Interactions trilinéaires résonantes

G. Métivier
IRMAR URA 305 CNRS, Université de Rennes I

S. Schochet
Dept. of Applied Mathematics, Tel Aviv University

1. Introduction.

On considère en dimension un d'espace, un système de trois équations à trois inconnues

$$X_k u_k \;:=\; \partial_t u_k \;-\; c_k \partial_x u_k \;= f_k(u_1,u_2,u_3)\;, \quad \text{pour} \;\; k\in\{1,2,3\}\,. \tag{1.1}$$

On veut déterminer toutes les limites faibles des suites de solutions uniformément bornées. Ce problème a été initialement abordé par [T1] [McLPT]. Il est fondamental pour la compréhension des mécanismes d'interaction dans les passages à la limite faible. Il est relié à de nombreux autres problèmes comme l'étude des systèmes de lois de conservation (cf. [DiP 1 à 4], [T 2 et 3]) ou l'homgénéisation. Cependant les réponses restent très partielles et il est important de bien comprendre l'exemple semi-linéaire (1.1). Le cas où les champs X_k sont *non résonants* est résolu dans [JMR 4] (voir aussi [JMR 3]). Le but de cet exposé est de présenter l'étude dans le cas où *les champs X_k sont résonants*. On répond ainsi complètement à une question posée dans [T 1].

Dans le cas non résonant, l'analyse de [JMR 4] est conduite en étudiant les mesures de Young associées aux suites $u_{k,n}$. Le point crucial est un théorème de compacité par compensation trilinéaire qui permet d'obtenir des équations de propagation pour les mesures de Young. Au contraire, dans le cas résonant, les mesures de Young des solutions ne sont pas complètement déterminées par celles des données initiales (voir un exemple dans [JMR 4]). La raison en est que les mesures de Young ne permettent pas de détecter les résonances, c'est -à-dire la création d'oscillations dans une composante par interaction d'oscillations dans les deux autres composantes. L'objectif du travail présenté dans cet exposé est de résoudre cette difficulté, en introduisant un nouvel outil qui rende compte des résonances, les *mesures de Young multi-échelles* . Ces mesures vérifient des équations de propagation et sont déterminées par leurs valeurs initiales. Comme pour les mesures de Young dans le cas non résonant, il est remarquable que les équations de propagation des mesures de Young multi-échelles sont équivalentes aux équations de l'optique géométrique semi-linéaire.

Pour finir, notons que l'étude s'étend aux systèmes semi-linéaires $N\times N$,

$$X_k u_k \;:=\; \partial_t u_k \;-\; c_k \partial_x u_k \;= f_k(u_1,\dots,u_N)\;, \quad \text{pour} \;\; k\in\{1,\dots,N\}\,, \tag{1.2}$$

pour lequels $f_k(u_1,\dots,u_N)$ est la somme de fonctions $f_{k,j,l}(u_k,u_j,u_l)$. Cela contient le cas où les f_k sont quadratiques.

2. Présentation du problème.

Considérons un système (1.1). Les vitesses $c_k(t,x)$ sont réelles, C^∞ et $c_1<c_2<c_3$. Les non-linéarités f_k sont des fonctions régulières de leurs arguments. Considérons une suite $u_n=(u_{1,n},u_{2,n},u_{3,n})$ de solutions de (1.1), bornée dans $L^\infty(\Omega)$. Il est facile de construire de telles suites, à partir de familles de données initiales bornées dans L^∞. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que u_n converge faiblement vers $\underline{u}=(\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3)$.

Sauf dans des cas très particuliers, $\underline{u}$ n'est pas solution de (1.1). Suivant l'idée de [T 1], on introduit les mesures de Young associées aux suites $u_{k,n}$. Quitte à extraire de nouvelles sous suites, on peut supposer que pour tout entier m, les suites $(u_{k,n})^m$ convergent faiblement, ce qui implique que pour toute fonction Φ continue sur $\mathbb{R}$, $\Phi(u_{k,n})$

converge faiblement. Il existe alors des familles mesurables $\mu_{k,y}(d\lambda)$ de probabilités sur $\mathbb{R}$, paramétrées par $y := (t,x) \in \Omega$, telle que pour toute fonction $\Phi \in C^0(\mathbb{R})$ et toute fonction $a \in L^1(\Omega)$

$$\int_\Omega a(y)\ \Phi(u_{k,n}(y))\ dy \quad \to \quad \int_{\Omega\times\mathbb{R}} a(y)\ \Phi(\lambda)\ \mu_{k,y}(d\lambda)\ dy\,. \tag{2.1}$$

La mesure de Young de la sous-suite $u_{k,n}$ est la mesure μ_k anisi définie.

Pour étudier la propagation de μ_k, on se donne $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$, et on cherche à passer à la limite dans l'équation

$$X_k\,\Phi(u_{k,n}) \;=\; \Phi'(u_{k,n})\ f_k(u_{1,n},u_{2,n},u_{3,n})\,. \tag{2.2}$$

La limite faible du membre de gauche s'exprime à l'aide de μ_k. Pour traiter le membre de droite, il faut déterminer les limites faibles d'expressions non linéaires $F(u_{1,n},u_{2,n},u_{3,n})$. Pour cela, il suffit de considérer les monômes ou les produits $v_{1,n}\ v_{2,n}\ v_{3,n}$ avec $v_{k,n} := F_k(u_{k,n})$. Les limites faibles $\underline{v}_k$ des $v_{k,n}$ s'expriment à l'aide des mesures de Young μ_k :

$$\underline{v}_k(y) \;=\; \int_{\mathbb{R}} F_k(\lambda)\ \mu_{k,y}(d\lambda)\,. \tag{2.3}$$

Question 2.1 *: étant donné trois suites $v_{k,n}$ bornées dans $L^\infty(\Omega)$, convergeant faiblement vers $\underline{v}_k$ et telles que les $X_k v_{k,n}$ sont bornés dans $L^\infty(\Omega)$, a-t-on*

$$v_{1,n}\ v_{2,n}\ v_{3,n} \;\rightharpoonup\; \underline{v}_1\ \underline{v}_2\ \underline{v}_3\,? \tag{2.4}$$

C'est un problème de compacité par compensation. Remarquons que pour les systèmes 2×2, l'analogue bilinéaire de (2.4) est toujours vérifié et constitue bien la clé de [T 1]. Pour les systèmes 3×3, la réponse à la question (2.4) repose sur l'analyse des résonances.

Définition 2.2. ([JMR 1]). *Une résonance est un triplet de fonctions $\varphi_k \in C^\infty(\Omega)$ telles que*

$$X_k\varphi_k \;=\; 0 \quad \textit{pour} \quad k\in\{1,2,3\} \quad \textit{et} \quad \sum d\varphi_k \;=\; 0\,. \tag{2.5}$$

La résonance est non triviale si les $d\varphi_k$ ne sont pas tous nuls.

