

$(a_0 + a_1X) - (X+2)(a_1) = b_0 + b_1 X \iff (a_0 - 2a_1) + (a_1 - a_1)X = b_0 + b_1 X \iff$

$a_0 - 2a_1 = b_0 + b_1 X$ impossible, il faut prendre p. ex.

$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et j'obtiens (une infinité de) solutions.

En tout cas, f_2 est surjective.

3. l'application dérivée :

$$f_3 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$$
$$P \longmapsto P'$$

linéaire : bien connu.

ker f_3 : $f_3(P) = 0 \iff P(x) = d \in \mathbb{R}$

(on accepte le théorème bien connu ~~de~~ de l'analyse soit on le vérifie à la main)

$\mathrm{Im} f_3 = \mathbb{R}[X]$: tout polynôme a une primitive $\int P(x)\,dx$, qui est aussi un polynôme

4. $$f_4 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$$
$$P \longmapsto Q(x) = b + \int_a^x P(t)\,dt$$

f_4 n'est pas linéaire, au général $f_4(P+Q) \neq f_4(P) + f_4(Q)$, p. ex.

$P_1 = X$ et $P_2 = X^2$ $\quad a = 0 \quad b = 1$

$$P_1 \mapsto \frac{X^2}{2} + 1 \qquad P_2 \mapsto \frac{X^3}{3} + 1$$

mais si $b = 0$ alors f_4 est linéaire

$P \longmapsto \int_a^x P(t)\,dt$ ker f_4 : comme $\deg \int_a^x P(t)\,dt = \deg P + 1$,

$f_4(P) = 0 \iff P = 0$.

Im f_4 : si $Q \in \mathbb{R}[X]$, ~~Q ... t.q.~~ $\cancel{\int_a^x Q(t)\,dt}$

je cherche P t.q. $\int_a^x P(t)\,dt = Q(x)$: on doit avoir $Q(a) = 0$

si $Q(a) \neq 0 \Rightarrow Q \notin \mathrm{Im} f_4$.

si $Q(a) = 0$ $\quad P(x) = Q'(x)$ est t.q. $\int_a^x Q'(t)\,dt = Q(x)$.

Ex. 96. $\mathbb{R}_2[X]$ = polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de $\deg \leq 2$. $\quad \dim \mathbb{R}_2[X] = 3$

base de $\mathbb{R}_2[X]$: $1, X, X^2$

on a $\underset{P_1}{1} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(1+X)^2 = \underset{P_2}{1 + 2X + X^2} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(1-X)^2 = \underset{P_3}{1 - 2X + X^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cette matrice est inversible, donc P_1, P_2, P_3 sont une autre base de $\mathbb{R}_2[X]$

Ex. 97. $V = \{P \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $P''(1) = P(0) - 2P(1) + P(2)\}$

i) $V \leq \mathbb{R}[X]$: $0 \in V$, $P+Q \in V$ et $\lambda P \in V$ se vérifient aisément.

ii) $1 \in V$: $0 = 1 - 2 + 1$ ok $\Rightarrow \mathbb{R}[X]_0 \subseteq V$

$X \in V$: $0 = 0 - 2 + 2 = 0$ $\Rightarrow \langle 1, X\rangle = \mathbb{R}[X]_1 \subseteq V$.

$X^2 \in V$? $2 = 0 - 2 + 4 = 2$ ok $\Rightarrow \langle 1, X, X^2\rangle = \mathbb{R}[X]_2 \subseteq V$.

$X^3 \in V$? $6 = 0 - 2 + 8 = 6$ ok $\Rightarrow \langle 1, X, X^2, X^3\rangle = \mathbb{R}[X]_3 \subseteq V$.

$X^4 \in V$? $12 = 0 - 2 + 16 = 14$ NON $\Rightarrow \mathbb{R}[X]_4 \not\subseteq V$.

