DST 2013, corrigé

Ex. 2.

1. $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, base : $\mathcal{B}_n = \{1, x, \dots, x^n\}$.

2. Pour E :

$0 \in E$ car $0(1) = 0(-1) = 0$

$P, Q \in E \Rightarrow (P+Q)(1) = P(1) + Q(1) = 0 + 0 = 0$, $(P+Q)(-1) = 0$ $\Rightarrow P+Q \in E$

$(\lambda P)(1) = \lambda(P(1)) = \lambda \cdot 0 = 0$ et $(\lambda P)(-1) = 0$ $\Rightarrow \lambda P \in E$.

$\Rightarrow E \leq \mathbb{R}_3[X]$. Même chose pour F.

Alternativement :

$$\Phi : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad P \longmapsto \begin{pmatrix} P(1) \\ P(-1) \end{pmatrix}$$

$$\Psi : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad P \longmapsto \begin{pmatrix} P(0) \\ P'(0) \end{pmatrix}$$

Φ et Ψ sont linéaires, et $E = \ker \Phi$, $F = \ker \Psi$ s-esp. vectoriels de $\mathbb{R}_3[x]$.

3. $P \in E \Leftrightarrow \begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \mid P \\ x+1 \mid P \end{cases} \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = x^2-1 \mid P$.

4. On a $x^2-1 \in E$, $x(x^2-1) = x^3-x \in E$ et il sont indép. donc $\dim E \geq 2$.
De l'autre côté, $4 = \dim E + \dim \operatorname{Im} \Phi$.
La matrice de Φ dans les bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{E}^2$ est
$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & x & x^2 & x^3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array},$$
qui a rang 2, donc $\dim E = 2$ et $\dim \operatorname{Im} \Phi = 2$.
Par conséquent, $E = \langle x^2-1, x^3-x \rangle$.

5. $F = \ker \Psi$, $M_{\mathcal{B}_3, \mathcal{E}^2}(\Psi) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & x & x^2 & x^3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

comme $\operatorname{rk} M = 2$, on a $\dim F = 2$, et on voit de suite que $x^2, x^3 \in F$, donc $F = \langle x^2, x^3 \rangle$.

6. Dans la base $\mathcal{B}_3$, on a

$x^2-1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x^3-x \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad x^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x^3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $\operatorname{rg} = 4$ (triangulaire sup. avec termes diagonaux non nulles) donc les quatre vecteurs sont une base de $\mathbb{R}_3[X]$, et $\mathbb{R}_3[X] = E \oplus F$.

7. déjà fait.

8. On a $M_{B_3', \mathcal{E}}(\mathrm{id}) = P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ comme en 6.

9. $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$.

10. si $P^2 = I_4$ alors $P = P^{-1}$. (on dit que P est une involution)

Donc si on a $Q(X) = X^3 + 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base B_3, ses coordonnées dans la base B_3' sont données par

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c-à-d $Q(X) = -1 \cdot (X^2 - 1) + 1 \cdot (X^2) + 1 \cdot (X^3) = \cancel{-X^2} + 1 \cancel{+ X^2} + X^3 = X^3 + 1$ ok.