Rappelons que les résonances ne dépendent pas des champs X_k mais des feuilletages associés. La donnée de N feuilletages est connue sous le nom de *N-tissu* (cf [BB], [P]) et les résonances correspondent aux relations Abeliennes des tissus. Pour $N=3$, la dimension de l'espace des résonances (modulo les constantes) est 0 ou 1. Les champs sont dits non résonants quand cette dimension est 0, i.e. lorsqu'il n'existe pas de résonance non triviale. Pour les 3-tissus, un invariant géométrique, appelé courbure, caractérise par son annulation l'existence (locale) d'une résonance non triviale. Génériquement, cette courbure est non nulle et les trois champs de vecteurs sont non résonants. Cependant, des champs constants sont toujours résonants, (2.5) étant vérifié par les phases planes $\varphi_k = \eta_k\cdot y$ telles que $\langle X_k,\eta_k\rangle = 0$ et $\sum\eta_k = 0$. On renvoie à la section 3 de [JMR 1] pour une discussion détaillée de la notion de résonance.

L'existence d'une résonance est une obstruction à la validité de (2.4). Pour le voir, il suffit de considérer des suites de la forme

$$v_{k,n}(y) \;=\; a_k(y)\; e^{i\,\nu_n\,\varphi_k(y)} \tag{2.6}$$

avec $a_k \in C_0^\infty(\Omega)$ et ν_n une suite telle que $|\nu_n| \to +\infty$. Alors $v_{k,n} \rightharpoonup 0$ et $v_{1,n}\,v_{2,n}\,v_{3,n} = a_1\,a_2\,a_3$ peut être choisi $\neq 0$ (on peut toujous supposer que $\sum \varphi_k = 0$).

Le résultat principal de [JMR 4] est que (2.4) *est vérifié lorsque les champs sont non résonants*, plus précisément lorsque la courbure du 3-tissu défini par les champs est non nulle presque partout. Dans ce cas, le terme de droite de (2.2) converge faiblement vers

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Phi'(\lambda_k)\, f_k(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\; \mu_{1,y}(d\lambda_1)\,\mu_{2,y}(d\lambda_2)\,\mu_{3,y}(d\lambda_3)\,. \tag{2.7}$$

On en déduit que les mesures de Young μ_k vérifient

$$X_k(y,\partial_y)\,\mu_k \;-\; \partial_\lambda(A_k(y,\lambda)\,\mu_k) \;=\; 0\,, \tag{2.8}$$

avec

$$A_1(y,\lambda) \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} f_1(\lambda,\lambda_2,\lambda_3)\; \mu_{2,y}(d\lambda_2)\,\mu_{3,y}(d\lambda_3) \tag{2.9}$$

et des formules analogues pour A_2 et A_3. Les équations (2.8) (2.9) déterminent les mesures μ_k à partir de leur valeur initiale (cf [JMR 4]). On en déduit que si pour une sous suite, les données initiales $u_{k,n}(0,x)$ admettent des mesures de Young $\mu^0_{k,x}(d\lambda)$, alors pour la même sous suite, les $u_{k,n}$ admettent des mesures de Young, qui sont déterminées par (2.8) (2.9) et les conditions initiales μ^0_k. Les limites faibles $\underline{u}_k$ se déduisent des μ_k par (2.3).

En outre, si l'on note $U_k(y,\theta)$ la fonction croissante continue à droite, réciproque de la fonction de répartition $M_k(y,\lambda) := \mu_{k,y}(]-\infty,\lambda[)$, les équations (2.8) (2.9) sont équivalentes aux équations de l'optique géométrique non résonante :

$$X_1(y,\partial_y)\,U_1(y,\theta) \;=\; \int_{]0,1[^2} f_1\big(U_1(y,\theta),U_2(y,\theta_2),U_3(y,\theta_3)\big)\; d\theta_2\,d\theta_3\,, \tag{2.10}$$

et des équations analogues pour U_2 et U_3. On renvoie à [JMR 4] pour des énoncés précis.

Dans toute la suite de l'exposé, nous allons donc considérer le cas où les trois champs X_k admettent une résonance non triviale $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$. On notera que ce triplet est uniquement déterminé à une constante multiplicative près, puisque l'espace des résonances est de dimension au plus un. L'exemple (2.6) montre que la convergence (2.4) n'est plus toujours vraie. La mesure de Young conjointe de $u_n = (u_{1,n},u_{2,n},u_{3,n})$ n'est plus nécessairement déterminée par la connaissance des mesures de Young μ_k des $u_{k,n}$ qui ne sont donc plus nécessairement déterminées par leurs données initiales (pour un exemple, voir [JMR 4]).

L'analyse développée dans les §§3 à 7 repose sur les idées suivantes :

A) *Les suites* (2.6) *sont les seules obstructions à la convergence* (2.4). Autrement dit, (2.4) est satisfaite si l'une des suites ne contient pas d'oscillations de la forme (2.6).

B) Quitte à extraire une sous suite, *toute suite se décompose en somme d'oscillations* (2.6) *et une suite qui n'a pas d'oscillations de la forme* (2.6).

C) Quitte à extraire une nouvelle sous suite et à modifier légèrement les fréquences, *les sommes d'oscillations* (2.6) *se représentent à l'aide de profils*, sous la forme

$$\mathcal{V}_k(y, \rho_n(\varphi_k(y))) \,, \tag{2.11}$$

où $\mathcal{V}$ est définie sur $\Omega \times G$, G groupe compact et ρ_n une suite d'homomorphismes de $\mathbb{R}$ dans G. En outre, on peut choisir G et ρ_n commun aux trois (sous)-suites $v_{k,n}$. Inversement, en décomposant $\mathcal{V}_k$ en séries de Fourier sur G, il est clair que (2.11) fournit une série d'oscillations (2.6).

D) En combinant B) et C), se ramène à déterminer la limite faible de produits $v_{1,n}v_{2,n}v_{3,n}$ lorsque

$$v_{k,n}(y) \;=\; \mathcal{V}_k(y, \rho_n(\varphi_k(y))) \;+\; r_{k,n} \,, \tag{2.12}$$

où $r_{k,n}$ ne contient pas d'oscillations (2.6). D'après A), il suffit alors de calculer la limite faible de produits d'oscillations (2.11). Celle-ci s'exprime aisément grâce à la structure de groupe :

$$v_{1,n}\; v_{2,n}\; v_{3,n} \;\rightharpoonup\; \int_{G\times G} \mathcal{V}_1(y, g_1)\; \mathcal{V}_2(y, g_2)\; \mathcal{V}_3(y, -g_1 - g_2)\; dg_1 dg_2 \,. \tag{2.13}$$

Dans cette formule, dg désigne la mesure de Haar normalisée sur G.

