# PC de Probabilités - Cours 3TMA4 Formation ENSICA

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)

Jérémie Bigot

3 juillet 2013

# Remerciements

L'ensemble de ces exercices et leurs corrigés sont inspirés du document "Exercices corrigés de probabilités" par Manuel Samuelides, SUPAERO, 1998, ainsi que des exercices de probabilités préparés par Claudie Chabriac qui sont disponibles à l'adresse :

`https://sites.google.com/site/cchabriac/`

## Table des matières

# 1 Introduction aux Probabilités

**Exercice 1.1**
Quel doit être le nombre minimum de personnes pour que la probabilité que deux d'entre elles au moins soient nées le même mois, soit égale à 0.9 ? [on considère que tous les mois ont la même longueur].

---

**Exercice 1.2** : *Application de l'identité de Poincaré.*
Un préposé répartit au hasard $n$ lettres, destinées à $n$ personnes. Calculer la probabilité pour que chaque lettre arrive à son destinataire, ainsi que la probabilité pour qu'il n'y en ait aucune qui arrive à son destinataire ; que vaut-elle quand $n$ est très grand ?

---

**Exercice 1.3** : *Problème du double-six.*
À l'époque de Pascal, riche des premières tentatives de modélisation du hasard, le chevalier de Méré personnage bien en cour, esprit curieux de sciences et joueur impénitent, demanda à ce dernier, lequel des deux événements $A_1$ ou $A_2$, était le plus fréquent :

$A_1 = \{$ *obtenir au moins un six en* $4$ *lancers d'un dé*$\}$

$A_2 = \{$ *obtenir au moins un double six en* $24$ *lancers de deux dés*$\}$.

Qu'en pensez-vous ?

---

**Exercice 1.4**
Un groupe de $2n$ personnes s'assoit autour d'une table.

(1) De combien de façons peuvent-elles le faire ?

(2) S'il y a autant de femmes que d'hommes, quelle est la probabilité de respecter l'alternance homme, femme, homme,... tout autour de la table ?

---

**Exercice 1.5**
Quelle est la probabilité pour que les nombres obtenus à la suite de $n$ jets d'un dé soient dans un ordre croissant ?

## Corrigés des exercices

## Exercice 1.1

Soit $\phi(n)$ la probabilité qu'aucun couple de personnes ne soient nées le même mois dans un groupe de $n$ personnes. On a, pour $n \leqslant 12$,

$$\phi(n) = \left(1 - \frac{1}{12}\right)\left(1 - \frac{2}{12}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{12}\right)$$

Il s'agit de déterminer l'entier $n$ tel que $\phi(n) \leqslant 0,1$ et le plus proche de 0,1. On trouve $n = 8$.

---

## Exercice 1.2

On numérote les lettres et les boîtes des destinataires : à chaque lettre, on associe la boîte choisie par le facteur. On fait l'hypothèse que l'on met une lettre et une seule dans chaque boîte. Il est plus simple de commencer par la deuxième question.

(1) Il y a $n!$ distributions possibles pour les lettres et 1 seule correspond au cas où chaque lettre est à sa place.

Ainsi, la probabilité que chaque lettre atteigne son destinataire est $\dfrac{1}{n!}$.

(2) Soit $A_i$ l'événement "la lettre $i$ est à sa place". On cherche $P(E)$ où

$$E = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n},$$

donc $P(E) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$ et on détermine $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$ à l'aide de la formule de Poincaré, que l'on établit aisément par récurrence sur $n$ :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left( \sum_{1 \leqslant i_1 \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right).$$

Or $P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \dfrac{(n-k)!}{n!}$ car pour $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$, les lettres $i_1, \cdots, i_k$ sont obligées d'être dans leur boîte et les $n-k$ lettres restantes sont réparties au hasard parmi les $n-k$ boîtes restantes, soit $(n-k)!$ choix possibles.
Or, il y a $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ façons de choisir les $\{i_1, \cdots, i_k\}$ ($k$ éléments parmi $n$) et donc

$$\sum_{1 \leqslant i_1 \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \frac{1}{k!}.$$

Finalement,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} \text{ et } P(E) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{1}{k!}$$

(qui tend vers $\frac{1}{e}$ quand $n$ tend vers $+\infty$).

Ainsi, la probabilité qu'aucune lettre ne soit à sa place est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}$.

---

**Exercice 1.3**

On a ici 2 expériences différentes et 2 événements différents associés à celle-ci.

Expérience 1 : lancer d'un dé 4 fois de suite. $\Omega_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\ ;\ 1 \leqslant x_i \leqslant 6\}$,

$A_1$ : "faire au moins un 6". Tous les résultats ont même chance de se réaliser donc

$$P(A_1) = \frac{\mathrm{card}A_1}{\mathrm{card}\Omega_1}.$$

Il est plus pratique de déterminer $P(\overline{A_1})$ où $\overline{A_1}$ est l'événement "pas de 6".

$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1)$ avec $\overline{A_1} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\ ;\ 1 \leqslant x_i \leqslant 5\}$.

$P(\overline{A_1}) = \dfrac{\mathrm{card}\overline{A_1}}{\mathrm{card}\Omega}$ avec $\mathrm{card}\overline{A_1} = 5^4$ et $\mathrm{card}\Omega_1 = 6^4$ d'où $P(\overline{A_1}) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^4$ et

$$P(A_1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,518.$$

Expérience 2 : lancer de deux dés 24 fois de suite.

$$\Omega_2 = \{((x_1, y_1), \cdots, (x_{24}, y_{24}))\,,\ 1 \leqslant x_i,\ y_i \leqslant 6\},$$

$A_2$ : "faire au moins un double 6". Tous les résultats ont même chance de se réaliser donc

$$P(A_2) = \frac{\mathrm{card}A_2}{\mathrm{card}\Omega_2}.$$

Il est plus pratique de déterminer $P(\overline{A_2})$ où $\overline{A_2}$ est l'événement "pas de double 6".

$P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2)$ avec $\overline{A_2} = \{((x_1, y_1), \cdots (x_{24}, y_{24}))\ ;\ (x_i, y_i) \neq (6, 6)\}$.

On a 35 choix pour chaque $(x_i, y_i)$ donc $\mathrm{card}\overline{A_2} = (35)^{24}$.

Finalement $P(\overline{A_2}) = \dfrac{\mathrm{card}\overline{A_2}}{\mathrm{card}\Omega_2} = \left(\dfrac{35}{36}\right)^{24}$ et

$$P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,491.$$

Conclusion : il est donc plus probable de faire au moins un 6 en 4 lancers.

---

**Exercice 1.4**

On obtient la même configuration par rotation (chaque personne a même voisin de droite et même voisin de gauche). Ainsi, s'il y a $2n$ places, il y a $2n$ configurations identiques.

(1) Première approche : on numérote les individus (par exemple, selon leur ordre d'arrivée). à chaque individu, on associe une chaise et une seule (celle qu'il choisit) : il y a alors $(2n)!$ possibilités mais chaque configuration est obtenue $2n$ fois.

$$\text{nombre de configurations différentes : } \frac{(2n)!}{2n} = (2n-1)!.$$

Deuxième approche : pour éviter les configurations identiques, on fixe la première personne sur la chaise qu'il a choisie et pour les autres, on a $(2n-1)!$ possibilités.

(2) On respecte l'alternance.

Première méthode : Le premier a $2n$ choix, puis les places des hommes et des femmes sont imposées : $n$ possibles pour ceux de l'autre sexe, d'où $n!$ possibilités et $n-1$ possibles pour ceux du même sexe, d'où $(n-1)!$ possibilités. Finalement, $2n \times (n!) \times (n-1)!$ possibilités, dont $2n$ qui donnent la même configuration (par rotation).

$$\text{nombre de configurations respectant l'alternance : } n!(n-1)!$$

Deuxième méthode : Une fois le premier placé, il reste $n!$ possibilités pour les personnes de l'autre sexe et $(n-1)!$ pour celle du même sexe. D'où $n!(n-1)!$ configurations directement.

---

**Exercice 1.5**

On aura $n_1$ fois la face 1, $n_2$ fois la face 2,..., $n_6$ fois la face 6. Lorsque $n_1, \cdots, n_6$ sont fixés, la suite est unique : les $n_1$ 1, puis les $n_2$ 2,..., puis les $n_6$ 6. Il faut donc trouver le nombre de 6-uples d'entiers (éventuellement nuls) $(n_1, \cdots, n_6)$ tels que $n_1 + \cdots + n_6 = n$ ou plus généralement, avec $k$ au lieu de 6, le nombre des $(n_1, \cdots, n_k)$ tels que $n_1 + \cdots + n_k = n$.

Pour celà, on considère $k$ tiroirs : celui des 1,..., celui des $k$, et $n$ objets en tout (identiques), que l'on souhaite répartir dans les $k$ tiroirs. Le problème est donc de trouver le nombre de répartitions possibles.

Solution de l'exercice pour $n = 2$ :

$\to$ avec 1 comme premier tiroir $(1,1), \cdots, (1,k)$ : $k$ choix possibles ;
$\to$ avec 2 comme premier tiroir $(2,2), \cdots, (2,k)$ : $k-1$ choix possibles ;
$\vdots$
$\to$ avec $k-1$ comme premier tiroir $(k-1,k-1), (k-1,k)$ : 2 choix possibles ;
$\to$ avec $k$ comme premier tiroir $(k,k)$ : 1 choix possible.

Au total $k + (k-1) + \cdots + 2 + 1 = \sum_{j=1}^{k} \binom{j}{1} = k(k+1)/2 = \binom{k+1}{2}$ choix possibles.

Solution de l'exercice pour $n = 3$ :

$\to$ avec 1 comme premier tiroir, les autres dans $k$ tiroirs : $\binom{k+1}{2}$ choix possibles ;
$\to$ avec 2 comme premier tiroir, les autres dans $k-1$ tiroirs : $\binom{k}{2}$ choix possibles ;
$\vdots$
$\to$ avec $k-1$ comme premier tiroir, les autres dans les 2 derniers tiroirs : $\binom{3}{2}$ choix possibles ;
$\to$ avec $k$ comme premier tiroir, tous dans le dernier tiroir : $\binom{2}{2} = 1$ choix possible.

Au total, $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{k+1}{2} = \sum_{j=2}^{k+1} \binom{j}{2}$ choix possibles, mais cette méthode devient vite compliquée...

