DST 2012

Ex. 1.

1. Bézout : si $P = \text{pgcd}(A,B)$, alors $AU + BV = P$.

Si $A(\alpha) = B(\alpha) = 0$ alors $P(\alpha) = A(\alpha)V(\alpha) + B(\alpha)V(\alpha) = 0 + 0 = 0$.

2. Si α est racine triple de A, alors α est racine double de A' et simple de A''.

Donc $A(\alpha) = A'(\alpha) = A''(\alpha) = 0$ mais $A'''(\alpha) \neq 0$.

En particulier, puisque

$$A'(x) = 5x^4 - 16x^3 + 6x^2 + 8x + 8$$

$$A''(x) = 20x^3 - 48x^2 + 12x + 8 = 4\underbrace{(5x^3 - 12x^2 + 3x + 2)}_{P(x)}$$

on a $P(\alpha) = 0$.

3. Alg. Euclide :

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & -4x^4 & +2x^3 & +4x^2 & +8x & -16 & x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4 \\
\cancel{-x^5} & -x^4 & +2x^3 & +6x^2 & +4x & & \hline x - 5 \\
\hline
 & -5x^4 & +4x^3 & +10x^2 & +12x & -16 & \\
 & +5x^4 & +5x^3 & -10x^2 & -30x & -20 & \\
\hline
 & & 9x^3 & +0x^2 & -18x & -36 & = 9\boxed{(x^3 - 2x - 4)} \quad (*)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +x^3 & -2x^2 & -6x & -4 & x^3 - 2x - 4 \\
-x^4 & +0 & +2x^2 & +4x & & \hline x + 1 \\
\hline
 & x^3 & +0x^2 & -2x & -4 & \\
 & -x^3 & & +2x & +4 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\boxed{\text{pgcd}(A,B) = x^3 - 2x - 4}$$

(Remarque : on peut diviser par une constante comme en $(*)$ si le but est trouver le pgcd, mais si on veut une relation de Bézout il faut tenir compte de cette constante)

4. Puisque α est racine de $P(x)$ et de $Q(x) = \text{pgcd}(A,B)$, alors α est racine du reste de la division de P par Q : ~~pgcd(P, Q)~~, qu'on calcule

$$\begin{array}{rrrr|l}
5x^3 & -12x^2 & +3x & +2 & x^3 - 2x - 4 \\
-5x^3 & & +10x & +20 & \hline 5 \\
\hline
 & \underbrace{-12x^2} & \underbrace{+13x} & \underbrace{+22} &
\end{array}$$

si $P(x) = T(x)Q(x) + R(x)$

alors en $\alpha \Rightarrow 0 = P(\alpha) = T(\alpha)\underbrace{Q(\alpha)}_{0} + R(\alpha) \Rightarrow R(\alpha) = 0$

donc α est racine de $12x^2 - 13x - 22 = R(x)$

5. $R(x) = 12x^2 - 13x - 22$ (Q dans le texte du problème)

$\Rightarrow$ racines : $\dfrac{13 \pm \sqrt{169 + 4\cdot 12 \cdot 22}}{2\cdot 12} = \dfrac{13 \pm \sqrt{1225}}{2\cdot 12} = \dfrac{13 \pm 35}{2\cdot 12}$ $\begin{array}{l} \nearrow 48 \\ \searrow -22 \end{array}$

donc $\alpha_1 = \dfrac{-22}{24} = -\dfrac{11}{12}$ et $\alpha_2 = \dfrac{48}{24} = 2$.

donc la racine commune à A et B est 2 (sans vérifier, car les ~~seules~~ racines rationnelles de A et B sont entières, A et B étant unitaires).

6. Pour A :

$$\begin{array}{r|rrrrr|r}
 & 1 & -4 & 2 & 4 & 8 & -16 \\
2 & & 2 & -4 & -4 & 0 & 16 \\
\hline
 & 1 & -2 & -2 & 0 & 8 & \\
2 & & 2 & 0 & -4 & -8 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -2 & -4 & & \\
2 & & 2 & 4 & 4 & & \\
\hline
 & 1 & 2 & 2 & & &
\end{array}$$

$\Rightarrow A(x) = (x-2)^3 (x^2+2x+2)$ en $\mathbb{R}[x]$

$x = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i$

$= (x-2)^3 (x - (-1-i))(x - (-1+i))$ en $\mathbb{C}[x]$.

Pour B :

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & 1 & -2 & -6 & -4 \\
2 & & 2 & 6 & 8 & 4 \\
\hline
 & 1 & 3 & 4 & 2 & \\
-1 & & -1 & -2 & -2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 2 & &
\end{array}$$

$B(x) = (x-2)(x^3+3x^2+4x+2)$

on remarque que -1 est racine de B

$= (x-2)(x+1)(x^2+2x+2)$ en $\mathbb{R}[x]$

$= (x-2)(x+1)(x-(-1-i))(x-(-1+i))$ en $\mathbb{C}[x]$

~~ou~~ alternativement :

$\mathrm{pgcd}(A,B) = x^3 - 2x - 4 = (x-2)(x^2+2x+2)$ et on divise B par $\mathrm{pgcd}(A,B)$ pour trouver $(x+1)$.

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 0 & -2 & -4 \\
2 & & 2 & 4 & 4 \\
\hline
 & 1 & 2 & 2 &
\end{array}$$

DST 2012

Ex. 4. $f : E \longrightarrow E$ t.q. $f^2 = \lambda \, Id_E$.

1. Soit $v \in \ker f$:

alors $f(v) = 0 \Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ f(0) \, = \, 0}}{f(f(v))} = \lambda v$. Comme $\lambda \neq 0 \Rightarrow v = 0$ donc $\ker f = 0$

$\Rightarrow f$ injective.

2. Soit $v \neq 0$:

si $\boxed{av + bf(v) = 0}^{*}$ j'applique f : ~~f(...)~~ $af(v) + bf^2(v) = 0$ donc

$af(v) + \lambda b v = 0$

- si $b = 0$: on a $* \Leftrightarrow av = 0$ mais $v \neq 0$ donc $a = 0$
- par absurde, si $b \neq 0$: $v = -\dfrac{a}{\lambda b} f(v)$, je l'introduis dans $(*)$:

$$-\frac{a^2}{\lambda b} f(v) + b f(v) = 0 \Leftrightarrow \frac{-a^2 + \lambda b^2}{\lambda b} f(v) = 0$$

mais : $\lambda \neq 0 \Rightarrow f$ injective $\Rightarrow f(v) \neq 0$

et $\lambda < 0 \Rightarrow -a^2 + \lambda b^2 < 0$ donc $\dfrac{-a^2 + \lambda b^2}{\lambda b} f(v) \neq 0$ absurde.

Donc $b = 0$ nécessairement, et $(v, f(v))$ indép.

3. $\lambda = 0$: $f^2 = 0_E$.

- si $f = 0$ (application nulle) ok.
- si $f \neq 0$, soit v t.q. $f(v) \neq 0$. Alors $f(f(v)) = 0$ donc

$f(v) \in \ker f \neq 0 \Rightarrow f$ non injective.

4. P. ex. l'application de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.