Remplaçant la notion de limite faible par celle de profil, on substitue à la notion de mesure de Young, celle de *mesure de Young multi-échelles* (voir dans cet esprit [A], [E], [ES], [JMR 2]). Reprenant la démarche utilisée pour les mesures de Young, on montre que le mesures multi-échelles vérifient des équations de propagations et sont donc déterminées par leur valeur initiale, c'est-à-dire par les mesures de Young multi-échelles des données initiales. Ces résultats seront énoncés au §8.

3. Compacité par compensation dans le cas résonant.

Hypothèse 3.1. *i)* $\omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *et* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *est le domaine limité par les caractéristiques de* X_3 *et* X_1 *issues respectivement de* a *et* b, *et par les droites* $t = 0$, $t = T$.

ii) $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ *est une résonance non triviale pour les champs* X_1, X_2, X_2 *sur* Ω, *telle que* $\sum \varphi_k = 0$.

On notera que $d\varphi_k \neq 0$ sur Ω. On donne d'abord un sens précis à la notion qu'une suite qui converge faiblement vers zéro n'a pas d'oscillations suivant une phase donnée.

Définition 3.2. *Soit $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Pour $p \in [1, +\infty]$, on note $\mathcal{L}^p_{no,\varphi}$ l'espace des suites v_n borneés dans $L^p(\Omega)$, qui vérifient pour toute suite $\nu \in \mathbf{S} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,*

$$e^{-i\,\nu_n\,\varphi}\; v_n \;\rightharpoonup\; 0\,. \tag{3.1}$$

Théorème 3.3. *Pour $k \in \{1,2,3\}$, soit $v_{k,n}$ une suite bornée dans $L^\infty(\Omega)$, telle que $X_k v_{k,n}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$. On suppose que l'une des suites $v_{k,n}$ est dans $\mathcal{L}^\infty_{no,\varphi_k}$. Alors, $v_{1,n}\; v_{2,n}\; v_{3,n}$ converge faiblement vers 0.*

Le résultat est local. Prenant φ_1 et φ_2 comme coordonnées locales, on se ramène au cas où

$$\begin{cases} X_1 \;=\; \partial_t\;, & X_2 \;=\; \partial_x\;, \qquad X_3 \;=\; \partial_t \,-\, \partial_x\,, \\ \varphi_1(t,x) \;=\; x\;, & \varphi_2(t,x) \;=\; t\;, \quad \varphi_3(t,x) \;=\; -\,x\,-\,t\,. \end{cases} \tag{3.2}$$

On peut supposer que les $v_{k,n}$ sont supportées dans un compact fixe, et en incorporant la fonction test à l'une des suites, il suffit de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^2} v_{1,n}\; v_{2,n}\; v_{3,n}\; dt\,dx \quad\to\; 0\,. \tag{3.3}$$

L'idée de la preuve de de (3.3) se comprend facilement dans le cas modèle où $X_k v_{k,n} = 0$. Alors $v_{1,n}(t,x) = a_n(x)$, $v_{2,n}(t,x) = b_n(t)$ et $v_{3,n}(t,x) = c_n(x+t)$. Supposons que a_n, b_n et c_n sont bornées dans $L^2(\mathbb{R})$ et à support dans un compact fixe. L'intégrale de (3.3) s'écrit à l'aide des transformées de Fourier

$$\frac{1}{2\pi} \int \hat a_n(\tau)\, \hat b_n(\tau)\, \hat c_n(-\tau)\; d\tau\,. \tag{3.4}$$

Dire que la suite $a_n(x)$ bornée dans L^2 et à support dans un compact fixe vérifie (3.1) pour toute suite ν_n avec la phase $\varphi_1 = x$, équivaut à dire que $\hat a_n$ converge vers 0, en norme L^∞. Comme les suites $\hat b_n$ et $\hat c_n$ sont bornées dans L^2, il est clair que (3.4) converge vers 0.

La preuve de (3.3) dans le cas général, est une modification de cet argument.

4. Oscillations asociées à une phase.

Soit $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ telle que $d\varphi \neq 0$ sur Ω. Le prototype d'oscillations de phase φ est

$$v_n(y) \;=\; a(y)\; e^{i\,\nu_n\,\varphi(y)}\,, \tag{4.1}$$

avec $a \in C^\infty_0(\Omega)$ et $\nu \in \mathbf{S} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note $\mathcal{P}_\varphi$ l'espace des combinaisons linéaires de telles suites.

Définition 4.1. *Pour $p \in [1,+\infty]$, $\mathcal{L}^p_{os,\varphi}$ est l'espace des suites v_n bornées dans $L^p(\Omega)$, telles que : pour tout $\delta > 0$, il existe une suite w_n de $\mathcal{P}_\varphi$ telle que*

$$\limsup_{n\to\infty} \| v_n \ - \ w_n \|_{L^p(\Omega)} \ \leq \ \delta \, . \tag{4.2}$$

Théorème 4.2. *Pour toute suite v_n bornée dans $L^2(\Omega)$, il existe une sous suite $v_{\ell(n)}$ qui appartient à $\mathcal{L}^2_{os,\varphi} \ + \ \mathcal{L}^2_{no,\varphi}$.*

L'idée est de faire une analyse de Fourier asymptotique de la suite v_n. Pour toute suite $\nu \in \mathbf{S}$, on voudrait considérer la limite faible a_ν de $v_n \ e^{-i\,\nu_n\,\varphi}$, puis définir la somme $w_n \sim \sum_\nu a_\nu \ e^{i\,\nu_n\,\varphi}$. On aurait alors que $v_n - w_n \in \mathcal{L}^2_{no,\varphi}$. La difficulté est que les limites faibles n'existent qu'après extraction de sous suites, alors que $\mathbf{S}$ n'est pas dénombrable. Ce qui sauve l'affaire, c'est qu'en fin de compte, seul un ensemble dénombrable de suites ν interviennent effectivement. Cependant, cet ensemble n'est pas connu a-priori. Il faut donc le construire, en même temps qu'on extrait la sous-suite $v_{\ell(n)}$. Pour cela, on reprend l'idée d'une analyse de Fourier, en ordonnant les coefficients de Fourier par taille décroissante.