Il est plus simple d'aligner les $n$ objets "$o$", puis de placer les cloisons des tiroirs : avec $k$ tiroirs, on a $k-1$ cloisons "$c$" à placer. On a donc en tout $n+k-1$ entités (cloisons ou objets). Une configuration est parfaitement déterminée par un $(n+k-1)$ u-plet constitué de $k-1$ "$c$" et de $n$ "$o$". Il y a autant de tels $(n+k-1)$ uplets que de façons de placer les $k-1$ "$c$", soit $\begin{pmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$.
Dans le cas du lancer de $n$ dés, le nombre de résultats donnant une suite croissante est donc $\begin{pmatrix} n+5 \\ n \end{pmatrix}$ et la probabilité cherchée est :

$$\frac{\binom{n+5}{5}}{6^n} = \frac{\binom{n+5}{n}}{6^n}.$$

# 2 Variables aléatoires discrètes

**Exercice 2.1**
Si $X$ est une v.a. à valeurs entières positives, démontrer que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n \geqslant 0} P(X > n).$$

---

**Exercice 2.2**

(1) Vérifier que la loi de Poisson définie par $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ est bien une loi de probabilité ; démontrer que son espérance et sa variance sont égales à $\lambda$.

(2) Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

---

**Exercice 2.3**
Démontrer, à l'aide de deux méthodes, que l'espérance d'une v.a. binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est égale à $np$ et que sa variance est égale à $np(1-p)$.

---

**Exercice 2.4**
Un radar explore une région de l'espace contenant $n$ objets ; lors d'un balayage, chaque objet est capté avec la probabilité $p$.

(1) Déterminer les probabilités pour qu'un objet donné soit capté par 2, 3, $\cdots$, $b$ balayages ; en déduire la probabilité pour que $k$ objets donnés parmi les $n$, soient captés par $b$ balayages.

(2) Quel est le nombre $b^*$ de balayages pour que la probabilité de capter tous les objets soit égale à une probabilité fixée $\pi^*$ ?

(3) Combien de balayages doit-on effectuer pour que le nombre moyen d'objets découverts soit supérieur ou égal à $m$ ?

---

**Exercice 2.5**
Un sauteur en hauteur tente de franchir successivement les hauteurs 1,2,..,$N$. Les résultats des sauts sont indépendants entre eux, et la probabilité de succès pour un saut de hauteur $N$ est égale à $\dfrac{1}{N}$; d'autre part, le sauteur est éliminé dès son premier échec.
Déterminer la loi de la hauteur $X$ du dernier saut réussi, ainsi que $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

**Corrigés des exercices**

**Exercice 2.1**

$$\sum_{i\geqslant 0} P([X>i]) = \sum_{i\geqslant 0}\sum_{k=i+1}^{+\infty} P([X=k]) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=0}^{k-1} P([X=k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP([X=k]) = \mathbb{E}(X).$$

En effet, on fait la somme sur tous les couples $(i,k)$ vérifiant $i \geqslant 0$ et $k > i$, c'est-à-dire $0 \leqslant i < k$ et, comme il s'agit de termes positifs, on peut intervertir l'ordre des termes dans la sommation (Fubini). Ainsi, au lieu de sommer d'abord sur $k \geqslant i+1$ pour tout $i \geqslant 0$, on peut commencer par sommer sur $i \in \{0, \cdots, k-1\}$ pour tout $k \geqslant 1$. On a bien

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{i\geqslant 0} P([X>i])}$$

---

**Exercice 2.2**

(1) $P_X = \mathcal{P}(\lambda)$, c'est-à-dire que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P([X=n]) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda.$$

Idem pour la variance.

*Remarque :* On est conduit à effectuer ainsi deux sommations. Pour éviter cela, on peut utiliser la fonction génératrice :

$$G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n P([X=n]) = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n\ e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda s)^n}{n!} = e^{-\lambda}\, e^{\lambda s}.$$

On a alors $G'_X(s) = e^{-\lambda}\,\lambda\, e^{\lambda s}$ et $G''_X(s) = e^{-\lambda}\,\lambda^2\, e^{\lambda s}$, puis $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \lambda$ et

$$\mathrm{var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

On a donc bien $\boxed{\mathbb{E}(X) = \mathrm{var}(X) = \lambda}$.

(2) $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}P(X=n) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n+1)!}$. Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n+1)!} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda}-1).$$

On a donc $\boxed{\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right) = \dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}}$.

---

**Exercice 2.3**

(1) $X$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ donc $G_X(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k P([X=k]) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k p^k (1-p)^{n-k} = (zp+1-p)^n$. $G'_X(z) = np(zp+1-p)^{n-1}$ et $G''_X(z) = n(n-1)p^2(zp+1-p)^{n-2}$ donc

$\boxed{\mathbb{E}(X) = np}$ et $\text{var}(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2$, c'est-à-dire $\boxed{\text{var}(X) = np(1-p)}$.

Autre solution : on peut aussi calculer directement l'espérance, mais c'est plus long !

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP([X=k]) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \overset{(i=k-1)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n!}{i!(n-1-i)!}p^{i+1}(1-p)^{n-1-i} \\
&= np\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^i(1-p)^{n-1-i} = np(p+1-p)^{n-1} = np.
\end{aligned}$$

(2) On écrit $X = \sum_{i=1}^{n} B_i$ où les $B_i$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On a alors (voir chapitre 4) $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(B_i)$ et $\text{var}(X) = \sum_{i=1}^{n}\text{var}(B_i)$ avec $\mathbb{E}(B_i) = 0 \times P(B_i = 0) + 1 \times P(B_i = 1) = p$, $\mathbb{E}(B_i^2) = 0^2 \times P(B_i = 0) + 1^2 \times P(B_i = 1) = p$ et $\text{var}(B_i) = \mathbb{E}(B_i^2) - \mathbb{E}(B_i)^2 = p - p^2 = p(1-p)$ donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = np}$ et $\boxed{\text{var}(X) = np(1-p)}$.

---

**Exercice 2.4**

(1)

$$\begin{aligned}
P(\text{objet donné soit capté par 2 balayages}) &= 1 - P(\text{objet ne soit pas capté par 2 balayages}) \\
&= 1-(1-p)^2.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
P(\text{objet donné soit capté par } b \text{ balayages}) &= 1 - P(\text{objet ne soit pas capté par } b \text{ balayages}) \\
&= 1-(1-p)^b.
\end{aligned}$$

$$P(k \text{ objets quelconques soient captés par } b \text{ balayages}) = \binom{n}{k}(1-(1-p)^b)^k(1-p)^{b(n-k)}$$

(2) $P(\text{tous les objets soient captés par } b \text{ balayages}) = (1-(1-p)^b)^n$

d'où $\pi^* = (1-(1-p)^{b^*})^n$, soit $(1-p)^{b^*} = 1-(\pi^*)^{1/n}$ et finalement $b^* = \dfrac{\ln(1-(\pi^*)^{1/n})}{\ln(1-p)}$.

(3) On a vu en (2) que le nombre $X$ d'objets captés en $b$ balayages est de loi $\mathcal{B}(n\,;\ 1-(1-p)^b)$ ; donc $\mathbb{E}(X) = n(1-(1-p)^b)$ et $\mathbb{E}(X) \geqslant m$ si et seulement si $b \geqslant \dfrac{\ln\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}\right)}{\ln(1-p)}$.

---

**Exercice 2.5**

Soit $A_k$ l'événement "le sauteur réussit la hauteur $k$". On a, par hypothèse, $P(A_k) = \dfrac{1}{k}$.
Si $X$ désigne la hauteur du dernier saut réussi, on a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (car $P(A_1) = 1$) et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$[X = n] = A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap \overline{A_{n+1}}.$$

Les sauts étant supposés indépendants, les événements $A_k$ le sont aussi et les probabilités se multiplient, soit :

$$P([X=n]) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k) \times P(\overline{A_{n+1}}) = \frac{1}{n!} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Ainsi, $\boxed{P([X=n]) = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

$$\begin{aligned} G_X(z) &= \mathbb{E}(z^X) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \\ &= e^z - 1 - \frac{1}{z}\left(e^z - 1 - z\right) = e^z \left(1 - \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z} \end{aligned}$$

$$G'_X(z) = e^z \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) - \frac{1}{z^2} \text{ et } G''_X(z) = e^z \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^3}\right) + \frac{2}{z^3}$$

donc $G'_X(1) = e - 1$ et $G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = 2 + (e-1) - (e-1)^2 = 3e - e^2$, soit :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = e - 1} \text{ et } \boxed{\text{var}(X) = 3e - e^2}.$$

## 3 Variables aléatoires continues

**Exercice 3.1**

(1) Soit la v.a. $X$ de densité $f_X$ et $Y = aX + b$. Densité de $Y$ ?

(2) Application : $X$ est de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $Y = \sigma X + m$.

---

**Exercice 3.2**

$X$ est une v.a. de densité $f_X$ ; calculer la densité, l'espérance et la variance de |X|. Considérer le cas où X est de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

---

**Exercice 3.3**

Considérons une v.a. $X$ exponentielle de paramètre $\lambda$. Soit $Y$ la partie entière de $X$ notée $\lfloor X \rfloor$.

(1) Démontrer que $Y$ est de loi géométrique.

(2) Calculer $\mathbb{E}(Y)$, $V(Y)$ ainsi que la loi de $X - Y$.

---

**Exercice 3.4** *Slalom*

Un skieur affronte un slalom de 20 portes. S'il ne tombe pas, son temps de parcours (en secondes) $X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m = 50, \sigma^2 = 4)$. À chaque porte, il peut tomber avec la probabilité $\frac{1}{20}$, ce qui lui fait perdre 4 secondes. On admet que les chutes sont indépendantes entre elles.

Quelle probabilité a-t-il de décrocher la Flèche de platine (attribuée lorsque le temps de descente est inférieur à 52) ?

**Corrigés des exercices**

**Exercice 3.1**

(1) $Y = aX + b\,;\ F_Y(y) = P([Y \leqslant y]) = P([aX + b \leqslant y]) = P([aX \leqslant y - b])$.

$\rightarrow$ Si $a > 0$, $F_Y(y) = P\left(\left[X \leqslant \dfrac{y-b}{a}\right]\right) = F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$ et $f_Y(y) = F'_Y(y) = \dfrac{1}{a} f_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$.

$\rightarrow$ Si $a < 0$, $F_Y(y) = P\left(\left[X \geqslant \dfrac{y-b}{a}\right]\right) = 1 - P\left(\left[X < \dfrac{y-b}{a}\right]\right) = 1 - F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$ car $F_X$ est continue et $P\left(\left[X = \dfrac{y-b}{a}\right]\right) = 0$. On a alors $f_Y(y) = F'_Y(y) = -\dfrac{1}{a} f_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$.

Dans tous les cas, $\boxed{f_Y(y) = \dfrac{1}{|a|} f_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)}$.

