Ex. 108.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & -2x^2 & +10x & -7 & x^4-2x^3-3x^2+13x-10 \\
-x^4 & +2x^3 & +3x^2 & -13x & +10 & \hline 1 \\
\hline
/ & / & x^2 & -3x & +3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & -3x^2 & +13x & -10 & x^2-3x+3 \\
-x^4 & +3x^3 & -3x^2 & & & \hline x^2+x-3 \\
\hline
/ & x^3 & -6x^2 & +13x & -10 & \\
 & -x^3 & +3x^2 & -3x & & \\
\hline
 & / & -3x^2 & +10x & -10 & \\
 & & 3x^2 & -9x & +9 & \\
\hline
 & & / & x & -1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|l}
x^2 & -3x & +3 & x-1 \\
-x^2 & +x & & \hline x-2 \\
\hline
/ & -2x & +3 & \\
 & +2x & -2 & \\
\hline
 & / & 1 &
\end{array}
$$

$\text{pgcd}(A,B)=1$

on a : $A = 1\cdot \overset{B}{(x^4-2x^3-3x^2+13x-10)} + (x^2-3x+3)$

$B = (x^2+x-3)(x^2-3x+3) + (x-1)$

$(x^2-3x+3) = (x-2)(x-1)+1$

en remontant :

$$
\begin{aligned}
1 &= (x^2-3x+3) - (x-2)(x-1) \\
&= (x^2-3x+3) - (x-2)\left(B-(x^2+x-3)(x^2-3x+3)\right) \\
&= (x^2-3x+3)\left(1+(x-2)(x^2+x-3)\right) - (x-2)B \\
&= (A-1\cdot B)\left(1+x^3+x^2-3x-2x^2-2x+6\right) - B(x-2) \\
&= A(x^3-x^2-5x+7) + B(-x^3+x^2+5x-7-x+2) \\
&= A\underbrace{(x^3-x^2-5x+7)}_{U} + B\underbrace{(-x^3+x^2+4x-5)}_{V}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
(*) \\ \\ (**)
\end{array}
\left\{
\begin{array}{ll}
P \equiv \underbrace{x^2+3x+5}_{R_1} & \text{mod } A \\ \\
P \equiv \underbrace{2x^2-3}_{R_2} & \text{mod } B
\end{array}
\right.
$$

$\boxed{(A,B)=1 \Rightarrow \text{sol. unique mod } AB.}$

$P = R_1 + Q_1 A$ dans $(**)$: $R_1 + Q_1 A = R_2 + Q_2 B$

$\boxed{Q_1 A + Q_2 B = R_2 - R_1}$ or $AU+BV=1 \Rightarrow A\underbrace{U(R_2-R_1)}_{Q_1} + B\underbrace{V(R_2-R_1)}_{-Q_2} = R_2-R_1$

donc $Q_1 = U(R_2-R_1)$ est solution

$\Rightarrow P = R_1 + Q_1 A = U(R_2-R_1)A + R_1$

$= x^9 - 6x^8 - 4x^7 + 68x^6 - 68x^5 - 226x^4 + 444x^3 + 93x^2 - 690x + 397$

mais ce n'est ~~pour~~ pas le polynôme de deg minimal.

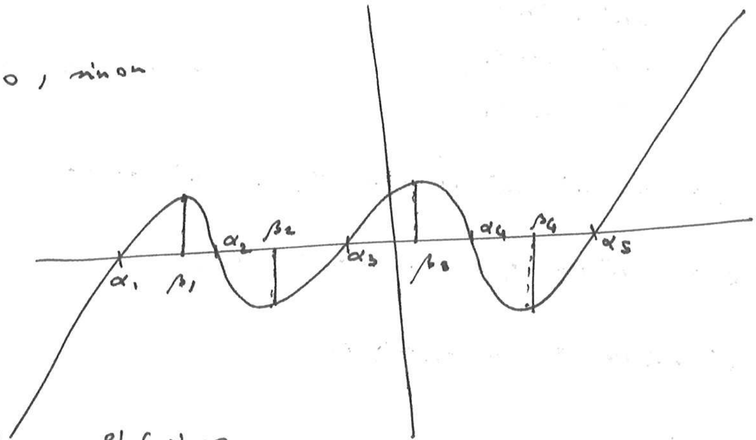
le polynôme de degré minimal est (à justifier)
le reste de P par AB, soit

$$P_1 = -11x^7 + 33x^6 + 55x^5 - 318x^4 + 229x^3 + 626x^2 - 1142x + 537$$ (th. ch. du reste)

~~Observation: si on a trouvé Q_1, Q_2 t.q.~~
~~$Q_1A - Q_2B = R_2 - R_1$, tous les Q_1, Q_2 sont donnés par~~.

Ex. 109. $P \in \mathbb{R}[X]$ n racines réelles distinctes $n \geq 1$

WTS: $P' \in \mathbb{R}[X]$ $n-1$ racines réelles distinctes.