X^n, $n > 4$: $(X^n)'' = (nX^{n-1})' = n(n-1)X^{n-2}$

$n(n-1) = 0 - 2 + 2^n = 2^n - 2$ pas de sol. pour $n > 4$.

en tout cas $\mathbb{R}[X]_4 \not\subseteq V$. Il reste à voir si $V = \mathbb{R}[X]_3$:

en fait non, car p. ex. soit

$P(X) = a\cancel{X}^m + bX^n$ $m, n \geq 4$, $m \neq n$

$P'(X) = am\,X^{m-1} + bn\,X^{n-1}$

$P''(X) = am(m-1)X^{m-2} + bn(n-1)X^{n-2}$

$P \in V \Leftrightarrow am(m-1) + bn(n-1) = 0 - 2(a+b) + (a2^m + b2^n)$

$a(m(m-1) + 2 - 2^m) + b(n(n-1) + 2 - 2^n) = 0$

p. ex. $a = (n(n-1) + 2 - 2^n)$ et $b = -(m(m-1) + 2 - 2^m)$

donc p. ex. $m = 4$, $n = 5$

$P(X) = (5\cdot 4 + 2 - 2^5)X^4 - (4\cdot 3 + 2 - 2^4)X^5 = 2X^5 - 10X^4 \in V$,

~~dom~~ par conséquent $V \neq \mathbb{R}[X]_4$, de plus, $V \neq \mathbb{R}[X]_d$ $\forall d$.

Ex. 98. i) $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ $\forall k$, $\deg P_k = k \Rightarrow \mathcal{B}$ base car la matrice de $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}[X]_n$ est triangulaire supérieure avec termes diag non nulles.

ii) $E_k = X^k(1-X)^{n-k}$

$$M_{\varepsilon,\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & * & & 1 & & \\ & & & -2 & 1 & \\ & & & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_n = X^n$

$E_{n-1} = X^{n-1}(1-X) = X^{n-1} - X^n$

$E_{n-2} = X^{n-2}(1-X)^2 = X^{n-2} - 2X^{n-1} + X^n$

cette fois, la matrice de passage est triangulaire inférieure, avec termes diagonaux non nuls $\Rightarrow$ base.

iii) $a_0, \dots, a_n$ éléments distincts de $\mathbb{R}$

Polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$L_k(X) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$

$$= \frac{(X-a_0) \cdots (X-a_{k-1})(X-a_{k+1}) \cdots (X-a_n)}{(a_k-a_0) \cdots (a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1}) \cdots (a_k-a_n)}$$

On remarque que $H_k(a_k) = 1$, $H_k(a_j) = 0$ si $j \neq k$, donc $H_k(a_j) = \delta_{jk}$.

alors on montre que les L_k sont indép :

soit $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i H_i = 0$. éval. en ~~Xa~~ $x = a_j$

$$0 = \sum_{\cancel{k}i=0}^{n} \lambda_i H_i(a_j) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j \Rightarrow \lambda_j = 0 \quad \forall j.$$

$\Rightarrow$ base de $\mathbb{R}[X]_n$

Soit $P(x) \in \mathbb{R}[X]_n \Rightarrow P(X) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i H_i$

éval. en $X = a_j$: $P(a_j) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i H_i(a_j) = \cancel{Pf}\ \lambda_j \Rightarrow \boxed{P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) H_i(X)}$.

Ex. 99. i) Soit $P(X) = \text{pgcd}(A,B) \Rightarrow P \mid A,\ P \mid B \Rightarrow P \mid A+B,\ P \mid AB \Rightarrow$

$\Rightarrow P \mid \cancel{A+}\ \text{pgcd}(A+B, AB) \Rightarrow$ si $\text{pgcd}(A+B, AB) = 1$ alors $\text{pgcd}(A,B) = 1$.

