

Ex. 102.

Faits à rappeler :

Règle de Ruffini

17

si $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$ et $\alpha = \frac{p}{q}$ racine, $(p, q) = 1$ alors $p \mid a_0$, $q \mid a_n$

$$P(x) = x^3 - 12x + 16 \quad P(2) = 0$$

	1	0	-12	16
2		2	4	-16
	1	2	-8	0

$$(x-2)(x^2+2x-8)$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3 = \begin{matrix} -4 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow P(x) = (x+4)(x-2)^2$$

$$Q(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$$

$$Q(1) = 0$$

$$Q(x) = (x-1)(x^3 + x^2 - 5x + 3)$$

$$= (x-1)^2(x^2 + 2x - 3)$$

$$= (x-1)^3(x+3)$$

	1	0	-6	8	-3
1		1	1	-5	3
	1	1	-5	3	0
1		1	2	-3	0
	1	1	2	-3	0
1		1	3	0	0
	1	1	3	0	0

$$\Rightarrow \text{pgcd}(P, Q) = 1, \text{ ppcm}(P, Q) = PQ$$

Ex. 103 1) $P(x) = x^2 + x + 1$

$$\text{on observe que } (x^2 + x + 1)(x-1) = x^3 - 1$$

$$\text{donc } P(x) \mid x^n - 1 \Leftrightarrow x^3 - 1 \mid x^n - 1$$

$\Leftrightarrow$ les racines de $x^3 - 1$ ($\alpha_1 = 1$, α_2 et α_3 complexes conjuguées) sont aussi racines de $x^n - 1$. $\alpha_1 = 1$ est toujours racine des deux ok.

$$\text{Soit } \alpha \text{ t.q. } \alpha^3 = 1. \text{ Alors } \alpha^n = 1 \Leftrightarrow 3 \mid n :$$

$$\text{si } n = 3k \Rightarrow \alpha^n - 1 = \alpha^{3k} - 1 = (\alpha^3)^k - 1 = 1^k - 1 = 0$$

et pour

$$\text{si } n = 3k + r \Rightarrow \alpha^n - 1 = \alpha^{3k+r} - 1 = \alpha^r - 1 \neq 0 \text{ comme on peut vérifier directement.}$$

$$r = 1, 2$$

2) On calcule le reste R de la division par $x^2 + x + 1$ et on impose $R(x) = 0$

(tournez)

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x + 1 & x^2 + ax + 1 \\
 -x^4 - ax^2 - x^2 & \\
 \hline
 -ax^2 + 2x^2 + 0x + 1 & \\
 + ax^2 + a^2x^2 + ax & \\
 \hline
 (a^2+1)x^2 + ax + 1 & \\
 - (a^2+1)x^2 - a(a^2+1)x - (a^2+1) & \\
 \hline
 (-a^2-a)x + (-a^2-1) &
 \end{array}$$

ala donne

$$\begin{cases} -a^3 - a = 0 \\ -a^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a(a^2+1) = 0 \\ a^2+1 = 0 \end{cases} \quad a = \pm i$$

→ les polynômes sont $x^2 \pm i x + 1$.

Ex. 104. 1) $P(x) = x^3 - 3x + d$ $P'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$
 si P a une racine double, celle-ci est ± 1 , et si $P(1) = P'(1) = 0$ alors $\text{mult}(1) \geq 2$

$$P(1) = 1 - 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 2 \quad P_2(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$P(-1) = -1 + 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2 \quad P_{-2}(x) = x^3 - 3x - 2$$

Dans les deux cas, la multiplicité est exactement 2 (vérification facile).
 de la racine ± 1

2) $A(x) = x^3 + p x + q$: si A a une racine multiple, alors

$$A(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta) \quad \text{ou} \quad A(x) = (x-\alpha)^3$$

il y a plusieurs façons de résoudre l'ex: p. ex.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 0x^2 + px + q & x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 \\
 -x^3 + 2\alpha x^2 - \alpha^2 x & \\
 \hline
 2\alpha x + (p - \alpha^2)x + q & \\
 -2\alpha x + 4\alpha^2 x - 2\alpha^3 & \\
 \hline
 (p - \alpha^2 + 4\alpha^2)x + (q - 2\alpha^3) &
 \end{array}$$

$$R(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p + 3\alpha^2 = 0 \\ q - 2\alpha^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -3\alpha^2 \\ q = 2\alpha^3 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \\ p = -3\left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow p^3 = -27 \frac{q^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow -4p^3 - 27q^2 = 0$$

discriminant = 0

dans ce cas

$$A(x) = (x-\alpha)^2(x+2\alpha)$$

et A a une racine triple $\Leftrightarrow$

$$\alpha = -2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$\text{donc } A(x) = (x-\alpha)^3 = x^3$$

Autre façon: $A'(x) = 3x^2 + p$

$$= 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm \sqrt{\frac{-p}{3}}$$

et on impose α racine de A .