(2) Si $P_{X^*} = \mathcal{N}(0,1)$, $f_{X^*}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$,

$$f_{\sigma X^* + m}(y) = \frac{1}{|\sigma|\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

---

**Exercice 3.2**

Si $T = |X|$, $x \mapsto |x|$ est non bijective sur $R$ ; on travaille donc avec la fonction de répartition.

$$F_T(t) = P([T \leqslant t]) = P([|X| \leqslant t]).$$

$\rightarrow$ Si $t \leqslant 0$, $F_T(t) = 0$.
$\rightarrow$ Si $t > 0$, $F_T(t) = P([-t \leqslant X \leqslant t]) = F_X(t) - F_X(-t)$ ($F_X$ continue) et

$$f_T(t) = F'_T(t) = f_X(t) + f_X(-t).$$

Finalement, $\boxed{f_T(t) = [f_X(t) + f_X(-t)]\ \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)}$.

On a ensuite $\mathbb{E}(T) = \displaystyle\int t f_T(t)\, dt$ et $\mathrm{var}(T) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(T)^2 = \mathrm{var}(X) + \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(T)^2$.

Si $P_X = \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\boxed{f_{|X|}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[\exp\left(-\dfrac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\dfrac{(t+m)^2}{2\sigma^2}\right)\right]\ \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(t)}$.

En particulier, si $m = 0$ ($f_X$ paire), $f_{|X|}(t) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\dfrac{t^2}{2\sigma^2}\right)\ \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(t)$ ;

$$\mathbb{E}(|X|) = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[-\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

et $\mathrm{var}(|X|) = \sigma^2\left(1 - \dfrac{2}{\pi}\right)$.

---

**Exercice 3.3**

(1) $P([Y = k]) = P([k \leqslant X < k+1] = F_X(k+1) - F_X(k) = (1 - e^{-\lambda(k+1)}) - (1 - e^{-\lambda k})$, soit $P([Y = k]) = e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda})$ pour tout $k \in N$. Donc $Y$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}_0(1 - e^{-\lambda})$.

On a donc $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$ et $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} = \dfrac{1}{e^{\lambda}-1}$.

(2) Pour tout $u \in [0,1[$,

$$P([X-Y \leqslant u]) = P\left(\bigcup_{k\in N}[X-Y \leqslant u] \cap [Y=k]\right) = \sum_{k\geqslant 0} P([k \leqslant X \leqslant k+u]).$$

Or $P([k \leqslant X \leqslant k+u]) = F_X(k+u) - F_X(k) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+u)} = e^{-\lambda k}(1-e^{-\lambda u})$, avec $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} e^{-\lambda k} = \frac{1}{1-e^{-\lambda}}$ donc

$$F_{X-Y}(u) = \frac{1-e^{-\lambda u}}{1-e^{-\lambda}} \text{ pour } u \in [0,1[ \text{ et } \boxed{f_{X-Y}(u) = \frac{\lambda\, e^{-\lambda u}}{1-e^{-\lambda}}\,\mathbf{1}_{[0,1[}(u)}.$$

**Exercice 3.4**

Si $T$ est le temps du parcours, on a $T = X + 4\times N$, où $X$ suit (approximativement) la loi normale $\mathcal{N}(50,4)$, et $N$ la loi binomiale $\mathcal{B}\left(20, \dfrac{1}{20}\right)$ (il y a 20 portes, chacune ayant la probabilité $p = \dfrac{1}{20}$ d'être accrochée. On cherche $P([T<52])$. On a :

$$\begin{aligned} P([T<52]) &= P([X+4N<52]) = P\left(\bigcup_{n=0}^{20}[X+4N<52]\cap[N=n]\right) \\ &= P\left(\bigcup_{n=0}^{20}[X+4n<52]\cap[N=n]\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{20}[X<52-4n]\cap[N=n]\right) \\ &= \sum_{n=0}^{20} P([X<52-4n]\cap[N=n]). \end{aligned}$$

Comme $X$ et $N$ sont indépendantes, on a

$$P([T<52]) = \sum_{n=0}^{20} P([X<52-4n])P([N=n]).$$

$X$ suit la loi $\mathcal{N}(50,4)$ donc $\dfrac{X-50}{2}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, de fonction de répartition $\Phi$, donnée par les tables pour $x>0$, (avec, pour $x<0$, $\Phi(x) = 1-\Phi(-x)$). Ainsi :

$$P([X<52-4n]) = P\left(\left[\frac{X-50}{2} < \frac{52-4n-50}{2}\right]\right) = \Phi(1-2n)$$

et $P([N=n]) = \dbinom{20}{n} p^n(1-p)^{20-n} = \dbinom{20}{n}\left(\dfrac{1}{20}\right)^n\left(\dfrac{19}{20}\right)^{20-n}$ et donc :

$$P([T<52]) = \sum_{n=0}^{20} \Phi(1-2n)\binom{20}{n}\frac{19^{20-n}}{20^{20}}.$$

Pour $n=0$, $\Phi(1)\approx 0,841$, pour $n=1$, $\Phi(-1)\approx 0,159$, pour $n=2$, $\Phi(-3)\approx 0,001$ et pour $n=3$, $\Phi(-5)$ est négligeable. On peut donc négliger les valeurs de $n=3$ à $n=20$, ce qui allège agréablement les calculs, puisqu'il ne reste que 3 termes à calculer.

$$P([T<52]) \approx \Phi(1)\left(\frac{19}{20}\right)^{20} + 20\Phi(-1)\frac{19^{19}}{20^{20}} + 190\Phi(-3)\frac{19^{18}}{20^{20}} \approx 0,37.$$

## 4 Vecteurs aléatoires - Calculs de lois

**Exercice 4.1** *Optimisation d'un multisenseur*
On estime un paramètre $p$ inconnu à l'aide de deux systèmes de mesure dont les estimations sont données par les v.a. $X_1$ et $X_2$ :

$$X_1 = p + U_1 \ et\ X_2 = p + U_2$$

où les v.a. $U_i$ représentent des erreurs indépendantes centrées et de variances $\sigma_i^2$.
Déterminer l'estimateur de l'inconnue $p$ sous la forme de la v.a. $\widehat{p} = aX_1 + bX_2$, vérifiant $\mathbb{E}(\widehat{p}) = p$ ( $\widehat{p}$ est dit sans biais) et ayant la plus petite variance possible.

**Exercice 4.2**
On tire des boules l'une à la suite de l'autre, sans remise, dans une urne contenant 2 boules blanches et $N$ boules noires, jusqu'à ce que sorte la deuxième boule blanche ; soient les v.a. $X$ et $Y$, égales aux numéros de tirage des deux blanches.

(1) Loi et espérance de $X$ ? [*rappelons* : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$]

(2) Par un raisonnement simple, déterminer la loi de $(X, Y)$. Dessiner le support du vecteur aléatoire $(X, Y)$. Calculer la loi et l'espérance de $Y$.

---

**Exercice 4.3**
Soit un vecteur gaussien $X = (X_1, X_2)$ de matrice de covariance $\Gamma_X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et d'espérance $m_X = (1, 2)$.
Déterminer le coefficient de corrélation $\rho_{(X_1,X_2)}$ et la densité $f_{(X_1,X_2)}$.

---

**Exercice 4.4**
On effectue une suite de tirages successifs avec remise dans une urne contenant des jetons gagnants (portant le numéro 1), en proportion $p$ ($p \in ]0, 1[$), et des jetons perdants (portant le numéro 0), en proportion $q = 1 - p$.
Soit $X$ la longueur de la première "série" et $Y$ la longueur de la deuxième "série". Ainsi, par exemple, pour la suite de tirages $111001011\cdots$, on a $X = 3$ et $Y = 2$ et pour $01101\cdots$, on a $X = 1$ et $Y = 2$. [*On rappelle que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$ *pour* $|x| < 1$].

(1) a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $X$.

b) Montrer que $X$ admet une espérance $\mathbb{E}(X) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p}$. Montrer que $\mathbb{E}(X)$ est minimale lorsque $p = \dfrac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

(2) a) Montrer, pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $P([X = i] \cap [Y = j]) = p^{i+1}q^j + q^{i+1}p^j$.

b) En déduire la loi de la variable aléatoire $Y$ et montrer que $\mathbb{E}(Y) = 2$.

(3) a) Etablir que, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes [*considérer, par exemple,* $P([X = 1] \cap [Y = 1])$]. Démontrer que, si $p = \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes.

b) Etablir que $\mathrm{cov}(X, Y) = -\dfrac{(1-2p)^2}{p(1-p)}$.

**Corrigés des exercices**

**Exercice 4.1**
L'espérance mathématique étant linéaire, on a

$$\mathbb{E}(\hat{p}) = a\mathbb{E}(X_1) + b\mathbb{E}(X_2) = ap + bp = (a+b)p \ ;$$

si $\hat{p}$ est sans biais, alors $a + b = 1$ $(a, b > 0)$.
D'autre part, les variables $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes (car les variables $U_1$ et $U_2$ le sont). On a alors

$$V(\hat{p}) = a^2V(X_1) + b^2V(X_2) = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2.$$

Il s'agit donc de minimiser $\phi(a, b) = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2$ sous la contrainte $a + b = 1$, ce qui revient à chercher le minimum de la fonction $\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $a \mapsto a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2$.

$\psi'(a) = 2a\sigma_1^2 - 2(1-a)\sigma_2^2$ est nul pour $a(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = \sigma_2^2$, soit $\boxed{a = \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \text{ et } b = \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$.

Si, par exemple, $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, alors $a < b$ : résultat intuitivement prévisible.

---

**Exercice 4.2**

$\Omega = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{N+2})$ avec 2 "$B$" et $N$ "$N$"$\}$. Il y a $\dbinom{N+2}{2}$ choix de places pour les 2 "$B$" donc $\text{card}\Omega = \dbinom{N+2}{2} = \dfrac{(N+2)(N+1)}{2}$.

(1) $X$ est le numéro de la première boule blanche apparue donc $X(\Omega) = [\![1, N+1]\!]$.
$[X = k]$ est réalisé si la première boule blanche apparaît au rang $k$ et la deuxième à l'un des rangs suivants : il y a donc $N + 2 - k$ choix équiprobables. Ainsi,

$$\boxed{P([X = k]) = \frac{2(N+2-k)}{(N+1)(N+2)}}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{N+1} kP([X = k]) = \frac{1}{\binom{N+2}{2}}\left[(N+2)\sum_{k=1}^{N+1} k - \sum_{k=1}^{N+1} k^2\right] \\
&= \frac{1}{\binom{N+2}{2}}\left[(N+2)\frac{(N+1)(N+2)}{2} - \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6}\right] \\
&= N + 2 - \frac{2N+3}{3} = \frac{3N+6-2N-3}{3} = \frac{N+3}{3}.
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{3}(N+3)}$.

