

Vecteurs aléatoires / Calcul de loi

Jérémie Bigot

Cours de probabilités MA105
ISAE/SUPAERO 1A

Année 2013 - 2014

- 1 Vecteurs aléatoires
- 2 Indépendance et covariance
- 3 Calcul de loi
- 4 Lien entre théorie de la mesure et probabilités

Rappel : définition d'une variable aléatoire réelle

- Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
- X variable aléatoire réelle (v.a.r) = application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$
- Loi de probabilité de X (mesure image) :
$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$$
 pour tout $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

Exemples de v.a.r

X poids d'un individu, $X(\omega) = 72kg$ (réalisation de X)

Y taille d'un individu, $Y(\omega) = 1.80m$ (réalisation de Y)

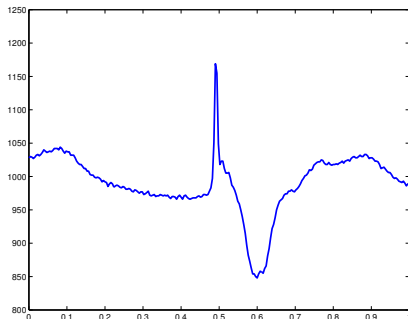
Questions :

- Comment modéliser le couple aléatoire (X, Y) ?
- Plus généralement, comment modéliser un vecteur aléatoire $Z = (X_1, \dots, X_n)$ de dimension n dont les composantes X_i sont des v.a.r ? - **cas de la plupart des expériences aléatoires !**

Exemple de réalisations de vecteurs aléatoires

Electrocardiogramme

$Z = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$: mesures du battement cardiaque enregistrées à des temps successifs $t_1 < t_2 < \dots < t_n$

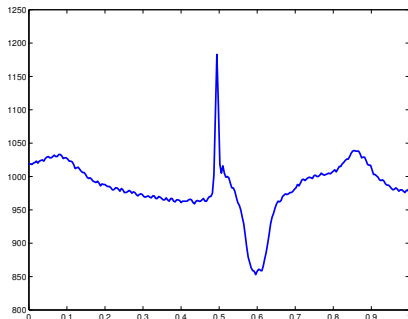


Réalisation $Z(\omega_1)$ pour $n = 128$ milli-secondes

Exemple de réalisations de vecteurs aléatoires

Electrocardiogramme

$Z = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$: mesures du battement cardiaque enregistrées à des temps successifs $t_1 < t_2 < \dots < t_n$

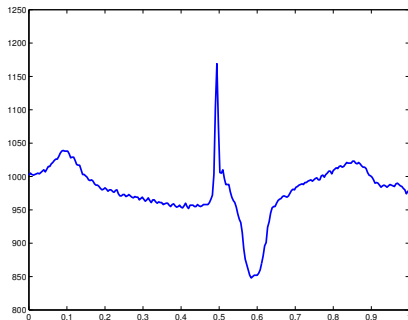


Réalisation $Z(\omega_2)$ pour $n = 128$ milli-secondes

Exemple de réalisations de vecteurs aléatoires

Electrocardiogramme

$Z = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$: mesures du battement cardiaque enregistrées à des temps successifs $t_1 < t_2 < \dots < t_n$

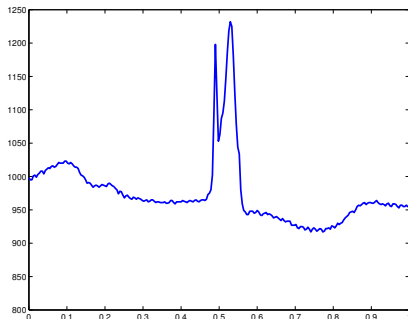


Réalisation $Z(\omega_3)$ pour $n = 128$ milli-secondes

Exemple de réalisations de vecteurs aléatoires

Electrocardiogramme

$Z = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$: mesures du battement cardiaque enregistrées à des temps successifs $t_1 < t_2 < \dots < t_n$



Réalisation $Z(\omega_4)$ pour $n = 128$ milli-secondes

Exemple de réalisations de vecteurs aléatoires

Images 2D d'un visage

$Z = (X_{i,j})_{1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$: mesures en niveaux de gris d'une images 2D aux pixels (i,j) i.e. dimension de Z : $n = N_1 \times N_2$.