Pour une suite v_* bornée dans $L^2(\Omega)$, on note $K(v_*)$ l'ensemble des $a \in L^2(\Omega)$ pour lesquels il existe une sous suite $v_{\ell(n)}$ et $\nu \in \mathbf{S}$ tels que $e^{-i\,\nu_n \varphi}\, v_{\ell(n)}$ converge faiblement vers a. Cet ensemble est borné et non vide. Soit

$$\delta(v_*) \ := \ \sup_{a \in K(v_*)} \ \| \, a \, \|_{L^2(\Omega)} \, . \tag{4.3}$$

Si $\delta(v_*) = 0$, c'est que $v_* \in \mathcal{L}^2_{no,\varphi}$ et l'assertion du théorème est vérifiée. Si $\delta(v_*) > 0$, on choisit $a \in K(v_*)$ tel que $\|a\| \geq \delta(v_*)/2$. Il existe alors $\nu \in \mathbf{S}$ et ℓ tels que $e^{-i\,\nu_n \varphi}\, v_{\ell(n)} \rightharpoonup a$. On considère la nouvelle suite $v^{(1)}_n := v_{\ell(n)} - a e^{i\,\nu_n \varphi}$, pour laquelle on répète la discussion. On construit donc par récurrence, des applications strictement croissantes $\ell^{(j)}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, des suites $\nu^{(j)} \in \mathbf{S}$, $v^{(j)}_*$ et des fonctions $a_j \in L^2(\Omega)$, telles que

$$|| \, a_j \, ||_{L^2(\Omega)} \ \geq \ \delta(v^{(j)}_*) \ /2 > 0 \, , \quad v^{(j)}_{\ell^{(j)}(n)} \, e^{-i \ \nu^{(j)}_n \ \varphi} \rightharpoonup a_j \, , \tag{4.4}$$

et la $j+1$-ème suite est

$$v^{(j+1)}_n \ := v^{(j)}_{\ell^{(j)}(n)} \ - \ a_j \, e^{i \ \nu^{(j)}_n \ \varphi} \, . \tag{4.5}$$

Notons $\sigma^{(j)} := \ell^{(j)} \circ \cdots \circ \ell^{(1)}$, et pour $k > j$, $\sigma^{(k,j)} := \ell^{(k)} \circ \cdots \circ \ell^{(j+1)}$. Pour $k = j$ on convient que $\sigma^{(j,j)}(n) = n$. On note $\nu^{k,j}_n := \nu^j_{\sigma^{k,j}(n)}$. Alors

$$v_{\sigma^{(k)}(n)} = v^{(k+1)}_n \ \ + \ \sum_{j \leq k} \ a_j \ e^{i \ \nu^{(k,j)}_n \ \varphi} \, . \tag{4.6}$$

La construction s'arrête à la k-ième étape si $\delta(v^{(k+1)}_*) = 0$. Dans ce cas, $v^{(k+1)}_* \in \mathcal{L}^2_{no,\varphi}$ et (4.6) fournit la décomposition souhaitée. Considérons maintenant le cas où la construction se poursuit pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Le point clé est de vérifier par récurrence sur k que pour $1 \leq j' < j \leq k$

$$(4.7) \qquad |\,\nu_n^{(k,j)} \;-\; \nu_n^{(k,j')}\,| \;\to\; +\infty\,, \quad \text{quand} \quad n \to +\infty\,.$$

$$(4.8) \qquad v_n^{(k+1)}\; e^{-\;i\;\nu_n^{(k,j)}\,\varphi} \;\rightharpoonup 0\,, \quad \text{quand} \quad n \to +\infty\,.$$

On en déduit que les suites $a_j e^{i\;\nu_n^{(k,j)}\,\varphi}$ et $a_{j'} e^{i\;\nu_n^{(k,j')}\,\varphi}$ sont asymptotiquement orthogonales dans L^2 lorsque $j \neq j'$ et qu'elles sont asymptotiquement orthogonales à $v^{(k+1)}$. Il en résulte que

$$(4.9) \qquad \sum_j \|\, a_j \,\|^2_{L^2(\Omega)} \;\leq\; \limsup_n \|\, u_n \,\|^2_{L^2(\Omega)} \;<+\infty\,.$$

En particulier, cela implique que $\delta(u_*^{(j)}) \to 0$ quand $j \to \infty$.

On conclut par le procédé diagonal. On définit $\tilde\sigma(n) := \sigma^{(n)}(n)$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\tilde\nu_n^{(j)} := \nu_n^{(n,j)}$ pour $n \geq j$ and $\tilde\nu_n^{(j)} := 0$ pour $n < j$. On tire de (4.7) que pour $j' \neq j$

$$(4.10) \qquad |\,\tilde\nu_n^{(j)} \;-\; \tilde\nu_n^{(j')}\,| \;\to\; +\infty\,, \quad \text{quand} \quad n \to +\infty\,.$$

De plus,

$$(4.11) \qquad r_n^{(k)} := u_{\tilde\sigma(n)} \;-\; \sum_{j<k} a_j\, e^{i\;\tilde\nu_n^{(j)}\;\varphi}$$

est une sous suite de $u_*^{(k)}$. Il en résulte que $\delta(r_*^{(k)}) \;\leq\; \delta(u_*^{(k)})$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini. (4.9) et (4.10) impliquent que la série du membre de droite de (4.11) converge asymptotiquement et qu'elle définit $w_* \in \mathcal{L}^2_{os,\varphi}$, unique à une suite qui converge fortement vers zéro près. On tire de (4.11) que $r_n = u_{\tilde\sigma(n)} - w_n$ vérifie $\delta(r_*) = 0$, c'est à dire que que $r_* \in \mathcal{L}^2_{no,\varphi}$.

5. Profils d'oscillations.

L'objectif est de représenter les suites de $\mathcal{L}^p_{os,\varphi}$ par des *profils*. Deux idées interviennent.

1) Éliminer les redondances : si ν et μ sont telles que $\nu_n - \mu_n \to l \in \mathbb{R}$, alors $ae^{i\,\nu_n\varphi}$ et $ae^{i\,l\,\varphi}e^{i\,\mu_n\varphi}$ représentent la même oscillation. Il est inutile de garder à la fois ν et μ.

2) Comme on s'intéresse à des problèmes non linéaires, il est naturel de multiplier les oscillations entre-elles, et donc d'ajouter les suites de fréquences ν_n entre-elles.

Introduisons une notation : pour $A \subset \mathbf{S}$, $\mathcal{P}_\varphi(A)$ désigne l'espace des sommes finies de suites (4.1) telles que $\nu \in A$, et $\mathcal{L}^p_{os,\varphi}(A)$ sa complétion asymptotique, obtenue en remplaçant $\mathcal{P}_\varphi$ par $\mathcal{P}_\varphi(A)$ dans la Définition 4.1. Par définition, toute suite w_n de $\mathcal{P}_\varphi$ est dans un ensemble $\mathcal{P}_\varphi(A)$ avec A fini. Pour une suite v_n de $\mathcal{L}^p_{os,\varphi}$, en choisissant une suite $\delta_m \to 0$, ont voit qu'il existe un ensemble dénombrable $A \subset \mathbf{S}$, tel que v_n appartienne à $\mathcal{L}^p_{os,\varphi}(A)$.

Notons que l'on peut toujours de remplacer A par le sous groupe $H \subset \mathbf{S} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qu'il engendre. On a toujours $\mathcal{L}^p_{os,\varphi}(A) \subset \mathcal{L}^p_{os,\varphi}(H)$. Noter que H est dénombrable si A l'est.