(2) $(X, Y)$ détermine un unique tirage complet et, comme tous ces tirages ont même probabilité et qu'il y en a $\dbinom{N+2}{2}$, la loi du couple $(X, Y)$ est définie par :

$$P([(X, Y) = (i, j)]) = \begin{cases} \dfrac{2}{(N+1)(N+2)} & \text{si } 1 \leqslant i < j \leqslant N+2 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$P([Y=j]) = \sum_{i=1}^{j-1} P([(X,Y)=(i,j)]) = \frac{2(i-1)}{(N+1)(N+2)}.$$

*Remarque :* On peut aussi trouver $Y$ directement en procédant comme pour $X$. $Y$ est le numéro de la deuxième boule blanche apparue donc $Y(\Omega) = [\![2, N+2]\!]$.

$[Y=k]$ est réalisé si la deuxième boule blanche apparaît au rang $k$ et la première à l'un des rangs précédents : il y a donc $k-1$ choix équiprobables. Ainsi,

$$\boxed{P([Y=k]) = \frac{2(k-1)}{(N+1)(N+2)}.}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{N+1} kP([Y=k]) = \frac{1}{\binom{N+2}{2}} \left[\sum_{k=2}^{N+2} k(k-1)\right] = \frac{1}{\binom{N+2}{2}} \left[\sum_{j=1}^{N+1} j(j+1)\right] \\
&= \frac{1}{\binom{N+2}{2}} \left[\frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6} + \frac{(N+1)(N+2)}{2}\right] \\
&= \frac{2N+3}{3} + 1 = \frac{2N+3+3}{3} = \frac{2N+6}{3}.
\end{aligned}$$

Finalement, $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{2}{3}(N+3) = 2\mathbb{E}(X)$.

*Remarque :* On a aussi $P([N+3-Y=k]) = P([Y=N+3-k]) = \dfrac{N+2-k}{\binom{N+2}{2}} = P([X=k])$, avec $(N+3-Y)(\Omega) = [\![1, N+1]\!]$ donc $N+3-Y$ et $X$ ont même loi.
On a alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(N+3-Y) = N+3-\mathbb{E}(Y)$ d'où $\mathbb{E}(Y) = N+3-\mathbb{E}(X) = \dfrac{2}{3}(N+3)$, ce qui permet d'éviter les gros calculs.

---

**<u>Exercice 4.3</u>**

La densité d'un vecteur gaussien $X$ de $\mathbb{R}^n$, de vecteur espérance $m_X$ et de matrice de covariance $\Gamma_X$ est donnée par :

$$f_X(x) = f_X(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\det(\Gamma_X))^{-\frac{1}{2}}.\mathrm{e}^{(-\frac{1}{2}\ {}^t(x-m_X).\Gamma_X^{-1}(x-m_X))}$$

Ici, $n=2$, $\mathrm{var}(X_1)=3$, $\mathrm{var}(X_2)=2$ et $\mathrm{cov}(X_1,X_2)=1$ donc

$$\rho_{X_1,X_2} = \frac{\mathrm{cov}(X_1,X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$\det\Gamma_X = 5$ et $\Gamma_X^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ donc

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{5}}\ \exp\left(-\frac{1}{2}Q(x_1,x_2)\right)$$

avec

$$\begin{aligned}
Q(x_1,x_2) &= (x_1-1, x_2-2)\Gamma_X^{-1}\ {}^t(x_1-1, x_2-1) \\
&= \frac{2}{5}(x_1-1)^2 + \frac{3}{5}(x_2-1)^2 - \frac{2}{5}(x_1-1)(x_2-2)
\end{aligned}$$

---

**Exercice 4.4**

On notera $A_k$ l'événement "le $k^{ieme}$ jeton tiré est gagnant".

(1) a) $X(\Omega) = N^*$ et $X = k$ signifie que la première série a pour longueur $k$, c'est-à-dire que les $k$ premiers jetons sont gagnants et le $(k+1)^{ieme}$ perdant ou bien les $k$ premiers jetons sont perdants et le $(k+1)^{ieme}$ gagnant. On a donc :
$[X = k] = (A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap \overline{A}_{k+1}) \cup (\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_k \cap A_{k+1})$ et $P([X = k]) = p^k q + q^k p$ si $k \in N^*$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kP([X = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp^k(1-p) + \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^k p$. En utilisant les espérances de lois géométriques, on a alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p}$.

Soit $f(x) = \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{1-x}{x}$ : $f'(x) = \dfrac{1-x+x}{(1-x)^2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-(1-x)^2}{x^2(1-x)^2} = \dfrac{2x-1}{x^2(1-x)^2}$.
$f'$ est négative sur $]0, \frac{1}{2}[$, nulle en $\frac{1}{2}$ et positive sur $]\frac{1}{2}, 1[$, et $\mathbb{E}(X) = f(p)$. On a donc :

$$\mathbb{E}(X) \text{ minimale lorsque } p = \frac{1}{2}, \text{ et cette valeur minimale est } f(\frac{1}{2}) = 2.$$

(2) a) $[X = i] \cap [Y = j]$ signifie que la première série est de longueur $i$ et la deuxième de longueur $j$. On a donc, si $p_{ij} = P([X = i] \cap [Y = j])$,
$p_{ij} = P\left[(A_1 \cap \cdots \cap A_i \cap \overline{A}_{i+1} \cap \cdots \overline{A}_{i+j} \cap A_{i+j+1}) \cup (\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_i \cap A_{i+1} \cap \cdots A_{i+j} \cap \overline{A}_{i+j+1})\right]$
et, toujours en utilisant l'indépendance des tirages, on obtient :

$$\text{pour tout } (i,j) \in (N^*)^2,\ P([X = i] \cap [Y = j]) = p^{i+1}q^j + q^{i+1}p^j.$$

b) $\displaystyle P([Y = j]) = \sum_{i=1}^{+\infty} P([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{i=1}^{+\infty} p^{i+1}q^j + \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i+1}p^j$ avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} p^{i+1} = \sum_{i=2}^{+\infty} p^i = \frac{p^2}{q}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} q^{i+1} = \frac{q^2}{p}$. On en déduit $P([Y = j]) = p^2q^{j-1} + q^2p^{j-1}$ pour $j \in N^*$.
$\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} jP([Y = j]) = \sum_{j=1}^{+\infty} j(p^2q^{j-1} + q^2p^{j-1}) = \frac{p^2}{q}\sum_{j=1}^{+\infty} jq^j + \frac{q^2}{p}\sum_{j=1}^{+\infty} jp^j$ soit $\mathbb{E}(Y) = 2$.

(3) a) $P([X = 1] \cap [Y = 1]) = p^2q + pq^2 = pq(p+q) = pq$. D'autre part $P([X = 1]) = 2pq$ et $P([Y = 1]) = p^2 + q^2 = 2p^2 - 2p + 1$. On a donc :

$$P([X = 1])P([Y = 1]) - P([X = 1] \cap [Y = 1]) = pq(4p^2 - 4p + 2 - 1) = pq(2p-1)^2.$$

Si $p \neq \frac{1}{2}$, $P([X = 1] \cap [Y = 1]) \neq P([X = 1])P([Y = 1])$ : $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.
Si $p = q = \frac{1}{2}$, pour $(i,j) \in (N^*)^2$, on a $P([X = i] \cap [Y = j]) = \dfrac{1}{2^{i+j}}$, $P([X = i]) = \dfrac{1}{2^i}$ et $P([Y = j]) = \dfrac{1}{2^j}$, donc $P([X = i] \cap [Y = j]) = P([X = i])P([Y = j])$ :

$$\boxed{\text{si } p = \frac{1}{2}, \text{ les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$$

b) $\mathbb{E}(XY) = \sum_{i,j\geqslant 1} ijp_{ij} = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} ip^{i+1}\right)\left(\sum_{j=1}^{+\infty} jq^{j}\right) + \left(\sum_{i=1}^{+\infty} ip^{i}\right)\left(\sum_{j=1}^{+\infty} jq^{j+1}\right) = \frac{p^2}{q^2}\frac{q}{p^2} + \frac{p}{q^2}\frac{q^2}{p^2}$ donc $\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{pq}$ et $\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{pq} - 2\frac{p^2+q^2}{pq}$, soit

$$\operatorname{cov}(X,Y) = -\frac{(1-2p)^2}{p(1-p)}.$$

## 5 Vecteurs aléatoires - Calculs de lois

**Exercice 5.1**
Démontrer directement que si $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes, de lois binomiales respectives $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$, alors $X_1 + X_2$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

---

**Exercice 5.2**
Calculer $f_{\frac{X}{Y}}(u)$ dans le cas où $X$ et $Y$ sont des variables indépendantes de loi uniforme de support $]0, 1]$. Que vaut $\mathbb{E}\left(\dfrac{X}{Y}\right)$ ?

---

**Exercice 5.3**
Déterminer la densité du produit de deux v.a. $X$, $Y$ connaissant la densité $f_{(X,Y)}$ de support $D_X \times D_Y$.
Application au cas où $X$ et $Y$ sont indépendantes, de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de $XY$.

---

**Exercice 5.4**
Deux personnes arrivent selon une loi uniforme entre 5 et 6 heures, à un lieu de rendez-vous, et décident que la première arrivée ne devra pas attendre l'autre plus de 10 minutes.
(1) Déterminer les lois de $X_1 - X_2$ et de $|X_1 - X_2|$ où $X_1$ et $X_2$ sont les temps d'arrivée des personnes.
(2) Probabilité pour qu'elles se rencontrent ?

---

**Exercice 5.5**
Soit $X$ et $Y$ des v.a. indépendantes de même loi Gamma de paramètres $\lambda$ et $\alpha$.
(1) Loi conjointe et lois marginales du vecteur $\left(X + Y, \dfrac{X}{X+Y}\right)$ ?
(2) Loi de la somme de $n$ v.a. exponentielles indépendantes de paramètre $\lambda$ ?

---

**Exercice 5.6**
Un ascenseur ne peut supporter une charge supérieure à 1 000 kg. Chaque utilisateur potentiel de l'ascenseur a un poids $X_i$ aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(m = 80\ ;\ \sigma^2 = 225)$.
Notation : $Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ est la v.a. associée au poids de $n$ individus.
Quel est le nombre maximum de personnes que l'on peut autoriser à monter dans l'ascenseur si l'on veut que le risque de surcharge et donc de non-démarrage soit égal à $10^{-5}$ ? [*On donne* $P(\mathcal{N}(0; 1) > 4,5) = 3.10^{-6}$].