Réalisation $Z(\omega_1)$ pour $n = 112 \times 92$ pixels

Exemple de réalisations de vecteurs aléatoires

Images 2D d'un visage

$Z = (X_{i,j})_{1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$: mesures en niveaux de gris d'une images 2D aux pixels (i,j) i.e. dimension de Z : $n = N_1 \times N_2$.



Réalisation $Z(\omega_2)$ pour $n = 112 \times 92$ pixels

Exemple de réalisations de vecteurs aléatoires

Images 2D d'un visage

$Z = (X_{i,j})_{1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$: mesures en niveaux de gris d'une images 2D aux pixels (i,j) i.e. dimension de Z : $n = N_1 \times N_2$.



Réalisation $Z(\omega_3)$ pour $n = 112 \times 92$ pixels

Exemple de réalisations de vecteurs aléatoires

Images 2D d'un visage

$Z = (X_{i,j})_{1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$: mesures en niveaux de gris d'une images 2D aux pixels (i,j) i.e. dimension de Z : $n = N_1 \times N_2$.



Réalisation $Z(\omega_4)$ pour $n = 112 \times 92$ pixels

Définition d'un vecteur aléatoire

- Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
- $X = (X_1, \dots, X_n)$ vecteur aléatoire = application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$
- Loi de probabilité de X (loi conjointe) :
 $P_X(B) = P((X_1, \dots, X_n) \in B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$

Caractérisation de la loi de $X \in \mathbb{R}^n$ à l'aide de sa **fonction de répartition** F_X :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, F_X(x_1, \dots, x_n) = P([X_1 \leq x_1] \cap \dots \cap [X_n \leq x_n])$$

Questions ?

- Caractérisation de la loi de X et de ses composantes X_i ?
- “Lien” entre X_i et X_j ($i \neq j$) ? Notions d'indépendance et de corrélation.
- Espérance et (co)variance d'un vecteur aléatoire $X \in \mathbb{R}^n$?

Couples aléatoires discrets

Soit X et Y deux v.a.r. discrètes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, avec

$$X(\Omega) = \{x_i ; i \in I\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_j ; j \in J\}, \text{ } I, J \text{ dénombrables .}$$

La **loi de probabilité du couple** (X, Y) est entièrement déterminée par

$$p_{ij} = P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) \text{ pour } i \in I \text{ et } j \in J.$$

Définition

*Les v.a. X et Y sont appelées **v.a. marginales** du couple (X, Y) ; les lois des v.a. X et Y sont appelées **lois marginales** du couple (X, Y) .*

Lois marginales de X et Y

$$P(X = x_i) = p_{i.} = \sum_j p_{ij} \quad \text{et} \quad P(Y = y_j) = p_{.j} = \sum_i p_{ij}.$$

Couples aléatoires discrets - Lancé de deux dés

Exemple : lancer de 2 dés à 6 faces, X_1 et X_2 v.a. représentant le résultat obtenu avec chaque dé. On pose $Y = \max(X_1, X_2)$

Tableau des probabilités du couple aléatoire discret (X_1, Y)

X_1 / Y	1	2	3	4	5	6	$P(X_1 = x_i) = p_i$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$	$\frac{1}{6}$
$P(Y = y_j) = p_j$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	

Couples aléatoires à densité (dits continus)

Soit X et Y deux v.a. réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, i.e.

$$X \in \mathbb{R} \text{ et } Y \in \mathbb{R}.$$

Définition

La loi du couple (X, Y) est dite **absolument continue** s'il existe une application $f_{X,Y}$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$, positive et borélienne (c'est-à-dire que, pour tout $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $f_{X,Y}^{-1}(B) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$), appelée **densité** du couple (X, Y) , telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$F_{X,Y}(x, y) = P([X \leq x] \cap [Y \leq y]) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) du dv.$$

Couples aléatoires à densité (dits continus)

Proposition

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u, v) du \right) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u, v) dv \right) du = 1.$

2) *Les lois marginales de X et de Y admettent les densités f_X et f_Y définies par*

$$f_X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u, v) dv \quad \text{et} \quad f_Y(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u, v) du.$$

3) *En tout (x_0, y_0) où $f_{X,Y}$ est continue, on a que*

$$f_{X,Y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

Couples aléatoires à densité - Exemple

Modélisation d'un projectile ponctuel tirée sur une cible selon une probabilité uniformément répartie sur la cible

Soit (X, Y) un couple de loi uniforme sur le disque $D(O, R)$.