Définition 5.1. *Un sous groupe H de $\mathbf{S}$ est dit admissible si*

$$\forall \nu \in H\backslash\{0\} \ : \quad |\, \nu_n \,| \ \to +\infty \quad \textit{quand} \quad n \ \to \ +\infty\,. \tag{5.1}$$

Lemme 5.2. *Pour tout ensemble dénombrable $A \subset \mathbf{S}$, il existe un groupe admissible H, et une application strictement croissante ℓ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, tels que,*

$$\forall \xi \in A \ , \quad \exists \nu \in H \ , \quad \exists l \in \mathbb{R} \ : \quad \xi_{\ell(n)} - \nu_n \to l \in \mathbb{R} \ , \quad \textit{quand} \quad n \to +\infty\,. \tag{5.2}$$

En particulier, pour toute suite $v_* \in \mathcal{L}^p_{os,\varphi}(A)$ la suite extraite $v_{\ell(n)}$ est dans $\mathcal{L}^p_{os,\varphi}(H)$.

On peut toujours supposer que A est lui même un sous groupe de $\mathbf{S}$. Comme A est dénombrable, $[-\infty, +\infty]^A$ est compact et métrisable, on peut extraire une sous suite telle que pour tout $\alpha \in A$, $\alpha_{\ell(n)}$ a une limite finie ou infinie quand n tend vers l'infini. Ensuite, on construit une suite d'homomorphismes $\nu_n \, : \, A \to \mathbb{R}$ et un homomorphisme $l \, : \, A \to \mathbb{R}$, tels que pour tout $\alpha \in A$, $\alpha_{\ell(n)} - \nu_n(\alpha) \to l(\alpha)$ lorsque $n \to +\infty$, et ou bien $|\nu_n(\alpha)| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, ou bien $\nu_n(\alpha) = 0$ pour tout n. Le groupe $H := \{\nu_*(\alpha)\, ; \, \alpha \in A\}$ répond à la question.

L'analyse de Fourier asymptotique qui a conduit à la construction d'ensembles $A \subset \mathbf{S}$ “adaptés” à des suites v_n, puis à des groupes admissibles, peut être mise en parallèle avec une véritable analyse de Fourier sur ces groupes (pour ces aspects, voir par exemple [W]).

Soit H un sous groupe de $\mathbf{S}$. On le considère comme groupe discret et on introduit G son groupe dual qui est compact. H est isomorphe au groupe dual de G, et tout $\alpha \in H$ définit un caractère e_α sur G. L'injection de H dans $\mathbf{S}$ fournit une suite d'homomorphismes $\nu_n \in \mathrm{Hom}(H, \mathbb{R})$ par $\nu_n : \alpha \to \alpha_n$. On identifie $\mathbb{R}$ à son dual, en identifiant τ au caractère $t \to e^{i\,\tau\, t}$, et par dualité, ν_n définit $\rho_n \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G)$. On a alors

$$\forall \alpha \in H \ , \quad \forall s \in \mathbb{R} \ : \quad e_\alpha(\rho_n(s)) \ = \ e^{i\,\alpha_n s}\,. \tag{5.3}$$

Inversement, la donnée d'un groupe Abélien compact G et d'une suite $\rho_n \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G)$ définit par dualité une suite $\nu_n \in \mathrm{Hom}(\widehat{G}, \mathbb{R})$ et en notant e_α le caractère sur G défini par $\alpha \in \widehat{G}$, on a

$$\forall \alpha \in \widehat{G} \ , \quad \forall s \in \mathbb{R} \ : \quad e_\alpha(\rho_n(s)) \ = \ e^{i\,\nu_n(\alpha)\, s}\,. \tag{5.4}$$

On associe alors à $(G, \{\rho_n\})$ le groupe $H := \{\{\nu_n(\alpha)\}_{n \in \mathbb{N}} \ : \ \alpha \in \widehat{G}\} \subset \mathbf{S}$. On remarque que la suite ν_n définit $\nu \in \mathrm{Hom}(\widehat{G}, H)$. On dit que $(G, \{\rho_n\})$ est admissible lorsque H est admissible et que ν est un isomorphisme de $\widehat{G}$ sur H. Cela revient à dire que pour tout $\alpha \in \widehat{G}\backslash\{0\}$, $|\nu_n(\alpha)| \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.

Considérons un groupe Abélien compact G, une suite $\rho_n \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G)$ et $H \subset \mathbf{S}$ comme ci-dessus. (5.4) implique que la suite $v_n = \sum_\alpha \ a_\alpha \ e^{i\,\alpha_n \varphi} \in \mathcal{P}_\varphi(H)$ s'écrit

$$v_n(y) \ = \ \mathcal{V}(y, \rho_n(\varphi(y))) \tag{5.5}$$

où $\mathcal{V}(y, g) = \sum_\alpha \ a_\alpha(y) \ e_\alpha(g)$ est un “polynôme trigonométrique” sur $\Omega \times G$.

La formule (5.5) a un sens pour toutes les fonctions continues $\mathcal{V}$ sur $\Omega \times G$. On peut la prolonger au delà des fonctions continues lorsque $(G, \{\rho_n\})$ est admissible.

THÉORÈME 5.3. *Soit $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ telle que $d\varphi \neq 0$ sur Ω. Si $(G, \{\rho_n\})$ est admissible, (5.5) se prolonge pour tout $p \in]1, +\infty[$, en un isomorphisme de $L^p(\Omega \times G)$ sur $\mathcal{L}^p_{os,\varphi}(H)/\mathcal{L}^p_0$, où $\mathcal{L}^p_0$ désigne l'espace des suites dans $L^p(\Omega)$ qui convergent fortement vers 0.*

Dans cet énoncé, G est muni de sa mesure Haar normalisée. Les cas $p = 1$ et $p = +\infty$ sont un peu plus compliqués. La suite de ce paragraphe construit l'isomorphisme annoncé.

a) L'hypothèse d'admissibilité et de non annulation de $d\varphi$ sur Ω impliquent que pour tout polynome trigonométrique $\mathcal{F}$ sur $\Omega \times G$, on a

$$\int_\Omega \mathcal{F}(y, \rho_n(\varphi(y)))\, dy \quad \to \quad \int_{\Omega \times G} \mathcal{F}(y, g)\, dy\, dg \,. \tag{5.6}$$

Par densité (cf [W]), cette convergence s'étend aux fonctions continues. On en déduit que pour $\mathcal{A} \in C^0_0(\Omega \times G)$ et pour $p \in [1, +\infty[$, on a

$$\int_\Omega |\, \mathcal{A}(y, \rho_n(\varphi(y)))\,|^p\, dy \quad \to \quad \int_{\Omega \times G} |\, \mathcal{A}(y, g)\,|^p\, dy\, dg \,. \tag{5.7}$$