Tout d'abord, si $P(\alpha) = 0 \Rightarrow P'(\alpha) \neq 0$, sinon (*)
P aurait racines multiples

$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$

P continue, $\mathcal{C}^\infty$,

$P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = 0 \Rightarrow$

Th. Rolle: $\exists\ \beta_1,\ \beta_1 \in [\alpha_1, \alpha_2]$ t.q. $P'(\beta_1) = 0$

on a $\beta_1 \neq \alpha_1$, $\beta_1 \neq \alpha_2$ par (*) donc $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2$. Etc.

On trouve ainsi $n-1$ racines réelles distinctes $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \beta_{n-1} < \alpha_n$.

Comme P' a degré $n-1$, elles sont ~~toutes~~ exactement les racines de P'.

Soit maintenant $Q(x) = P^2(x) + 1$:
les racines de Q sont complexes non réelles: en effet, si
$Q(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, alors $(P(\alpha))^2 = -1$ mais si $\alpha \in \mathbb{R}$, $(P(\alpha))^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

de plus
$(P^2+1)' = 2PP'$ et $\gcd(~~P^2+1~~\ Q, Q') = \gcd(P^2+1, 2PP') = 1$.

racines non réelles — racines réelles

donc P^2+1 n'a pas de racine multiple.

En général, on peut prouver que:
si $P \in \mathbb{R}[X]$ a n racines réelles (pas forcément distinctes) alors P' a $n-1$ racines réelles (pas forcém. distinctes) et de plus, les racines de P' sont les sommes barycentriques des racines de P (voir dessous).

Dém. Soit $P = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)$ $\alpha_j \in \mathbb{R}$ pas nécess. distincts

$$P'(x) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{k \neq j} (x - \alpha_k)$$

je considère $$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \dots + \frac{1}{x-\alpha_n}$$

Soit β racine de P' :

- soit $P(\beta) = 0 \Rightarrow \beta \in \mathbb{R}$ ok.
- soit $P(\beta) \neq 0$: dans ce cas,

$$0 = \frac{P'(\beta)}{P(\beta)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta-\alpha_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{\beta-\alpha_j}}{|\beta-\alpha_j|^2} = \overline{\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta-\alpha_j}{|\beta-\alpha_j|^2}}$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta-\alpha_j}{|\beta-\alpha_j|^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta}{|\beta-\alpha_j|^2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{|\beta-\alpha_j|^2}$$

$$\Rightarrow \beta \sum \frac{1}{|\beta-\alpha_j|^2} = \sum \frac{\alpha_j}{|\beta-\alpha_j|^2}$$ c-à-d

$$\beta = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{|\beta-\alpha_j|^2}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|\beta-\alpha_j|^2}} = \frac{\sum_j d_j \alpha_j}{\sum_j d_j}$$

où les $d_j, \alpha_j \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \beta \in \mathbb{R}$ et β est une somme barycentrique des α_j.

<u>Remarque</u> : ces résultats sont faux en corps autres que $\mathbb{R}$:

<u>p. ex. en $\mathbb{Q}$</u> :

$P(X) = X^3 - 9X \in \mathbb{Q}[X]$: racines de P : $X(X^2-3)$ donc $0, \pm 3 \in \mathbb{Q}$.

$P'(X) = 3X^2 - 9$ racines de P' : $3(X^2-3)$ donc $\pm\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

(Toutefois, le résultat sur la multiplicité est encore vrai, évidemment, si on passe à $\mathbb{R}$).

<u>en $\mathbb{C}$</u> :

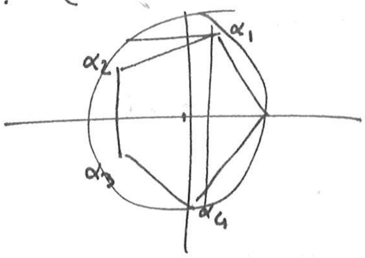
$P(X) = \frac{X^3}{3} - iX^2 - X \in \mathbb{C}[X]$ a trois racines simples en $\mathbb{C}$, mais

$P'(X) = X^2 - 2iX - 1 = (X-i)^2$ a une racine double en $\mathbb{C}$.

<u>Ex. 110.</u> $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = \frac{X^5-1}{X-1}$

donc ses racines sont $\alpha_k = e^{\frac{2\pi i}{5}k} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}k\right)$, $k=1,\dots,4$. (Racines 5èmes de l'unité)

$\Rightarrow$ en $\mathbb{C}[X]$ $P(X) = \prod_{k=1}^{4} (X-\alpha_k)$.



pour la factorisation en $\mathbb{R}[X]$, on observe que

$\overline{\alpha_2} = \alpha_3$ et $\alpha_4 = \overline{\alpha_1}$ donc

$$P(X) = \underbrace{(X-\alpha_1)(X-\alpha_4)}(X-\alpha_2)(X-\alpha_3) = \left(X^2 - (\alpha_1+\alpha_4)X + \alpha_1\alpha_4\right)\left(X^2 - (\alpha_1+\alpha_3)X + \alpha_1\alpha_3\right) =$$

$$= \underbrace{\left(X^2 - 2\cos\left(\tfrac{2\pi}{5}\right)X + 1\right)}_{P_1}\underbrace{\left(X^2 - 2\cos\left(\tfrac{4\pi}{5}\right)X + 1\right)}_{P_2} = \left(X^2 - \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)X + 1\right)\left(X^2 - \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)X + 1\right)$$

P_1 et P_2 sont évidemment irréd. sur $\mathbb{R}[X]$ parce que ils sont racines complexes non réelles.