Vice-versa : ~~soit~~ ~~(X-α) | pgcd~~ si $\text{pgcd}(A,B) = 1$ en $\mathbb{C}[X]$, alors A et B n'ont aucune racine en commun. Si $\text{pgcd}(A+B, AB) \neq 1$, alors $A+B$, AB ont une racine en commun en $\mathbb{C}$, soit α. ~~⇒~~ Sans perte de généralité, $A(\alpha) = 0$

$A(\alpha) = 0$, $B(\alpha) \neq 0 \Rightarrow (A+B)(\alpha) \neq 0$ NON

$A(\alpha) \neq 0$, $B(\alpha) = 0 \Rightarrow (A+B)(\alpha) = 0$ mais $A(\alpha) = 0 = B(\alpha) \Rightarrow \text{pgcd}(A,B) \neq 1$. absurde.

~~$A(\alpha) =$~~

ii) Sûrement $\text{pgcd}(A,B) \mid \text{pgcd}(A+B, AB)$ mais en général $\neq$.

ex. $A(X) = (X-1)(X-2) \qquad B(X) = X(X-1)$

$\text{pgcd}(A,B) = X-1$

$$\text{pgcd}(A+B, AB) = \text{pgcd}\big((X-1)(X-2+X),\ (X-1)^2 X(X-2)\big)$$
$$= \text{pgcd}\big((X-1)(2X-2),\ X(X-1)^2(X-2)\big)$$
$$= \text{pgcd}\big(2(X-1)^2,\ X(X-1)^2(X-2)\big) = (X-1)^2.$$

iii) oui, iv) oui avec la factorisation unique ou directement avec la définition

v) (polynômes non nuls) $\dfrac{AB}{\text{pgcd}(A,B)} = \text{ppcm}(A,B)$

Ex. 100

i) En $\mathbb{C}[X]$; si α racine de $\operatorname{pgcd}(P,Q) \Rightarrow (x-\alpha) \mid \operatorname{pgcd}(P,Q) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-\alpha) \mid P,\ (x-\alpha) \mid Q \Rightarrow P(\alpha) = Q(\alpha) = 0.$

Vice-versa : si $P(\alpha) = Q(\alpha) = 0$ alors comme $\operatorname{pgcd}(P,Q) = A(x)P(x) + B(x)Q(x)$,

on a $\operatorname{pgcd}(P,Q)(\alpha) = 0$

ii) $P(x) = x^6 + x^4 = x^4(x^2+1) = x^4(x+i)(x-i)$ donc racines : 0 (avec multip. 4), i et $-i$.

iii) il suffit de vérifier que les racines de P ne sont pas racines de Q :

$Q(0) = 1$, $Q(i) = i^{25} - i + 1 = i - i + 1 = 1$, $Q(-i) = -i + i + 1 = 1$.

$\Rightarrow (P,Q) = 1.$

Ex. 101. Fait général : $\operatorname{pgcd}(P,P')$, $P \in \mathbb{R}[X]$

$P(x) = \prod_{j=1}^{n} (x-\alpha_j)^{m_j}$ en $\mathbb{C}[X]$ $\quad \alpha_i \neq \alpha_j$

$$P'(x) = \sum_{j=1}^{n} m_j (x-\alpha_j)^{m_j-1} \prod_{k\neq j} (x-\alpha_k)^{m_k}$$

$\operatorname{pgcd}(P,P')$:

soit $Q(x) = \prod_{j=1}^{n} (x-\alpha_j)^{m_j-1}$ alors $Q(x) \mid P, P' \Rightarrow Q(x) \mid \operatorname{pgcd}(P,P')$.

et si $(x-\alpha_j)^{m_j} \mid \operatorname{pgcd}(P,P')$

$$\Rightarrow (x-\alpha_j)^{m_j} \mid P'(x) = m_j (x-\alpha_j)^{m_j-1} \prod_{k\neq j} (x-\alpha_k)^{m_k} + \underbrace{\sum_{i\neq j} m_i (x-\alpha_i)^{m_i-1} \prod_{k\neq i} (x-\alpha_k)^{m_k}}_{(x-\alpha_j)^{m_j}}$$