Il en résulte que l'application $\mathcal{V} \to \{v_n\}$ définie par (5.5) se prolonge en une isométrie Σ de $L^p(\Omega \times G)$ dans $\mathcal{L}^p_{os,\varphi}(H)/\mathcal{L}^p_0$. On note

$$v_n(y) \;\sim\; \mathcal{V}(y, \rho_n(\varphi(y))) \quad \text{dans } L^p \,, \tag{5.8}$$

toute suite dans $\mathcal{L}^p_{os,\varphi}(H)$ dont la classe dans $\mathcal{L}^p_{os,\varphi}(H)/\mathcal{L}^p_0$ est $\Sigma\mathcal{V}$. Si $v_n(y)$ et $w_n(y)$ sont $\sim \mathcal{V}(y, \rho_n(\varphi(y)))$ dans L^p, alors $v_n - w_n$ converge vers 0 fortement dans L^p.

b) On procède maintenant dans l'autre sens.

LEMME 5.4. *Soit v_n une suite de $\mathcal{L}^p_{os,\varphi}(H) + \mathcal{L}^p_{no,\varphi}$, pour $p \in]1, +\infty]$. Il existe une unique fonction $\mathcal{V} \in L^p(\Omega \times G)$, telle que pour toute fonction $\mathcal{A} \in C^0_0(\Omega \times G)$, on a*

$$\int_\Omega v_n(y)\, \mathcal{A}(y, \rho_n(\varphi(y)))\, dy \quad \to \quad \int_{\Omega \times G} \mathcal{V}(y, g)\, \mathcal{A}(y, g)\, dy\, dg \,. \tag{5.9}$$

$\mathcal{V}$ s'appelle le profil de la suite v_n.

H étant admissible, pour tout $\xi \in H$, la suite $v_n\, e^{-\,i\,\xi_n \varphi}$ converge faiblement. Le membre de gauche de (5.9) converge donc pour tout polynôme trigonométrique $\mathcal{A}$. Utilisant leur densité dans $L^{p'}$ pour $p' = p/(p-1) < +\infty$ et l'estimation (5.7), on en déduit que la limite définit une forme linéaire sur $L^{p'}(\Omega \times G)$, donc un élément $\mathcal{V} \in L^p(\Omega \times G)$.

c) Le résultat suivant précise le théorème 5.3.

PROPOSITION 5.5. *i) Soit $\mathcal{V} \in L^p(\Omega \times G)$, $p \in]1, +\infty[$, et soit $v_n(y) \sim \mathcal{V}(y, \rho_n(\varphi(y)))$ dans L^p au sens de la définition* (5.8). *Alors le profil de la suite v_n est $\mathcal{V}$.*

ii) Soit v_n une suite dans $\mathcal{L}^p_{os,\varphi}(H)$ avec $p \in]1, +\infty[$ et soit $\mathcal{V} \in L^p(\Omega \times G)$ son profil. Alors $v_n(y) \sim \mathcal{V}(y, \rho_n(\varphi(y)))$ dans L^p, au sens de la définition (5.8).

iii) Plus généralement, soit v_n une suite dans $\mathcal{L}^p_{os,\varphi}(H) + \mathcal{L}^p_{no,\varphi}$ avec $p \in]1, +\infty[$. Soit $\mathcal{V} \in L^p(\Omega \times G)$ son profil et soit $\tilde{v}_n(y) \sim \mathcal{V}(y, \rho_n(\varphi(y)))$ dans L^p. Alors, $v_n - \tilde{v}_n \in \mathcal{L}^p_{no,\varphi}$.

6. Description des interactions trilinéaires.

On se donne un groupe Abélien compact G et une suite $\rho_n \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}; G)$. On suppose que $(G, \{\rho_n\})$ est admissible. On note $H \subset \mathbf{S}$ le groupe associé.

THÉORÈME 6.1. *Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, soit $v_{k,n}$ une suite dans $\mathcal{L}^2_{os,\varphi_k}(H) + \mathcal{L}^2_{no,\varphi_k}$ telle que $X_k v_{k,n}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$. Soit $\mathcal{V}_k \in L^2(\Omega \times G)$ le profil associé à $v_{k,n}$. Alors $X_k(y, \partial_y)\, \mathcal{V}_k \in L^2(\Omega \times G)$ et*

$$v_{1,n}\ v_{2,n}\ v_{3,n} \rightharpoonup \int_{G \times G} \mathcal{V}_1(y, g_1)\ \mathcal{V}_2(y, g_2)\ \mathcal{V}_3(y, -g_1 - g_2)\ dg_1 dg_2\,. \tag{6.1}$$

Comme $X_k \varphi_k = 0$, pour tout un polynôme trigonométrique $\mathcal{A}$ on a:

$$X_k\big(\mathcal{A}(y, \rho_n(\varphi_k))\big) = (X_k \mathcal{A})(y, \rho_n(\varphi_k))\,.$$

Il résulte de (5.9) que si $v_{k,n} \in \mathcal{L}^2_{os,\varphi_k}(H) + \mathcal{L}^2_{no,\varphi_k}$ est telle que $X_k v_{k,n}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, le profil $\mathcal{V}_k$ vérifie $X_k \mathcal{V}_k \in L^2(\Omega \times G)$. On peut alors construire une suite $\tilde{v}_{k,n} \sim \mathcal{V}_k(y, \rho_n(\varphi_k))$ dans $L^2(\Omega)$, telle que $X_k \tilde{v}_{k,n}$ soit borné dans $L^2(\Omega)$. Alors, $r_{k,n} := v_{k,n} - \tilde{v}_{k,n}$ est bornée dans $\mathcal{L}^2_{no,\varphi_k}$ et $X_k r_{k,n}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$.

Le Théorème 3.3 réduit la démonstration de (6.1) au cas où les $v_{k,n} = \tilde{v}_{k,n} \sim \mathcal{V}_k(y, \rho_n(\varphi_k))$. Dans ce cas, on approche les $\mathcal{V}_k$ par des polynômes trigonométriques et il suffit de montrer que pour tout $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \widehat{G}^3$ on a

$$\int_\Omega a(y)\, e^{i\,\psi_n}\ dy \quad \to \quad \delta(\alpha) \int_\Omega a(y)\, dy\,, \tag{6.2}$$

avec $\psi_n := \nu_n(\alpha_1)\, \varphi_1 + \nu_n(\alpha_2)\, \varphi_2 + \nu_n(\alpha_3)\, \varphi_3$, $\delta(\alpha) = 1$ lorsque $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ et $\delta(\alpha) = 0$ sinon. Lorsque $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, $\psi_n = 0$ et (6.2) est clair. Si les α_k ne sont pas tous égaux, la condition d'admissibilité implique que $|\nu_n(\alpha_1) - \nu_n(\alpha_3)|$ ou $|\nu_n(\alpha_2) - \nu_n(\alpha_3)|$ converge vers $+\infty$. Comme les différentielles $d\varphi_1$ et $d\varphi_2$ sont indépendantes, (6.2) en résulte.