Par contre, P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$:

$P = Q_1 Q_2$ ~~deg~~ deg $Q_1 = 1$ deg $Q_2 = 3$ impossible (pas de racine réelle)

$P = Q_1 Q_2$ deg $Q_1 = 2 =$ deg Q_2 ? Lemme de Gauss $\Leftrightarrow$ irréductible en $\mathbb{Z}[X]$

$$X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d) \qquad a, b, c, d \in \cancel{\mathbb{Q}}\ \mathbb{Z}$$

$$= X^4 + cX^3 + dX^2 + aX^3 + acX^2 + adX + bX^2 + bcX + bd$$

$$\begin{array}{l} X^4 \\ X^3 \\ X^2 \\ X \\ 1 \end{array}\left\{\begin{array}{l} 1 = 1 \\ 1 = c + a \\ 1 = d + ac + b \\ 1 = ad + bc \\ 1 = bd \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} a = 1 - c \\ 1 = d + c - c^2 + b \\ 1 = d - dc + bc \\ 1 = bd \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 - c \\ b = d = 1 \\ 1 = 1 + c - c^2 + 1 \\ 1 = 1 - c + c \end{array}\right. \qquad c^2 - c - 1 = 0 \text{ pas de sol. en } \mathbb{Z}.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 - c \\ b = d = -1 \\ 1 = -1 + c - c^2 - 1 \\ 1 = -1 + c - c \end{array}\right. \Rightarrow \text{impossible}$$

on conclut que $P(X)$ est irréductible en $\mathbb{Z}[X]$

$\Rightarrow$ $P(X)$ irréductible en $\mathbb{Q}[X]$.

Ex. III. Facile

$X^3 - X^2 + 2X + 4$:

-1 : $-1 - 1 - 2 + 4 = 0$

	1	-1	2	4
-1		-1	2	-4
	1	-2	4	/

$(X+1)(X^2 - 2X + 4)$ = ~~$(X+1)(X-2)^2$~~

fact. en $\mathbb{R}$.

$X = 1 \pm \sqrt{1 - 4} = 1 \pm \sqrt{3}\,i = \alpha_{1,2}$

factorisation en $\mathbb{C}$:

$(X+1)(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$

$X^3 - 7X^2 + 19X - 13$ racine : 1

	1	-7	19	-13
1		1	-6	13
	1	-6	+13	/

$(X-1)(X^2 - 6X + 13)$ fact. en $\mathbb{R}$, car

$X = 3 \pm \sqrt{9 - 13} = 3 \pm 2i$

$\Rightarrow$ $X^2 - 6X + 13$ irréd. en $\mathbb{R}[X]$.

fact. en $\mathbb{C}[X]$

$(X-1)(X - (3 - 2i))(X - (3 + 2i))$

Ex. 112.

$P_\lambda(x) = x^3 - 7x + \lambda$ on veut $P_\lambda(\alpha) = 0 = P_\lambda(2\alpha)$

$\alpha^3 - 7\alpha + \lambda = 0 = 8\alpha^3 - 14\alpha + \lambda$

$7\alpha^3 - 7\alpha = 0$ $7(\alpha^2 - 1)\alpha = 0$

$\alpha = 0$

$\alpha = 1$

$\alpha = -1$

on a trois candidats pour α :

$\alpha = 0$ racine $\Leftrightarrow$ $P_\lambda(\alpha) = \lambda = 0$

$P_0(x) = x^3 - 7x = (x^2 - 7)x$ <u>NON</u>, car 0 n'est pas racine double.

$\alpha = 1$ racine $\Leftrightarrow$ $P_\lambda(1) = 1 - 7 + \lambda = 0$ $\Leftrightarrow$ $\lambda = 6$

$P_6(x) = x^3 - 7x + 6$ et on a $P(1) = 0$, $P(2) = 8 - 14 + 6 = 0$ ✓

$\alpha = -1$ racine $\Leftrightarrow$ $P_\lambda(-1) = -1 + 7 + \lambda = 0$ $\Leftrightarrow$ $\lambda = -6$

$P_{-6}(x) = x^3 - 7x - 6$ $P_{-6}(-1) = 0$

$P_{-6}(-2) = -8 + 14 - 6 = 0$ ✓

<u>conclusion</u> $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.