- **Densité du couple** (X, Y)

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi R^2} \mathbb{1}_{D(O,R)}(x, y).$$

- **Lois marginales** : en utilisant que $x^2 + y^2 \leq R^2$ pour $(x, y) \in D(O, R)$, on obtient que

$$f_X(x) = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2} \mathbb{1}_{[-R,R]}(x) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \frac{2\sqrt{R^2 - y^2}}{\pi R^2} \mathbb{1}_{[-R,R]}(y).$$

- 1 Vecteurs aléatoires
- 2 Indépendance et covariance
- 3 Calcul de loi
- 4 Lien entre théorie de la mesure et probabilités

Indépendance

Soit X et Y deux vecteurs aléatoires définis sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ avec

$$X \in \mathbb{R}^n \text{ et } Y \in \mathbb{R}^m.$$

Définition

Indépendance des vecteurs aléatoires X et Y si

$$P([X \in A] \cap [Y \in B]) = P([X \in A]) P([Y \in B])$$

pour tout $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ et $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$.

Indépendance - Cas discret

Soit X et Y deux v.a.r. discrètes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, avec

$$X(\Omega) = \{x_i ; i \in I\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_j ; j \in J\}, \text{ } I, J \text{ dénombrables .}$$

Proposition

*Deux v.a.r. discrètes X et Y sont dites **indépendantes** ssi, pour tout $(i, j) \in I \times J$, on a :*

$$P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = P([X = x_i])P([Y = y_j]),$$

c'est-à-dire

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j.$$

Indépendance - Cas continu

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité $f_{X,Y}$ admettant pour densités marginales f_X et f_Y .

Proposition

*Les v.a.r. X et Y sont dites **indépendantes** ssi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :*

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Indépendance - Exemple

Soit (X, Y) un couple de loi uniforme sur le disque $D(O, R)$.

- **Densité du couple** (X, Y) , $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi R^2} \mathbb{1}_{D(O,R)}(x, y)$.
- **Lois marginales**

$$f_X(x) = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2} \mathbb{1}_{[-R,R]}(x) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \frac{2\sqrt{R^2 - y^2}}{\pi R^2} \mathbb{1}_{[-R,R]}(y).$$

Donc

$$f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$$

Les v.a. X et Y **ne sont pas indépendantes !**

Remarque : la non-indépendance de X et Y peut se déduire également à partir de la forme du support de $f_{(X,Y)}$ dans $\mathbb{R}^2$!

Espérance d'un vecteur aléatoire

Soit $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire (discret ou continu).

Définition

L'espérance d'un vecteur aléatoire X de dimension n est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ constitué des espérances de chacune des coordonnées i.e.

$$\mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_n)).$$

Proposition (Linéarité de l'espérance)

Soit $b \in \mathbb{R}^m$ et $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. L'espérance du vecteur aléatoire $Y = AX + b \in \mathbb{R}^m$ est

$$\mathbb{E}(Y) = A\mathbb{E}(X) + b.$$

Cas particulier :

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \dots + \mathbb{E}(X_n).$$

Covariance et corrélation

Soit $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire (discret ou continu).

Covariance de X_i et X_j

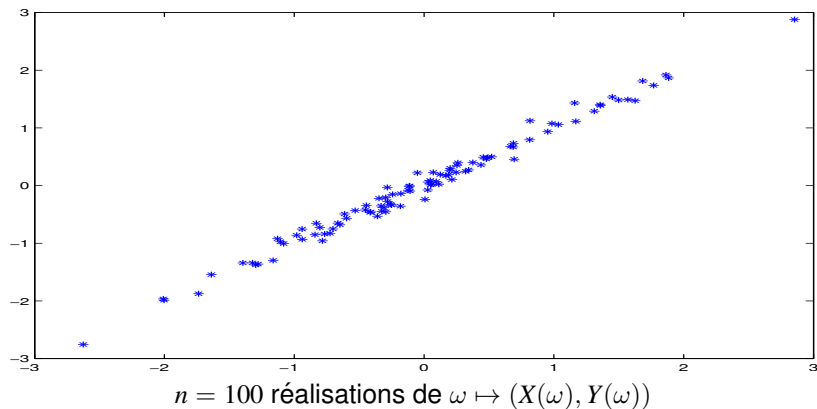
$$\begin{aligned}\text{cov}(X_i, X_j) &= \mathbb{E}((X_i - \mathbb{E}(X_i))(X_j - \mathbb{E}(X_j))) \\ &= \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)\end{aligned}$$

