

Ex. 99. (iii) $\boxed{C \text{ pgcd}(A, B) = \text{pgcd}(AC, BC)}$ si A, B, C unitaires, à une constante près, s'ils ne le sont pas.

i.) Avec la factorisation unique :

$$A(x) = \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j)^{a_j} \quad B(x) = \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j)^{b_j} \quad C(x) = \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j)^{c_j}$$

$$a_j, b_j, c_j \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{alors } \text{pgcd}(AC, BC) &= \text{pgcd}\left(\prod_{j=1}^n (x - \alpha_j)^{a_j + c_j}, \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j)^{b_j + c_j}\right) = \\ &= \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j)^{\min(a_j + c_j, b_j + c_j)} = \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j)^{c_j} \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j)^{\min(a_j, b_j)} = \\ &= C(x) \text{pgcd}(A, B). \end{aligned}$$

ii.) Avec la relation de Bézout :

soit $P = \text{pgcd}(A, B)$. Alors $A = A_1 P$, $B = B_1 P$ ~~avec $\text{pgcd}(A_1, B_1) = 1$~~

$$\text{donc } AC = A_1 PC, \quad BC = B_1 PC$$

$$\Rightarrow PC \mid AC, \quad PC \mid BC \Rightarrow PC \mid \text{pgcd}(AC, BC).$$

dans l'autre sens, on écrit $P = AU + BV$ donc $PC = AUC + BVC$ (Bézout)

Soit Q t.q. $Q \mid AC, Q \mid BC \Rightarrow$ alors $Q \mid PC$, en particulier

(en prenant $Q = \text{pgcd}(AC, BC)$) on a ~~$Q \mid PC$~~ $\text{pgcd}(AC, BC) \mid PC$ d'où l'égalité.

iii.) Avec la simple définition de pgcd :

on montre $PC \mid \text{pgcd}(AC, BC)$ comme en (i).

Donc $\text{pgcd}(AC, BC) = DPC$. On a alors

$$\begin{cases} DPC \mid AC \\ DPC \mid BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AC = DPC E \\ BC = DPC F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = DPE \\ B = DPF \end{cases} \quad (C \neq 0)$$

$$\Rightarrow DP \mid A \text{ et } DP \mid B \Rightarrow DP \mid P \text{ car } P = \text{pgcd}(A, B)$$

donc nécessairement $D = 1$, et $\text{pgcd}(AC, BC) = PC$.