---

**Exercice 5.7**
Soit les v.a. indépendantes : $X$ normale centrée réduite et $B$ définie par $P(B = 1) = P(B = -1) = 0,5$. Posons $Y = BX$.
(1) Montrer que $Y$ est normale centrée réduite.
(2) $X$ et $Y$ sont-elles dépendantes ? Décorrélées ?
(3) Calculer $P(X + Y = 0)$. La loi de $X + Y$ est-elle absolument continue ?

---

**Exercice 5.8** *Étude du vecteur gaussien en coordonnées sphériques*
Soit le vecteur normal $(X_1, X_2, X_3)$ de composantes indépendantes, chacune de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $T$ la bijection :

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \longrightarrow \quad T(x_1, x_2, x_3) = (r, \phi, \theta) \in [0, +\infty[\times[0, \pi[\times[-\pi, \pi[$$

avec

$$\begin{cases} x_1 = r \sin\phi \cos\theta \\ x_2 = r \sin\phi \sin\theta \\ x_3 = r \cos\phi \end{cases}$$

Soit $(R, \Phi, \Theta)$ le vecteur aléatoire image de $(X_1, X_2, X_3)$ par $T$.

(1) Calculer la densité conjointe de $(R, \Phi, \Theta)$, ainsi que les densités marginales. En déduire le caractère isotrope du vecteur $(X_1, X_2, X_3)$. Caractériser la loi de probabilité portée par toute sphère centrée en 0.

(2) Calculer la loi de $R^2$.

**Corrigés des exercices**

**Exercice 5.1**

$$\begin{aligned} P([X_1+X_2=k]) &= \sum_{i=0}^{k} P([X_1=i])P([X_2=k-i]) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i} p^i(1-p)^{n_1-i}\binom{n_2}{k-i}\binom{n_2}{k-i} p^{k-i}(1-p)^{n-n_1-k+i} \\ &= p^k(1-p)^{n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n_1}{i}\binom{n-n_1}{k-i} = p^k(1-p)^{n-k}\binom{n}{k} \end{aligned}$$

Inconvénient : formule de dénombrement peu évidente. On peut aussi utiliser la fonction gérératrice : $G_{X_1}(s) = \sum_{k=0}^{n_1} s^k \binom{n_1}{k} p^k(1-p)^{n_1-k} = (ps+1-p)^{n_1}$. De même, $G_{X_2}(s) = (ps+1-p)^{n_2}$ et $G_{X_1+X_2}(s) = \mathbb{E}(s^{X_1+X_2}) = \mathbb{E}(s^{X_1}s^{X_2})$. Or $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes, donc $G_{X_1+X_2}(s) = G_{X_1}(s)G_{X_2}(s) = (ps+1-p)^{n_1+n_2}$, fonction génératrice de la loi binomiale $\mathcal{B}(n_1+n_2, p)$.

---

**Exercice 5.2**

On commence par déterminer la loi de $h(X,Y) = \left(\frac{X}{Y}, Y\right)$ par la formule du changement de variables :

$$f_{h(X,Y)}(u,v) = f_{X,Y}(h^{-1}(u,v)) \times |J_{h^{-1}}(u,v)|$$

car $h$ est une bijection de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. Pour déterminer $h^{-1}$, on a $h(x,y) = (u,v) = \left(\frac{x}{y}, y\right)$, donc $y=v$ et $x=uv$ et $h^{-1} : (u,v)\mapsto(uv,v)$, puis $J_{h^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v$ d'où

$$f_{\left(\frac{X}{Y},Y\right)}(u,v) = f_{(X,Y)}(uv,v)|v|$$

On a alors :

$$f_{X/Y}(u) = \int f_{X,Y}\,(uv,v)\,|v|\,dv = \int \mathbf{1}_{]0,1[}(uv)\mathbf{1}_{]0,1[}(v)\,v\,dv = \int \mathbf{1}_{]0,1/u[\cap]0,1[}(v)\,v\,dv.$$

2 cas :

- $0 < u \leqslant 1$ : $f_{X/Y}(u) = \int_0^1 v\,dv = \frac{1}{2}$ ;
- $1 < u$ : $f_{X/Y}(u) = \int_0^{1/u} v\,dv = \frac{1}{2u^2}$ ;

$$f_{X/Y}(u) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{]0,1]}(u) + \frac{1}{2u^2}\mathbf{1}_{]1,+\infty[}(u)$$

$u\,f_{X/Y}(u) \sim \frac{1}{2u}$ en $+\infty$, qui n'est pas intégrable. Donc $X/Y$ n'admet pas d'espérance...

---

**Exercice 5.3**

Appliquons le théorème 4.4 : pour toute application $\varphi$ continue, bornée, définie sur $\mathbb{R}^2$ et ayant posé $h(x) = x_1 x_2$ :

$$E(\varphi(X_1X_2)) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x_1x_2) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, dP_{X_1X_2}(y).$$

La dernière intégrale vaut :

$$\int_{D_Y} \left( \int_{D_{X_2}} \varphi(y)\, f_{X_1}\left(\frac{y}{x_2}\right) f_{X_2}(x_2) \frac{1}{|x_2|}\, dx_2 \right) dy$$

d'où, par identification presque sûre :

$$f_{X_1,X_2}(y) = \int_{(x_2 \ t.q. \frac{y}{x_2} \in D_{X_1})} f_{X_1}\left(\frac{y}{x_2}\right) f_{X_2}(x_2) \frac{1}{|x_2|}\, dx_2.$$

Supposons $X_1,\ X_2$ indépendantes de loi $\mathcal{U}([0,1])$ :

$$f_{X_1X_2}(y) = \int_{(0 \leqslant \frac{y}{x_2} \leqslant 1) \text{ et } (0 \leqslant x_2 \leqslant 1)} \frac{1}{x_2}\, dx_2 \ ;$$

le domaine d'intégration est donc défini par $]y, +\infty[ \cap [0,1]$, soit $]y,1]$. D'où :

$$\boxed{f_{X_1X_2}(y) = \int_y^1 \frac{1}{x_2}\, dx_2 = -\ln y \mathbf{1}_{]0,1[}(y)}.$$

*Remarque :* On peut aussi déterminer d'abord la loi de $h(X_1, X_2) = (X_1X_2, X_2)$ en posant $h(x_1, x_2) = (u, v) = (x_1x_2, x_2)$. On a alors $h^{-1}(u,v) = (x_1, x_2) = (u/v, v)$ et $J_{h^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} 1/v & -u/v^2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1/v$ et

$$f_{X_1X_2}(u) = \int f_{X_1,X_2}(u/v, v) dv/v$$

Soit ici $f_{X_1X_2}(u) = \int \mathbf{1}_{]0,1[}(u/v) \mathbf{1}_{]0,1[}(v) dv/v = \int \mathbf{1}_{]u,+\infty[}(v) \mathbf{1}_{]0,1[}(v) dv/v = \int_u^1 dv/v$ si $0 < u < 1$ et 0 sinon. On retrouve $f_{X_1X_2}(u) = -\ln u \mathbf{1}_{]0,1[}(u)$.

---

**Exercice 5.4**

Deux méthodes :

(1) On représente l'espace des états, couples des temps d'arrivée de chaque personne, par le carré $[5,6] \times [5,6]$. L'événement $|X_1 - X_2| \leqslant \frac{1}{6}$ correspond à la partie hachurée autour de la diagonale, de surface $\frac{11}{36}$.
(On prend l'heure comme unité de temps et pour simplifier les écritures, on pourra prendre l'origine des temps à 5 heures : on se ramène ainsi au carré $[0,1] \times [0,1]$)).

(2) Méthode de convolution : $X_1 - X_2$ prend ses valeurs dans $[-1, 1]$

$$f_{X_1 - X_2}(t) = \int f_{X_1}(s) f_{X_2}(s-t)\, ds = \int \mathbb{1}_{[0,1]}(s)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(s-t)\, ds = \int \mathbb{1}_{[0,1] \cap [t, t+1]}(s)\, ds.$$

2 cas se présentent :

- si $t \in [-1,0]$, alors $[0,1] \cap [t,t+1] = [0,t+1]$ et $f_{X_1-X_2}(t) = 1+t$
- si $t \in [0,1]$, alors $[0,1] \cap [t,t+1] = [t,1]$ et $f_{X_1-X_2}(t) = 1-t$. D'où

$$\boxed{f_{X_1-X_2}(t) = (1+t)\mathbb{1}_{[-1,0]}(t) + (1-t)\mathbb{1}_{[0,1]}(t).}$$

Or, pour toute variable aléatoire réelle $X$, $f_{|X|}(x) = (f_X(x) + f_X(-x))\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$, d'où :

$$\boxed{f_{|X_1-X_2|}(t) = 2(1-t)\mathbb{1}_{[0,1]}(t).}$$

On a alors $P\left(|X_1 - X_2| \leqslant \dfrac{1}{6}\right) = 2\displaystyle\int_0^{1/6}(1-t)\,dt = \left[-(1-t)^2\right]_0^{1/6} = 1 - 25/36$, soit

$$\boxed{P\left(|X_1 - X_2| \leqslant \frac{1}{6}\right) = \frac{11}{36}}.$$

---

**Exercice 5.5**

$P_X = \gamma(\lambda,\alpha)$ et $P_Y = \gamma(\lambda,\beta)$ avec $X$ et $Y$ indépendantes d'où

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}e^{-\lambda(x+y)}x^{\alpha-1}y^{\beta-1}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(y).$$

(1) $h : (x,y) \mapsto (u,v) = \left(x+y, \dfrac{x}{x+y}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x),\ x \in \mathbb{R}\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2 \setminus (Oy)$ et $h^{-1} : (u,v) \mapsto (x,y) = (uv, u(1-v))$ pour $u \neq 0$.