Coefficient de corrélation linéaire entre X_i et X_j

$$\rho(X_i, X_j) = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{var}(X_i)}\sqrt{\text{var}(X_j)}} \in [-1, 1]$$

Covariance et corrélation

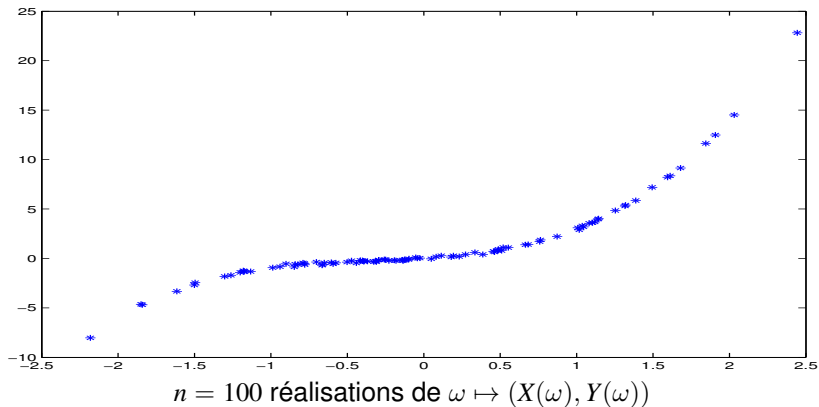
Exemple 1 : $Y = X + \epsilon$ avec $X \sim N(0, 1)$ et $\epsilon \sim N(0, 0.1^2)$



Corrélation : $\rho(X, Y) = 0.995$.

Covariance et corrélation

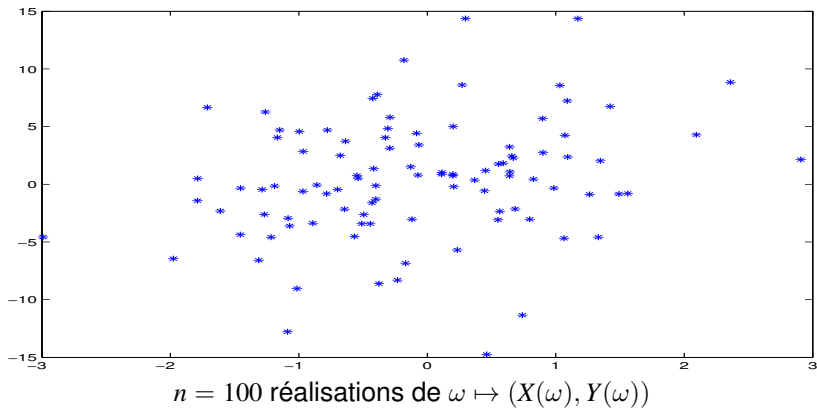
Exemple 2 : $Y = X^3 + X^2 + X + \epsilon$ avec $X \sim N(0, 1)$ et $\epsilon \sim N(0, 0.1^2)$



Corrélation : $\rho(X, Y) = 0.8164$.

Covariance et corrélation

Exemple 3 : $Y = X + \epsilon$ avec $X \sim N(0, 1)$ et $\epsilon \sim N(0, 5^2)$



Corrélation : $\rho(X, Y) = 0.1961$.

Produit de v.a.r. indépendantes

Proposition

Soit (X, Y) un couple aléatoire (discret ou continu). Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Illustration : soient $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes (loi de Poisson de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$).

Comment déterminer la loi de la v.a. $Z = X + Y$?

Produit de v.a.r. indépendantes

Definition

Soit X une v.a.r. discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. La **fonction génératrice** de X est définie par

$$G_X(t) = \sum_{n \geq 0} t^n P([X = n]) = \mathbb{E}(t^X), \quad t \in [-1, 1].$$

Remarque : la fonction G_X caractérise entièrement la loi de X car

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Produit de v.a.r. indépendantes

Cas de v.a. de Poisson : si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ alors

$$G_X(t) = \sum_{n \geq 0} t^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda(t-1)}, \quad t \in [-1, 1].$$

et donc $G_Y(t) = e^{\mu(t-1)}$.