Remarque. Dans (6.1) l'intégrale converge pour presque tout y, puisque les profils sont de carré intégrable sur G. Qu'elle définisse une fonction de carré intégrable en y, résulte des régularités $X_k \mathcal{V}_k \in L^2$.

7. Mesures de Young multi-échelles.

Remplaçant la notion de limite faible par celle de profil, la notion de mesure de Young se transpose en celle de mesure de Young multi-échelles. Cette construction a déjà été utilisée dans le cas périodique ([A][E][ES][JMR 2]). On l'étend ici à un groupe G général.

Dans ce paragraphe, G est un groupe Abélien compact, ρ_n une suite dans $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}; G)$ et on suppose que $(G, \{\rho_n\})$ est admissible. $H \subset \mathbf{S}$ est le groupe associée comme indiqué ci-dessus. φ une phase C^∞ sur Ω telle que $d\varphi \neq 0$ sur Ω.

DÉFINITION 7.1. *Soit u_n une suite bornée dans $L^\infty(\Omega)$. On dit que $(G, \{\rho_n\})$ (ou que H) est adapté à la suite u_n et à la phase φ, si pour toute fonction $F \in C^0(\mathbb{R})$, la suite $F(u_n)$ appartient à $\mathcal{L}^2_{os,\varphi}(H) + \mathcal{L}^2_{no,\varphi}$.*

À partir du Lemme 5.4, appliqué aux suites $F(u_n)$, on montre le théorème suivant.

THÉORÈME 7.2. *Soit u_n une suite bornée dans $L^\infty(\Omega)$. On suppose que H est adapté la suite u_n et à la phase φ. Alors, il existe une unique famille de probabilités $\mu_{y,g}(d\lambda)$, dépendant mesurablement de $(y, g) \in \Omega \times G$, telle que pour toute fonction $F \in C^0(\mathbb{R})$ et toute fonction $\mathcal{A} \in C^0_0(\Omega \times G)$*

$$\int_\Omega F(u_n(y))\ \mathcal{A}(y, \rho_n(\varphi(y)))\ dy \quad \to \quad \int_{\Omega\times G}\int_{\mathbb{R}} F(\lambda)\ \mu_{y,g}(d\lambda)\ dy\ dg\,. \tag{7.1}$$

De plus si l'on définit

$$\mathcal{F}(y, g)\ :=\ \int_{\mathbb{R}} F(\lambda)\ \mu_{y,g}(d\lambda)\ \in L^\infty(\Omega \times G) \tag{7.2}$$

et si $f_n(y)\ \sim\ \mathcal{F}(y, \rho_n(\varphi(y)))$ dans $L^2(\Omega)$, alors $F(u_n) - f_n$ est dans $\mathcal{L}^2_{no,\varphi}$.

Le membre de droite de (7.1) définit une mesure μ sur $\Omega \times G \times \mathbb{R}$, qu'on appellera mesure de Young multi-échelles de la suite u_n, relative au groupe H et à la phase φ. La mesure de Young “ordinaire” $\tilde{\mu}$ s'en déduit en intégrant en $g \in G$:

$$\int_{\Omega\times\mathbb{R}} a(y)\, F(\lambda)\, \tilde{\mu}_y(d\lambda)\, dy\ =\ \int_{\Omega\times G\times\mathbb{R}} a(y)\, F(\lambda)\, \mu_{y,g}(d\lambda)\, dg\, dy\,. \tag{7.3}$$

8. Comportement asymptotique des suites bornées de solutions de (1.1).

L'analyse esquissée aux paragraphes 4 et 5 conduit au résultat suivant.

PROPOSITION 8.1. *Soit $u_n = (u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$, une suite de solutions de* (1.1) *bornée dans $L^\infty(\Omega)$. Il existe une application strictement croissante $\ell : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, un groupe Abélien compact G et une suite $\rho_n \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G)$, tels que $(G, \{\rho_n\})$ est admissible et adapté aux suites $u_{k,\ell(n)}$ et aux phases φ_k pour $k \in \{1, 2, 3\}$.*

Ayant construit G et extrait une sous suite, les limites faibles et les profils de $f(u_n)$ s'expriment à l'aide des mesures de Young mulit-échelles.

PROPOSITION 8.2. *Soit* $u_n = (u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$*, une suite de solutions de* (1.1) *bornée dans* $L^\infty(\Omega)$*. On suppose que* $(G, \{\rho_n\})$ *est admissible et adapté aux* $u_{k,n}$ *et aux* φ_k*. Notons* μ_k *les mesures de Young multi-échelles associées. Pour* $f \in C^0(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ *et* $\mathcal{A} \in C_0^0(\Omega \times G)$*, on a*

$$\tag{8.1} \begin{aligned} \int_\Omega \mathcal{A}(y, \rho_n(\varphi_1(y)))\ f(y, u_{1,n}(y), u_{2,n}(y), u_{3,n}(y))\ dy \quad &\to \\ \int_{\Omega\times G\times G} \mathcal{A}(y, g_1)\ \mathcal{F}(y, g_1, g_2)\ dy\, dg_1\, dg_2\,, \end{aligned}$$

avec

$$\tag{8.2} \mathcal{F}_k(y, g_1, g_2) \ :=\ \int_{\mathbb{R}} f(y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\ \mu_{1,g_1}(d\lambda_1)\, \mu_{2,y,g_2}(d\lambda_2)\ \mu_{3,y,-g_1-g_2}(d\lambda_3)\,.$$

Il suffit de faire la démonstration lorsque $f(y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = a(y) f_1(\lambda_1) f_2(\lambda_2) f_3(\lambda_3)$. On applique alors le théorème 6.1 aux suites $v_{1,n} = \mathcal{A}(y, \rho_n(\varphi_1)\, f_1(u_{1,n})$, $v_{2,n} = f_2(u_{2,n})$ et $v_{3,n} = f_3(u_{3,n})$.

THÉORÈME 8.3. *Sous les hypothèses de la Proposition* (8.2)*, les mesures de Young multi-échelles* μ_k *vérifient*

$$\tag{8.3} X_k \mu_k \ -\ \partial_\lambda(A_k(y, g, \lambda)\, \mu_k) \ =\ 0\,,$$

avec

$$\tag{8.4} A_1(y, g, \lambda) \ :=\ \int_{G\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f_1(\lambda, \lambda_2, \lambda_3)\ \mu_{2,y,g_2}(d\lambda_2)\ \mu_{3,y,-g-g_2}(d\lambda_3)\ dg_2\,,$$

et des formules analogues pour A_2 *et* A_3*.*

La démonstration se fait en reprenant l'analyse esquissée au paragraphe 2, en utilisant des fonctions test de la forme $\mathcal{A}(y, \rho_n(\varphi_k(y)))$. Pour tout polynôme trigonométrique $\mathcal{A}$, on multiple (2.2) par $\mathcal{A}(y, \rho_n(\varphi_k(y)))$ et on intègre sur Ω. La limite du membre de gauche s'exprime à l'aide de μ_k. La Proposition 8.2 permet d'exprimer la limite du membre de droite à l'aide des mesures μ_k. Cela conduit aux équations (8.3).