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(h^{-1}(u,v)) \times |J_{h^{-1}}(u,v)|$$

avec $J_{h^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u + uv = -u$ et

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(h^{-1}(u,v)) &= f_{X,Y}(uv, u(1-v)) \\ &= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}e^{-\lambda u}(uv)^{\alpha-1}(u(1-v))^{\beta-1}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(uv)\,\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(u(1-v)) \end{aligned}$$

avec $\begin{cases} uv > 0 \\ u(1-v) > 0 \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} uv > 0 \\ u^2v(1-v) > 0 \\ u(1-v) > 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} v \in ]0,1[ \\ u > 0 \end{cases}$ et

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}e^{-\lambda u}v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}u^{\alpha+\beta-1}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(u)\,\mathbf{1}_{]0,1[}(v)$$

$$f_U(u) = \int f_{U,V}(u,v)\,dv = \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}e^{-\lambda u}u^{\alpha+\beta-1}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(u)\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}\,dv$$

$$f_V(v) = \int f_{U,V}(u,v)\,du = \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}\,\mathbf{1}_{]0,1[}(v)\int_0^{+\infty}u^{\alpha+\beta-1}\,e^{-\lambda u}\,du.$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}u^{\alpha+\beta-1}\,e^{-\lambda u}\,du \overset{(t=\lambda u)}{=} \int_0^{+\infty}t^{\alpha+\beta-1}\,e^{-t}\,dt \times \frac{1}{\lambda^{\alpha+\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\lambda^{\alpha+\beta}}$ donc

$$f_V(v) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}\, \mathbf{1}_{]0,1[}(v).$$

Ainsi, $V$ suit la loi Bêta de paramètres $\alpha$ et $\beta$. $f_V$ étant une densité, on a en particulier $\displaystyle\int f_V(v)\,dv = 1$ soit

$$\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}\,dv = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

On a alors $f_U(u) = \dfrac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{-\lambda u} u^{\alpha+\beta-1}\, \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(u)$, soit

$$f_U(u) = \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\, u^{\alpha+\beta-1}\, e^{-\lambda u}\, \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(u).$$

Ainsi, $\boxed{U \text{ suit la loi Gamma } \gamma\left(\lambda, \alpha+\beta\right)}$.

(2) Si $P_{X_1} = \mathcal{E}(\lambda) = \gamma(\lambda, 1)$ et $P_{X_2} = \mathcal{E}(\lambda) = \gamma(\lambda, 1)$, alors $P_{X_1+X_2} = \gamma(\lambda, 2)$ lorsque $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes.

Par récurrence, supposons que $Z_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\gamma(\lambda, n)$ ; alors $Z_{n+1} = Z_n + X_{n+1}$ avec $P_{Z_n} = \gamma(\lambda, n)$, $P_{X_{n+1}} = \gamma(\lambda, 1)$, et $Z_n$ et $X_{n+1}$ indépendantes donc $Z_n + X_{n+1}$ suit la loi $\gamma(\lambda, n+1)$. Ainsi, si les $X_i$ sont indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\gamma(\lambda, n)$.

Plus généralement, avec ce qui précède, on peut faire le même raisonnement avec la loi Gamma : si les $X_i$ suivent la loi Gamma $\gamma(\lambda, \alpha)$ et sont indépendantes, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi Gamma $\gamma(\lambda, n\alpha)$.

---

**Exercice 5.6**

$Y_n \sim \mathcal{N}(80n \;;\; 225n)$ d'après les propriétés des lois normales.

$P(Y_n > 1000) = P\left(\dfrac{Y_n - 80n}{15\sqrt{n}} > \dfrac{1000-80n}{15\sqrt{n}}\right)$ avec $\dfrac{Y_n - 80n}{15\sqrt{n}}$ v.a. de loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

On déduit de l'indication que $4,5 \approx \dfrac{1000-80n}{15\sqrt{n}}$, c'est-à-dire, en posant $x = \sqrt{n}$ :

$$80x^2 + (15 \times 4.5)x - 1000 = 0$$

dont l'unique solution positive est $x \approx 3,1$ et donc $\boxed{n = 10}$.

---

**Exercice 5.7**

(1)

$$\begin{aligned}
F_Y(z) &= P([Y \leqslant z]) = P([XB \leqslant z]) \\
&= P\left(([XB \leqslant z] \cap [B=-1]) \cup ([XB \leqslant z] \cap [B=1])\right) \\
&= P\left(([-X \leqslant z] \cap [B=-1]) \cup ([X \leqslant z] \cap [B=1])\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(P([X \geqslant -z]) + P([X \leqslant z])\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - F_X(-z) + F_X(z)\right)
\end{aligned}$$

$$f_Y(z) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(-z)^2}{2}} + e^{-\frac{z^2}{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

donc $Y$ suit aussi la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

(2) $X$ et $Y$ sont dépendantes par construction et pourtant décorrélées (ce qui n'est pas contradictoire) :

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(X.BX) - \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(BX) = \mathbb{E}(B)\left(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\right) = 0.$$

(3)

$$\begin{aligned}
P(X+Y=0) &= P(X(1+B)=0) \\
&= P(X(1+-1)=0)P(B=-1) + P(X(1+1)=0)P(B=1) \\
&= \frac{1}{2}P(0=0) + \frac{1}{2}P(2X=0) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

donc la loi de $X+Y$ n'est pas absolument continue.

---

**Exercice 5.8**

(1) On va utiliser les coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\varphi\cos\theta \\ x_2 = r\sin\varphi\sin\theta \\ x_3 = r\cos\varphi \end{cases}.$$

$h : (x_1,x_2,x_3) \mapsto (r,\varphi,\theta)$, $h^{-1} : (r,\varphi,\theta) \mapsto (x_1,x_2,x_3)$. Ici, $h^{-1}$ s'exprime beaucoup plus facilement que $h$, ce qui nous arrange bien !

$$\begin{aligned}
J_{h^{-1}}(r,\varphi,\theta) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} \\
&= r^2\cos^2\varphi\cos^2\theta\sin\varphi + r^2\sin^3\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta\sin\varphi + r^2\sin^3\varphi\cos^2\theta \\
&= r^2\cos^2\varphi\sin\varphi + r^2\sin^3\varphi = r^2\sin\varphi
\end{aligned}$$

$h$ est une bijection de $\mathbb{R}^3 \setminus (Oz)$ sur $]0,+\infty[\times]0,\pi[\times]-\pi,\pi]$ sur lequel $J_{h^{-1}} \neq 0$.

$$\begin{aligned}
f_{h(X_1,X_2,X_3)}(r,\varphi,\theta) &= f_{X_1,X_2,X_3}(h^{-1}(r,\varphi,\theta)) \times |J_{h^{-1}}(r,\varphi,\theta)|\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(r)\, \mathbb{1}_{]0,\pi[}(\varphi)\, \mathbb{1}_{]-\pi,\pi[}(\theta) \\
&= f_{X_1,X_2,X_3}(h^{-1}(r,\varphi,\theta))\; r^2\sin\varphi\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(r)\, \mathbb{1}_{]0,\pi[}(\varphi)\, \mathbb{1}_{]-\pi,\pi[}(\theta)
\end{aligned}$$

avec $f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)f_{X_3}(x_3) = \dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}$.

Or $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = r^2$, donc :

$$\boxed{f_{R,\Phi,\Theta}(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}e^{-\frac{r^2}{2}} \times r^2\sin\varphi\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(r)\, \mathbb{1}_{]0,\pi[}(\varphi)\, \mathbb{1}_{]-\pi,\pi[}(\theta)}$$

(2) $f_R(r) = \displaystyle\int\int f_{R,\Phi,\Theta}(r,\varphi,\theta)\,d\varphi\,d\theta = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{r^2}{2}} \times r^2\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(r) \times 2\pi\,[-\cos\varphi]_0^{\pi}$, soit

$$\boxed{f_R(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, r^2\, e^{-\frac{r^2}{2}}\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(r).}$$

$F_{R^2}(u) = P([R^2 \leqslant u])$. Si $u \leqslant 0$, $F_{R^2}(u) = 0$. Si $u > 0$,

$$F_{R^2}(u) = P([-\sqrt{u} \leqslant R \leqslant \sqrt{u}]) = F_R(\sqrt{u}) - F_R(-\sqrt{u}) = F_R(\sqrt{u})$$

et on en déduit

$$f_{R^2}(u) = F'_{R^2}(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} f_R(\sqrt{u})\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(u) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{u}} \times u e^{-\frac{u}{2}}\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(u)$$

soit $\boxed{f_{R^2}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{u} e^{-\frac{u}{2}}\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(u)}$ : $R^2$ sui la loi Gamma $\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

*Remarque :* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ donc $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ : OK.}$$

# 6 Convergence de variables aléatoires

**Exercice 6.1**

Démontrer le théorème de Bernoulli : si $S_n$ est une v.a. binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, la suite des fréquences empiriques $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la v.a. constante égale à $p$, au sens suivant

$$\forall\varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right] = 1.$$

---

**Exercice 6.2**

Soit une suite de v.a. uniformes indépendantes $(U_n)_n$ de support $[0,1]$, indépendante d'une suite $(X_n)_n$ de v.a. indépendantes $\mathcal{B}(n,p)$. Vers quelle v.a. converge en loi la suite $(nY_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $Y_n = \min\limits_{(0\leqslant i\leqslant X_n)} U_i$ ?

---

**Exercice 6.3**

Dans un programme de calcul, on décide d'utiliser $k$ chiffres significatifs après la virgule et d'arrondir tous les résultats à $\dfrac{1}{2}10^{-k}$ près. On suppose que l'on effectue $10^6$ opérations successives, que les erreurs commises pour chacune sont indépendantes, de loi uniforme sur $[-a,a]$, où $a = \dfrac{1}{2}10^{-k}$. On note $S$ l'erreur commise sur le résultat final et on veut calculer $P([|S| \leqslant 10^3 a])$. Soit $X_i$ l'erreur commise à la $i$-ème opération. En considérant $10^6$ comme “grand”, montrer que $\dfrac{\sqrt{3}S}{10^3 a}$ suit approximativement la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$. Conclure.

---

**Exercice 6.4**

Soit $f$ continue, définie sur $[a,b]$, à valeurs dans $[m,M] \subset \mathbb{R}_+$.

On note $D = [a,b]\times[m,M]$, $A = \{(x,y)\in D\ ;\ f(x)\geqslant y\}$ et $p = \dfrac{\textit{aire de } A}{\textit{aire de } D}$.

Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on considère un couple de v.a. $(X_k,Y_k)$ de loi uniforme sur $D$, et on définit $Z_k$ par : $Z_k = \begin{cases} 1 \text{ si } Y_k \leqslant f(X_k) \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$ . On pose $\overline{Z_n} = \dfrac{Z_1+\cdots+Z_n}{n}$.

Les v.a. $X_1,\cdots,X_n,\cdots,Y_1,\cdots,Y_n,\cdots$ sont supposées indépendantes.

(1) Calculer $\mathbb{E}(Z_k)$, $\mathrm{var}(Z_k)$, $\mathbb{E}(\overline{Z_n})$, $\mathrm{var}(\overline{Z_n})$.

(2) En utilisant la loi des grands nombres, montrer que $\overline{Z_n}\to p$.

(3) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer le plus petit entier $n$ tel que $P\left(\left[|\overline{Z_n}-p| > \dfrac{1}{100}\right]\right) < \dfrac{5}{100}$.

---

**Exercice 6.5**

Une particule effectue à chaque instant $n$, un pas de longueur fixe $a$ dans une direction aléatoire, mesurée par l'angle $\Theta_n$ par rapport à l'axe $(xx')$ arbitrairement. Les $\Theta_n$ sont indépendantes et $(X_0,Y_0)=(0,0)$.