Ainsi, si $Z = X + Y$, on a que

$$\begin{aligned} G_Z(t) &= \sum_{n \geq 0} t^n P([Z = n]) = \mathbb{E}(t^Z) \\ &= \mathbb{E}(t^{X+Y}) = \mathbb{E}(t^X t^Y) = \mathbb{E}(t^X) \mathbb{E}(t^Y) \\ &= G_X(t) G_Y(t) = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}, \quad t \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Consequence : $Z \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$!

Transformation d'un couple de v.a.r.

Proposition (également vraie dans le cas discret)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité $f_{X,Y}$. Si φ est une fonction de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(X, Y)$ admette une espérance, alors :

$$\mathbb{E}(\varphi(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

Illustration : si $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, on retrouve bien que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy \right) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y),\end{aligned}$$

dans le cas où X et Y sont des v.a. indépendantes.

Covariance et indépendance

Soit $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire (discret ou continu).

Proposition

Si X_i et X_j sont des v.a. indépendantes alors $\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$ et donc

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = 0.$$

Attention - La réciproque est en général fausse !
Une covariance nulle n'implique pas l'indépendance !!

Décorrélation $\neq$ Indépendance !! (En général...)

Matrice de covariance

Définition

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)'$ un vecteur aléatoire de dimension n . On appelle matrice de covariance de X , la matrice carrée de taille $n \times n$, notée Σ_X , dont les coefficients $(\Sigma_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont donnés par

$$\Sigma_{i,j} = \text{cov}(X_i, X_j).$$

En notation matricielle, la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire X est

$$\Sigma_X = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))').$$

Remarques

- La diagonale de Σ_X est le vecteur $(\text{var}(X_1), \dots, \text{var}(X_n))$.
- Si les coordonnées de X sont indépendantes, alors Σ_X est une matrice diagonale.

Variance et somme de v.a.r.

Proposition

Soient $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ un couple de v.a.r. (discret ou continu). Alors,

- $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$
- *si X et Y sont **indépendantes**, alors $\text{cov}(X, Y) = 0$ et donc*

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y).$$

- 1 Vecteurs aléatoires
- 2 Indépendance et covariance
- 3 Calcul de loi**
- 4 Lien entre théorie de la mesure et probabilités

Problème général du calcul de loi

- Soit $X \in \mathbb{R}^n$ vecteur aléatoire défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi de probabilité **connue** P_X
- Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonction mesurable
- Soit Y le vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^m$ tel que $Y = \varphi(X)$

Problème : quelle est la loi de probabilité P_Y de Y ?

Cas de variables aléatoires discrètes

Soit X une v.a. discrète à valeurs réelles. Alors $Y = \varphi(X)$ est également une v.a. discrète à valeurs réelles. Soit

$$X(\Omega) = \{x_i ; i \in I\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_j ; j \in J\}, \quad I, J \text{ dénombrables .}$$

Alors

$$P_Y(y_j) = P(Y = y_j) = \sum_{\{i : \varphi(x_i) = y_j\}} P(X = x_i)$$

Exemple : $Y = X^2$ avec $X \in \mathbb{Z}^*$. Donc $Y \in \mathbb{N}^*$ est de loi

$$P(Y = y) = P(X = \sqrt{y}) + P(X = -\sqrt{y})$$

pour tout $y \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{y} \in \mathbb{N}$, et

$$P(Y = y) = 0,$$

pour tout $y \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{y} \notin \mathbb{N}$

Cas de variables aléatoires continues à valeurs réelles

Soit X une v.a. réelle de densité f_X continue sur $\mathbb{R}$, et $Y = X^2$. La loi de Y peut se caractériser à l'aide de sa fonction de répartition :

$$F_Y(y) = P([Y \leq y]) = P([X^2 \leq y])$$

- Si $y < 0$, alors $F_Y(y) = 0$ et $f_Y = F'_Y = 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$.
- Si $y \geq 0$, alors $F_Y(y) = P([-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}]) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$
et $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} (f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}))$

Finalement

$$f_{X^2}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} (f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})) \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(y).$$

Cas de variables aléatoires continues à valeurs réelles

Soit X une v.a. réelle de densité f_X continue sur $\mathbb{R}$. Supposons que $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soit un C^1 difféomorphisme (croissant).