Comme dans [JMR 4], les équations sont plus lisibles si l'on représente les mesures $\mu_{k,y,g}$ comme lois de variables aléatoires $U_k(y, g, \,.\,)$. Par exemple, on peut définir U_k sur $\Omega \times G \times]0, 1[$, par la condition que pour presque tout (y, g), $U_k(y, g, \,.\,)$ est la fonction croissante continue à droite réciproque de la fonction de répartition $\mu_{k,y,g}(]-\infty, \lambda[)$. Alors

$\mu_{k,y,g}$ est la mesure image de $d\theta$ par $U_k(y, g, \,.\,)$. Les équations (8.3) (8.4) sont équivalentes aux équations de l'optique géométrique résonante, dans lesquelles on remplace le tore $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ par un groupe compact général :

$$\begin{aligned} X_1(y,\partial_y)\, U_1(y,g,\theta) \;&=\\ &\int_{G\times]0,1[\times]0,1[} f_1\big(U_1(y,g,\theta), U_2(y,g_2,\theta_2), U_3(y,-g-g_2,\theta_3)\big)\; dg_2\, d\theta_2\, d\theta_3\,, \end{aligned} \tag{8.3}$$

et des équations analogues pour U_2 et U_3.

Le résultat suivant, répond à la question posée dans l'introduction. Il se déduit du théorème précédent et d'un résultat d'unicité pour le système (8.3) (8.4), qui implique in fine qu'il n'est pas nécessaire d'extraire de sous-suite si le groupe $(G, \{\rho_n\})$ est adapté aux données initiales.

Théorème 8.4. *Supposons que $(G, \{\rho_n\})$ est un groupe admissible, adapté aux données initiales $u_{k,n}(0,x)$ et aux phases initiales $\varphi_k(0,x)$ sur l'intervalle initial $\omega \subset \mathbb{R}$. Notons $\mu_{k,0}$ les mesures de Young multi-échelles associées sur $\omega \times G \times \mathbb{R}$. Alors $(G, \{\rho_n\})$ est adapté aux $u_{k,n}$ et φ_k sur Ω. Les mesures de Young multi-échelles associées vérifient* (8.3)(8.4) *avec les conditions initiales*

$$\mu_{k\,|t=0} \;=\; \mu_{k,0}\,. \tag{8.6}$$

Références.

[A] G.Allaire, Homogeneization and two scale convergence, S.I.A.M. J. Math. Anal., 23 (1992) pp 1482-1518.

[BB] W.Blaschke and G.Bol, *Geometrie der Gewebe*, Springer-Verlag, New York, 1938.

[DiP 1] R.Di Perna, Convergence of approximate solutions to conservation laws, Arch. for Rat. Mech. Anal., 82 (1983) pp 27-70.

[DiP 2] R.Di Perna, Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics, Comm. Math. Phys., 91 (1983) pp 1- 30.

[DiP 3] R.Di Perna, Compensated compactness and general systems of cnservation laws, Trans. Amer. Math. Soc., 292 (1985) pp 383-420.

[DiP 4] R.Di Perna, Measure valued solutions to conservation laws, Arch. for Rat. Mech. Anal., 88 (1985) pp 223-270.

[E] W.E, Homogeneization of linear and nonlinear transport equations, Comm. on Pure and Appl. Math., 45 (1992) pp 301-326.

[ES] W.E, D.Serre, Correctors for the homogeneization of conservation laws with oscillatory forcing terms,

[HK] J. Hunter and J. Keller, Weakly nonlinear high frequency waves, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), 547-569.

[HMR] J. Hunter, A. Majda, and R. Rosales, Resonantly interacting weakly nonlinear hyperbolic waves II: several space variables, Stud. Appl. Math. 75(1986), 187-226.

[J] J.L. Joly, Sur la propagations des oscillations semi-lineares en dimension 1 d'espace, C. R. Acad. Sc. Paris, t.296, 1983.

[JMR 1] J.-L. Joly, G. Metivier, and J. Rauch, Resonant one dimensional nonlinear geometric optics J. of Funct. Anal., 114, 1993, pp 106-231.

[JMR 2] J.-L. Joly, G. Metivier, and J. Rauch, Focusing at a point and absorption of nonlinear oscillations, Trans. Amer. Math. Soc., 347 (1995), pp 3921-3971.

[JMR 3] J.-L. Joly, G. Metivier, and J. Rauch, Compacité par compensation trilinéaire et optique géométrique non linéaire, Séminaire École Polytechnique, année 1993-94.

[JMR 4] J.-L. Joly, G. Metivier, and J. Rauch, Trilinear compensated compactness, Annals of Maths., 142 (1995), pp 121-169.

[McLPT] D.W.McLaughlin, G.Papanicolaou and L.Tartar, Weak limits of semi-linear hyperbolic systems with oscillating data, in Macroscopic Modelling of Turbulent Flow, Lecture Notes in Physics, 230 (1985), pp277-298.

[MR] A. Majda and R. Rosales, Resonantly interacting weakly nonlinear hyperbolic waves I: a single space variable, Stud. Appl. Math. 71(1984), 149-179.

[P] H. Poincaré, Sur les surfaces de translation et les fonctions Abeliennes, Bull. Soc. Math. France, 29 (1901), pp 61-86.

[Sch 1] S. Schochet, Resonant nonlinear geometric optics for weak solutions of conservation laws, J. Dif. Equ., 113 (1994) 473-504.

[Sch 2] S. Schochet, Fast singular limits of hyperbolic partial differential equations, J.Diff.Eq. 114 (1994), pp 474-512.

[T 1] L. Tartar, Solutions oscillantes des équations de Carleman, Séminaire Goulaouic-Schwartz, École Polytechnique, Paris, année 1980-0981.

[T 2] L. Tartar, Compensated compactness and applications to partial differential equations, Research Notes in Math., Nonlinear Analysis and Mechanics : Heriot-Watt Symposium, vol 4 (R.J.Knops ed.) Pitman Press 1979.

[T 3] L. Tartar, The compensated compactness method applied to systems of conservation laws, Systems of Nonlinear Partial Differential Equations, (J.M.Ball ed.) NATO ASI Series, C.Reidel 1983.

[W] A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, Paris 1940.