(1) Exprimer les coordonnées $(X_n,Y_n)$ au temps $n$, en fonction des angles $\Theta_k$. Calculer l'espérance et la variance de $X_n$ et $Y_n$. Sont-elles corrélées ?

(2) Loi de $(X_n,Y_n)$ quand $n$ est “grand” ? En déduire la loi de $(R_n,T_n)$, de $R_n$ et de $T_n$ si $X_n = R_n\cos T_n$ et $Y_n = R_n \sin T_n$. Calculer $\mathbb{E}(R_n)$, $\mathrm{var}(R_n)$ et $P([R_n > r])$.

**Corrigés des exercices**

**Exercice 6.1**
$X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, $X_n$ est la somme de $n$ variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
Soit $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$ : $\mathbb{E}(Y_n) = p$, $V(Y_n) = \dfrac{1}{n^2}p(1-p)n = \dfrac{p(1-p)}{n}$. Appliquons l'inégalité classique de Tchebychev :
Pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left[\left|\dfrac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$ et par passage à la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left[\left|\dfrac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$ d'où, pour tout $\varepsilon > 0$ :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right]\right) = 1.$$

---

**Exercice 6.2**
Soit $Y_n = n \times \min\limits_{1\leqslant i\leqslant X_n} U_i$ où les $U_i$ et les $X_n$ sont indépendantes.

$$P([Y_n \leqslant y]) = \sum_{k=0}^{n} P([Y_n \leqslant y] \cap [X_n = k]) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\left[\min_{0\leqslant i\leqslant k}(U_i) \leqslant \frac{y}{n}\right]\right) P([X_n = k]).$$

$F_{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant k}(U_i)}(x) = 1 - P\left(\left[\min\limits_{1\leqslant i\leqslant k}(U_i) > x\right]\right) = 1 - (1 - F_U(x))^k$ d'où

$$F_{Y_n}(y) = \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^k\right)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = 1 - \left(p\left(1 - \frac{y}{n}\right) + 1 - p\right)^n.$$

$$F_{n\min\limits_{1\leqslant i\leqslant X_n} U_i}(y) = 1 - \left(1 - \frac{py}{n}\right)^n = 1 - e^{n\ln\left(1 - \frac{py}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-py}$$

$$\boxed{n \min_{1\leqslant i\leqslant X_n} U_i \text{ converge en loi vers une variable aléatoire de loi exponentielle } \mathcal{E}(p).}$$

---

**Exercice 6.3**
$X_i$ erreur à la $i$-ème opération, $S = \sum\limits_{i=1}^{10^6} X_i$. Les $X_i$ étant indépendantes, de même loi, d'après le théorème central limite,

$$P_{\left(\frac{S-\mathbb{E}(S)}{\sqrt{\mathrm{var}(S)}}\right)} \approx \mathcal{N}(0,1).$$

Or $\mathbb{E}(S) = 10^6\mathbb{E}(X_i)$, avec $\mathbb{E}(X_i) = 0$ car $X_i$, erreur due à l'arrondi à $\dfrac{1}{2}10^{-k}$ près, suit la loi uniforme sur $\left]-\dfrac{1}{2}10^{-k}, \dfrac{1}{2}10^{-k}\right[$, *i.e.* $]-a, a[$.

$\text{var}(S) = 10^6 \text{var}(X_i)$ (variables indépendantes), et $\text{var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-a}^{a} x^2\,dx = \dfrac{a^2}{3}$ donc $\sqrt{\text{var}(S)} = 10^3 \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ et $P_{\frac{\sqrt{3}S}{10^3 a}} \approx \mathcal{N}(0,1)$. On a alors

$$\begin{aligned}
P([|S| \leqslant 10^3 a]) &= P\left(\left[\frac{|S|}{10^3 a} \leqslant 1\right]\right) = P\left(\left[\frac{|S\sqrt{3}|}{10^3 a} \leqslant \sqrt{3}\right]\right) \\
&= \Phi(\sqrt{3}) - \Phi(-\sqrt{3}) = 2\Phi(\sqrt{3}) - 1.
\end{aligned}$$

or $\Phi(\sqrt{3}) \approx \Phi(1,732) \approx 0,958$, donc $P([|S| \leqslant 10^3 a]) \approx 0,916$.

---

**Exercice 6.4**

(1) $Z_k = 1$ si $f(X_k) \geqslant Y_k$, soit $(X_k, Y_k)$ au dessous de la courbe (dans $A$).

$$P([Z_k = 1]) = \frac{\text{aire de } A}{\text{aire de } D} = p$$

avec aire de $D = (M - m) \times (b - a)$ et

$$\text{aire de } A = \int_a^b (f(x) - m)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - m(b - a).$$

$\boxed{\mathbb{E}(Z_k) = p \text{ et } \text{var}(Z_k) = p(1-p)}$ car $P_{Z_k} = \mathcal{B}(p)$ et

$\mathbb{E}(\overline{Z}_n) = \dfrac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Z_i)}{n} = p$ et $\text{var}(\overline{Z}_n) = \dfrac{1}{n^2}\text{var}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n Z_i\right) = \dfrac{1}{n}\text{var}(Z_i) = \dfrac{p(1-p)}{n}$ car les $Z_i$ sont indépendantes. D'où, finalement

$$\boxed{\mathbb{E}(\overline{Z}_n) = p \text{ et } \text{var}(\overline{Z}_n) = \frac{1}{n}p(1-p).}$$

(2) Par la loi des grands nombres, $\boxed{\overline{Z}_n \xrightarrow{P} \mathbb{E}(Z_i) = p}$.

(3) $P\left([|\overline{Z}_n - p| \leqslant 10^{-2}]\right) \geqslant 0,95$ équivaut à $P\left([|\overline{Z}_n - p| > 10^{-2}]\right) < 0,05 = 5.10^{-2}$.

Or $P\left([|\overline{Z}_n - p| > 10^{-2}]\right) \leqslant \dfrac{1}{10^{-4}}\mathbb{E}((\overline{Z}_n - p)^2) = \dfrac{\text{var}(\overline{Z}_n)}{10^{-4}} = \dfrac{p(1-p)}{10^{-4}n}$.
On cherche $n$ tel que $\dfrac{p(1-p)}{10^{-4}n} < 5.10^{-2}$, soit $n > \dfrac{p(1-p)}{5.10^{-6}}$.
Si $\varphi(p) = p(1-p) = p - p^2$, $\varphi'(p) = 1 - 2p$ donc $\varphi$ admet un maximum en $p = 1/2$ avec $\varphi(1/2) = 1/4$.
Ainsi, pour avoir $n > \dfrac{p(1-p)}{5.10^{-6}}$ avec $p$ quelconque, il suffit de prendre $n > \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{5.10^{-6}}$, soit $n > \dfrac{10^6}{20} = 5.10^4$ : $\boxed{n > 50\,000}$.

---

**Exercice 6.5**

$P_{\Theta_k} = \mathcal{U}([0, 2\pi[)$ donc $f_{\Theta_k}(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{[0,2\pi[}(\theta)$.

(1) $\mathbb{E}(\cos\Theta_k) = \displaystyle\int \cos\theta\, f_{\Theta_k}(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$. De même,

$$\mathbb{E}(\sin\Theta_k) = \int \sin\theta\, f_{\Theta_k}(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta = 0,$$

$$\mathbb{E}(\cos^2\Theta_k) = \int \cos^2\theta\, f_{\Theta_k}(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta + 1}{2}\,d\theta = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{var}(\cos\Theta_k) = \mathbb{E}(\cos^2\Theta_k) - \mathbb{E}(\cos\Theta_k)^2 = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{E}(\sin^2\Theta_k) = \mathbb{E}(1-\cos^2\Theta_k) = \frac{1}{2} \text{ et } \operatorname{var}(\sin\Theta_k) = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{E}(\cos\Theta_k) = \mathbb{E}(\sin\Theta_k) = 0,\ \operatorname{var}(\cos\Theta_k) = \operatorname{var}(\sin\Theta_k) = \frac{1}{2}.$$

$X_0 = 0$, $X_1 = a\cos\Theta_1$, $X_2 = a\cos\Theta_1 + a\cos\Theta_2$, soit, par récurrence, $X_n = a\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\Theta_k$ et $Y_n = a\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\Theta_k$.

Par linéarité de l'espérance, on en déduit $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$.

Puis $\operatorname{var}(X_n) = a^2\operatorname{var}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\Theta_k\right) = a^2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\operatorname{var}(\cos\Theta_k) = a^2\,\frac{n}{2}$ car les $\Theta_k$ sont indépendantes donc les $\cos\Theta_k$ aussi et de même, $\operatorname{var}(Y_n) = a^2\,\dfrac{n}{2}$, d'où $\operatorname{var}(X_n) = \operatorname{var}(Y_n) = \dfrac{a^2 n}{2}$.

$X_nY_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a^2\cos\Theta_i\sin\Theta_j$, avec

- si $i \neq j$, $\mathbb{E}(\cos\Theta_i\sin\Theta_j) = \mathbb{E}(\cos\Theta_i)\mathbb{E}(\sin\Theta_j) = 0$ ;
- $\mathbb{E}(\cos\Theta_i\sin\Theta_i) = \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{2}\sin 2\Theta_i\right) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$

donc $\mathbb{E}(X_nY_n) = 0$ et comme $\mathbb{E}(X_n) = 0$, $\operatorname{cov}(X_n, Y_n) = 0$.