Alors, la loi de $Y = \varphi(X)$ peut se caractériser à l'aide de sa fonction de répartition

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq \varphi^{-1}(y)) = F_X(\varphi^{-1}(y)), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Et la densité de Y est donnée par

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))} f_X(\varphi^{-1}(y)), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Changement de variables multi-dimensionnel

Soit X un vecteur aléatoire de densité f_X . Le support de f_X est le sous-ensemble D de $\mathbb{R}^n$ défini par $D = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > 0\}$.
Hypothèse : D est un ouvert.

Proposition

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un C^1 difféomorphisme de D dans son image $\varphi(D)$. Alors, le vecteur aléatoire $Y = \varphi(X)$ admet pour densité

$$\forall Y \in \varphi(D), f_Y(y) = |Jac(\varphi^{-1})(y)| f_X(\varphi^{-1}(y)),$$

où

$$Jac(\varphi^{-1})(y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1^{-1}(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1^{-1}(y)}{\partial y_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n^{-1}(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n^{-1}(y)}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

avec $\varphi^{-1}(y) = (\varphi_1^{-1}(y), \dots, \varphi_n^{-1}(y))'$.

Loi de la somme de deux variables aléatoires

Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité $f_{X,Y}$.

Question : loi de $Z = X + Y$?

On pose $(U, V) = (X + Y, Y)$ et $\varphi(x, y) = (u, v) = (x + y, y)$. Alors φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même avec $\varphi^{-1}(u, v) = (x, y) = (u - v, v)$.

On a que $Jac(\varphi^{-1})(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, donc $f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(u - v, v)$ et

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u, v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u - v, v) dv.$$

Proposition

Si X et Y sont indépendantes, alors $f_{X,Y}(u - v, v) = f_X(u - v)f_Y(v)$ et donc

$$f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u - v)f_Y(v)dv = f_X \star f_Y(u).$$

- 1 Vecteurs aléatoires
- 2 Indépendance et covariance
- 3 Calcul de loi
- 4 Lien entre théorie de la mesure et probabilités

Intégrale de Lebesgue et variables aléatoires

Soit X application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$ i.e. v.a.r.

Loi de probabilité de X (mesure image) : $P_X(B) = P(X \in B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Distinction entre variables aléatoires discrètes et continues ?

v.a.r. discrète

$$X(\Omega) = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$F_X(x) = P([X \leq x]) = \sum_{x_n \leq x} P([X = x_n])$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n P([X = x_n])$$

v.a.r. à densité f_X

$$X(\Omega) \subset \mathbb{R}$$

$$F_X(x) = P([X \leq x]) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

Au sens de l'intégrale de Lebesgue, on peut écrire dans les deux cas (discrets et continus) que

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x).$$

à l'aide du théorème de la mesure image.

Intégrale de Lebesgue et variables aléatoires

Cas des v.a.r. discrètes : $X(\Omega) = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $p_n = P([X = x_n])$.

La loi de probabilité de X est la mesure discrète

$$P_X = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \delta_{x_n},$$

où

$$\delta_{x_n}(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_n \in B \\ 0 & \text{si } x_n \notin B, \end{cases}$$

est la mesure de Dirac au point x_n .

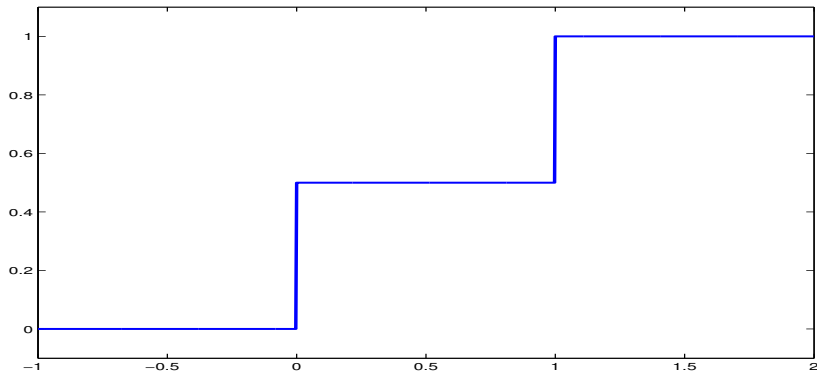
Sa fonction de répartition peut s'écrire sous la forme

$$F_X(x) = P([X \leq x]) = P_X([-\infty, x]) = \sum_{x_n \leq x} p_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \delta_{x_n}([-\infty, x]).$$

Exemple : $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$ et $x_0 = 0, x_1 = 1$.

