DST 2013

Ex. 3. $P_\lambda(x) = x^4+6x^2+\lambda x-3$

i) si α racine au moins double de P_λ, alors $P'_\lambda(\alpha)=0$, c-à-d α racine de $4x^3+12x+\lambda$, alors α est aussi racine de $x(4x^3+12x+\lambda) = xP'_\lambda(x) = 4x^4+12x^2+\lambda x$.

En soustrayant, α est racine de $-P_\lambda(x)+xP'_\lambda(x) = 3x^4+6x^2+3$, donc α racine de x^4+2x^2+1.

ii) Comme $x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2$, les valeurs possibles de α sont $\pm i$.

Pour $\alpha = i$: $P_\lambda(i) = 1-6+\lambda i-3=0 \iff \lambda i = 8 \iff \lambda=-8i$

on a donc $P_{-8i}(x) = x^4+6x^2-8ix-3$ et $P_{-8i}(i)=1-6+8-3=0$ ✓

$P_{-8i}(x)' = 4x^3+12x-8i$ $\qquad P'_{-8i}(i) = -4i+12i-8i=0$ ✓

Pour $\alpha = -i$ $\quad P_\lambda(-i)=1-6-\lambda i-3=0 \iff -\lambda i = 8 \iff \lambda=8i$

on a donc $P_{8i}(x)=x^4+6x^2+8ix-3$.

iii) On a $P_{-8i}(x)'' = 12x^2+12 = 12(x^2+1) = P_{8i}(x)''$. donc les deux racines i (resp. $-i$) est racines de $P_{-8i}(x)''$ (resp $P_{8i}(x)''$) donc les deux racines multiples i de $P_{-8i}(x)$ et $-i$ de $P_{8i}(x)$ sont au moins racines triples.

$P_{-8i}(x)^{(3)} = P_{8i}(x)^{(3)} = 12(2x)$. $\qquad P^{(3)}_\lambda(\pm i)\neq 0$ donc i et $-i$ sont multiplicité exactement 3.

iv) $P_{-8i}(x)$:

	1	0	6	$-8i$	-3
i		i	-1	$5i$	3
	1	i	5	$-3i$	0
i		i	-2	$3i$	
	1	$2i$	3	0	
i		i	-3		
	1	$3i$	0		

$P_{-8i}(x) = (x-i)^3(x+3i)$

$P_{8i}(x)$

	1	0	6	$8i$	-3
$-i$		$-i$	-1	$-5i$	3
	1	$-i$	5	$3i$	0
$-i$		$-i$	-2	$-3i$	
	1	$-2i$	3	0	
$-i$		$-i$	-3		
	1	$-3i$	0		

$P_{8i}(x) = (x+i)^3(x-3i)$

Ex. 4. $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire, à racines simples :

i) $P(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - x_j)$ $\qquad P'(X) = \sum_{t=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} (X - x_j)$ (par la formule de Leibniz)

$$\Rightarrow P'(x_k) = \sum_{t=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq t}}^{n} (x_k - x_j)$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{t=1 \\ t \neq k}}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq t}}^{n} (x_k - x_j)}_{=0} + \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} (x_k - x_j) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} (x_k - x_j).$$

(car j prend la valeur k $\Rightarrow$ on a un facteur $x_k - x_k = 0$)

ii) $$\frac{1}{P(X)} = \frac{1}{(X-x_1)\cdots(X-x_n)} = \frac{a_1}{X-x_1} + \cdots + \frac{a_n}{X-x_n}$$

pour trouver a_k, je multiplie par $X - x_k$:

$$\frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} (X - x_j)} = a_k + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{a_j}{X - x_j} \right)(X - x_k)$$

et j'évalue en $X = x_k$:

$$\frac{1}{\underbrace{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} (x_k - x_j)}_{=P'(x_k)}} = a_k + 0 \qquad \text{donc} \quad a_k = \frac{1}{P'(x_k)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)(X - x_k)}$$

iii) Si $P(0) \neq 0$, alors

$$\frac{1}{P(0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)(0 - x_k)} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)}.$$