$\Rightarrow$ on aurait $(x-\alpha_j)^{m_j} \mid (x-\alpha_j)^{m_j-1} \prod_{k\neq j} (x-\alpha_k)^{m_k}$ $\lightning$

donc $\boxed{\operatorname{pgcd}(P,P') = \prod_{j=1}^{n} (x-\alpha_j)^{m_j-1}}$

$\deg P = \sum m_j$

$\deg P' = \left(\sum m_j\right) - 1$ $\quad$ en gén. P' a d'autres racines

$\deg(\operatorname{pgcd}) = \sum (m_j - 1) = \deg P - n$.

si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\operatorname{pgcd}_{\mathbb{R}}(P,Q) = \operatorname{pgcd}_{\mathbb{C}}(P,Q)$

Remarque : $\operatorname{pgcd}(P,P') \in \mathbb{R}[X]$. En général, si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\operatorname{pgcd}_{\mathbb{R}}(P,Q) = \operatorname{pgcd}_{\mathbb{C}}(P,Q)$ (algorithme d'Euclide).

les racines communes à P et P' sont les racines de P qui ont multiplicité ≥ 2.

Ceci dit, on calcule le pgcd de B

$P = 2x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 4x + 1$

$P' = 10x^4 + 20x^3 + 24x^2 + 14x + 4$

avec l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{l|l}
2x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 4x + 1 & 10x^4 + 20x^3 + 24x^2 + 14x + 4 \\
-2x^5 - 4x^4 - \frac{24}{5}x^3 - \frac{14}{5}x^2 - \frac{4}{5}x & \hline \\
\hline
\quad x^4 + \frac{16}{5}x^3 + \frac{21}{5}x^2 + \frac{16}{5}x + 1 & \frac{1}{5}x + \frac{1}{10} \\
\quad -x^4 - 2x^3 - \frac{12}{5}x^2 - \frac{7}{5}x - \frac{2}{5} & \\
\hline
\quad \frac{6}{5}x^3 + \frac{9}{5}x^2 + \frac{9}{5}x + \frac{3}{5} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
10x^4 + 20x^3 + 24x^2 + 14x + 4 & \frac{6}{5}x^3 + \frac{9}{5}x^2 + \frac{9}{5}x + \frac{3}{5} \\
-10x^4 - 15x^3 - 15x^2 - 5x & \hline \\
\hline
\quad 5x^3 + 9x^2 + 9x + 4 & \frac{25}{3}x + \frac{25}{6} \\
\quad -5x^3 - \frac{15}{2}x^2 - \frac{15}{2}x - \frac{5}{2} & \\
\hline
\quad \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
\frac{6}{5}x^3 + \frac{9}{5}x^2 + \frac{9}{5}x + \frac{3}{5} & \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \\
-\frac{6}{5}x^3 - \frac{6}{5}x^2 - \frac{6}{5} & \hline \\
\hline
\quad \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{3}{5} & \frac{4}{5}x + \frac{2}{5} \\
\quad -\frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{3}{5} & \\
\hline
\end{array}$$

$\Longrightarrow$ $X^2 + X + 1$ est le pgcd(P, P').

les racines communes à P et P' sont les racines de X^2+X+1

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, avec multiplicité 1 pour P' et 2 pour P.

$\Longrightarrow$ $(x^2+x+1)^2 \mid P$

il reste à déterminer la 5ème racine :

$= x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

$$\begin{array}{l|l}
2x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 4x + 1 & x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\
-2x^5 - 4x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 2x & \hline \\
\hline
\quad x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 & 2x + 1
\end{array}$$

donc $P(x) = (2x+1)(x^2+x+1)^2$ et la 5ème racine est $-\frac{1}{2}$.