Intégrale de Lebesgue et variables aléatoires

Exemple : $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$ et $x_0 = 0, x_1 = 1$.



$$x \mapsto F_X(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \delta_{x_n}([-\infty, x]) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x) + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[1, +\infty[}(x).$$

Intégrale de Lebesgue et variables aléatoires

Cas des v.a.r. discrètes : $X(\Omega) = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $p_n = P([X = x_n])$.

La loi de probabilité de X est la mesure discrète

$$P_X = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \delta_{x_n},$$

où

$$\delta_{x_n}(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_n \in B \\ 0 & \text{si } x_n \notin B, \end{cases}$$

est la mesure de Dirac au point x_n .

Son espérance est donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n x_n.$$

Intégrale de Lebesgue et variables aléatoires

Cas des v.a.r. continues :

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ i.e. $f \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda(x) = 1$.

Une variable aléatoire réelle X est dite continue et de densité f si sa loi de probabilité est telle que

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X(B) = \int_B f(x) d\lambda(x).$$

Son espérance est donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx,$$

lorsque intégrale de Lebesgue = intégrale de Riemann.

Intégrale de Lebesgue et variables aléatoires

Théorie de la mesure et intégrale de Lebesgue = point de vue unifié pour traiter simultanément tout type de variables aléatoires !!

Exemple : on lance une pièce équilibrée. Si le résultat est FACE alors on pose $X = 0$. Si le résultat est PILE alors on simule $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (loi normale centrée réduite).

Question : quelle est la loi de probabilité de X ?

Intégrale de Lebesgue et variables aléatoires

Théorie de la mesure et intégrale de Lebesgue = point de vue unifié pour traiter simultanément tout type de variables aléatoires !!

Exemple : on lance une pièce équilibrée. Si le résultat est FACE alors on pose $X = 0$. Si le résultat est PILE alors on simule $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (loi normale centrée réduite).

Problème : la loi de la v.a. X n'est ni continue ni discrète !!

On a en fait que

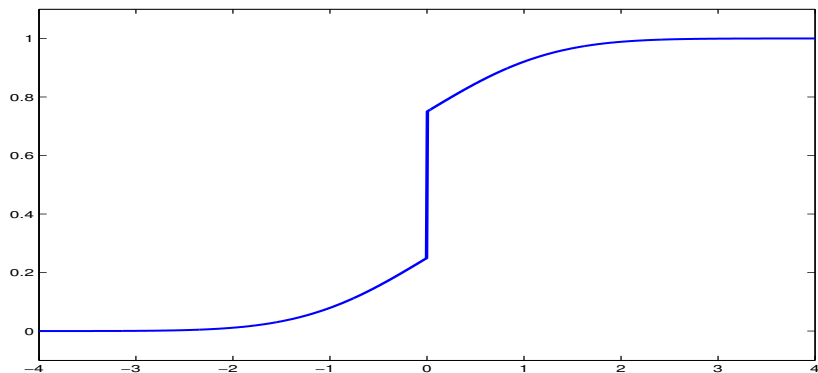
$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X(B) = \frac{1}{2}\delta_0(B) + \frac{1}{2}P_{\mathcal{N}(0,1)}(B)$$

La fonction de répartition de X a un saut en zéro (strictement croissante par morceaux)

$$F_X(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) + \frac{1}{2}F_{\mathcal{N}(0,1)}(x).$$

Intégrale de Lebesgue et variables aléatoires

Exemple : on lance une pièce équilibrée. Si le résultat est FACE alors on pose $X = 0$. Si le résultat est PILE alors on simule $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (loi normale centrée réduite).



$$x \mapsto F_X(x) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x) + \frac{1}{2} F_{\mathcal{N}(0,1)}(x).$$