(2) On applique le théorème central limite généralisé à $\mathbb{R}^2$ à la suite

$$(X_n, Y_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} a\cos\Theta_k, \sum_{k=1}^{n} a\sin\Theta_k\right) \ :$$

$$P_{(X_n,Y_n)} \approx \mathcal{N}\left((\mathbb{E}(X_n), \mathbb{E}(Y_n)),\ \Gamma_{X_n,Y_n} = \begin{pmatrix} \operatorname{var}(X_n) & \operatorname{cov}(X_n,Y_n) \\ \operatorname{cov}(X_n,Y_n) & \operatorname{var}(Y_n)\end{pmatrix}\right)$$

donc ici $P_{(X_n,Y_n)} \approx \mathcal{N}\left((0,0),\ \begin{pmatrix} \dfrac{na^2}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{na^2}{2}\end{pmatrix}\right)$ de densité

$$f_n : (x,y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\frac{na^2}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2\frac{na^2}{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\frac{na^2}{2}}}e^{-\frac{y^2}{2\frac{na^2}{2}}} = \frac{1}{\pi na^2}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{na^2}}.$$

On utilise les coordonnées polaires classiques. Soit $h : (x,y) \mapsto (r,t)$ la bijection de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sur $]0,+\infty[\times[0,2\pi[$, de bijection réciproque $h^{-1} : (r,t) \mapsto (x,y) = (r\cos t, r\sin t)$. $J_{h^{-1}}(r,t) = \begin{vmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{vmatrix} = r$ et

$$f_{R_n,T_n}(r,t) = f_{X_n,Y_n}(r\cos t, r\sin t) \times r\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(r)\, \mathbb{1}_{]0,2\pi[}(t),$$

soit $f_{R_n,T_n}(r,t) = \dfrac{1}{\pi n a^2}\, e^{-\frac{r^2}{na^2}}\, r\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(r)\, \mathbb{1}_{]0,2\pi[}(t)$, puis $f_{R_n}(r) = \displaystyle\int f_{R_n,T_n}(r,t)\, dt$, soit

$$f_{R_n}(r) = \frac{2}{na^2}\, r e^{-\frac{r^2}{na^2}}\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(r).$$

$$f_{T_n}(t) = \int f_{R_n,T_n}(r,t)\, dr = \frac{1}{2\pi}\left[-e^{-\frac{r^2}{na^2}}\right]_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]0,2\pi[}(t), \text{ soit } f_{T_n}(t) = \frac{1}{2\pi}\, \mathbb{1}_{]0,2\pi[}(t) :$$

$$P_{T_n} = \mathcal{U}(]0,2\pi[).$$

$$\mathbb{E}(R_n) = \int r f_{R_n}(r)\, dr = \frac{2}{na^2}\int_0^{+\infty} r^2 e^{-\frac{r^2}{na^2}}\, dr = \frac{2}{na^2} \times \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} r^2 e^{-\frac{r^2}{na^2}}\, dr.$$

Or, si $Z$ est une v.a.r. de loi $\mathcal{N}\left(0, \dfrac{na^2}{2}\right)$, on a $\mathrm{var}(Z) = \dfrac{na^2}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{na^2}{2}}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{na^2}}\, dz$,

d'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{na^2}}\, dz = \dfrac{na^2}{2} \times a\sqrt{\pi n}$ et $\mathbb{E}(R_n) = \dfrac{a}{2}\sqrt{n\pi}$.

$$\mathbb{E}(R_n^2) = \int r^2 f_{R_n}(r)\, dr = \frac{2}{na^2}\int_0^{+\infty} r^3 e^{-\frac{r^2}{na^2}}\, dr \underset{u=\frac{r^2}{na^2}}{=} \int_0^{+\infty} na^2 u e^{-u}\, du = na^2\, \Gamma(2) = na^2$$

et $\mathbb{E}(X_n^2) = \mathrm{var}(X_n) = \dfrac{na^2}{2}$ (on retrouve ainsi que $\mathbb{E}(R_n^2) = \mathbb{E}(X_n^2) + \mathbb{E}(Y_n^2) = na^2$). On a alors $\mathrm{var}(R_n) = na^2 - \dfrac{a^2}{4} n\pi$, soit $\mathrm{var}(R_n) = na^2\left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

$$P([R_n > r]) = \int_r^{+\infty} f_{R_n}(u)\, du = \left[-e^{-\frac{u^2}{na^2}}\right]_r^{+\infty}, \text{ soit } P([R_n > r]) = e^{-\frac{r^2}{na^2}}.$$

# 7 Conditionnement discret

**Exercice 7.1**
Faisons l'hypothèse (optimiste) que deux politiciens mentent parfois, l'un disant la vérité trois fois sur quatre et l'autre quatre fois sur cinq. S'ils énoncent la même affirmation, quelle est la probabilité pour qu'elle soit vraie ?

---

**Exercice 7.2** *Propriété caractéristique des systèmes "sans mémoire", décrits par des variables aléatoires géométrique et exponentielle.*
Soit $X$ une v.a. géométrique de loi $P(X = k) = (1-p)^{k-1}\, p$ $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$.

(1) Démontrer que $P[X > m + n | X > n] = P[X > m]$. Interpréter ce résultat si $X$ est la durée de vie d'un système.

(2) Cette propriété caractérise aussi les v.a. exponentielles. Est-ce surprenant ?

---

**Exercice 7.3**
Le taux de réussite d'un examen donné est de 60 % pour les candidats issus de l'établissement A et de 80 % pour ceux issus de B. D'autre part, 55 % des candidats proviennent de A et 45% de B.
Quel est le taux d'échec à cet examen ? Quelle est la probabilité pour qu'un candidat éliminé provienne de A ?

---

**Exercice 7.4** *Le paradoxe du prisonnier*
Un prisonnier est placé devant trois portes a,b et c ; l'une d'elles lui permet de sortir définitivement de prison. Le directeur lui propose d'en choisir une au hasard ; supposons que le prisonnier choisisse la porte a. Le directeur lui donne l'information $E =$ :"la bonne porte n'est pas b" et lui laisse la possibilité de réviser son choix.
A-t-il intérêt à le faire s'il veut augmenter ses chances de sortir ?

---

**Exercice 7.5**
Les nombres de véhicules $X$ et $Y$ à destination pour les villes A et B, passant par un poste de contrôle commun, sont des v.a. indépendantes de Poisson d'intensités $\lambda_a$ et $\lambda_b$.
Quelle est la loi conditionnelle de $X$ sachant $(X + Y)$ ? Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X \mid X + Y = n)$ et la variance $V(X \mid X + Y = n)$.

---

**Exercice 7.6**
Soit $X, Y$ des v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$.
Calculer $P(X < Y)$ et $\mathbb{E}(Y \mid X < Y)$.

**Corrigés des exercices**

**Exercice 7.1**
Soit $E$ l'événement "les 2 personnes énoncent la même assertion" et $A_i$ l'événement "la $i$-ème personne ne ment pas", alors $E = (A_1 \cap A_2) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2)$ et la probabilité cherchée est $P((A_1 \cap A_2)/E)$. Or $P((A_1 \cap A_2) \cap E) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$ et $P(E) = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = P(A_1)P(A_2) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)$ car les 2 personnes agissent indépendamment. Avec $P(A_1) = \dfrac{3}{4}$ et $P(A_2) = \dfrac{4}{5}$, on obtient $P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{12}{20}$ et $P(E) = \dfrac{12}{20} + \dfrac{1}{20} = \dfrac{13}{20}$, d'où :

$$P((A_1 \cap A_2)/E) = \frac{12}{13} \approx 0,92.$$

---

**Exercice 7.2**
(1)

$$\begin{aligned} P([X > m+n]/[X > n]) &= \frac{P([X > m+n])}{P([X > n])} = \frac{\sum\limits_{k=m+n+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}p}{\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}p} \\ &= (1-p)^m = P([X > m]). \end{aligned}$$

(2) La loi exponentielle étant l'analogue continu de la loi géométrique (voir chapitre 2), on pouvait s'attendre à ce résultat.

---

**Exercice 7.3**
Soit lesévénements $A$ : "être issu de $A$", $R$ : "réussir" et $E$ : "être en échec".

$$P(R) = P(R/A)P(A) + P(R/B)P(B) = \frac{60 \times 55}{100^2} + \frac{80 \times 45}{100^2} = 69\% : \text{ taux de réussite.}$$

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E/A)P(A)}{P(E)} \approx 32\%.$$

---

**Exercice 7.4**
• Si le prisonnier ne change pas, pour qu'il gagne, il faut qu'il ait pris la bonne porte dès le début, soit 1 chance sur 3 : proba 1/3 (dans ce cas, l'indication ne sert à rien).

• Si le prisonnier change de porte après l'indication, pour gagner, il faut qu'au départ, il ait choisi une mauvaise porte : proba 2/3 car alors le directeur est obligé d'ouvrir l'autre mauvaise porte et en changeant, le prisonnier tombe sur la bonne porte.

*Remarque :* S'il décide aléatoirement de changer ou de garder, au premier coup, il a 3 choix possibles et au deuxième 2, soit 6 possibilités. Pour gagner, il faut alors qu'il ait choisi la bonne porte au premier coup et qu'il ait maintenu son choix, ou bien qu'il ait choisi une mauvaise porte au départ, et qu'il ait changé. On a ainsi 3 cas favorables sur 6 et une probabilité de 1/2.
La meilleure stratégie consiste donc à changer.

---

**Exercice 7.5**

$P_X = \mathcal{P}(a)$, $P_Y = \mathcal{P}(b)$ et $X$ et $Y$ sont indépendantes. On sait alors que $P_{X+Y} = \mathcal{P}(a+b)$ que l'on peut remontrer rapidement :

$$\begin{aligned}
P([X+Y=n]) &= \sum_{k=0}^{n} P([X=k]\cap[Y=n-k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P([X=k])P([Y=n-k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-a}\frac{a^k}{k!}e^{-b}\frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(a+b)}}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \\
&= e^{-(a+b)}\frac{(a+b)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
P^{[X+Y=n]}([X=k]) &= \frac{P([X=k]\cap[X+Y=n])}{P([X+Y=n])} = \frac{P([X=k]\cap[Y=n-k])}{P([X+Y=n])} \\
&= \frac{P([X=k])P([Y=n-k])}{P([X+Y=n])}
\end{aligned}$$

par indépendance de $X$ et de $Y$. On a alors :
Si $k \notin [\![0,n]\!]$, $P^{[X+Y=n]}([X=k]) = 0$, sinon :

$$P^{[X+Y=n]}([X=k]) = \frac{e^{-a}\frac{a^k}{k!}e^{-b}\frac{b^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(a+b)}\frac{(a+b)^n}{n!}} = C_n^k\frac{a^k b^{n-k}}{(a+b)^n} = C_n^k\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}$$

donc $P_X^{[X+Y=n]} = \mathcal{B}\left(n, \dfrac{a}{a+b}\right)$.

En particulier, $\mathbb{E}^{[X+Y=n]}(X) = n \times \dfrac{a}{a+b}$.

*Remarque :* $a$ étant le nombre moyen de véhicules de la voie $(a)$, $\dfrac{a}{a+b}$ est la proportion moyenne de voitures sur $(a)$ : sachant qu'il y a eu en tout $n$ voitures, le nombre moyen de voitures sur $(a)$ est $n \times \dfrac{a}{a+b}$.

Ici, $\mathbb{E}^{X+Y}(X)$ est la v.a. $(X+Y)\ \dfrac{a}{a+b}$.

---

**Exercice 7.6**

$P(X<Y) = P((X,Y) \in \{(-1,0),(-1,1),(0,1)\}) = 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y|Y>X) &= \sum_y yP(Y=y|Y>X) = \sum_y y\frac{P((Y=y)\cap(y>X))}{P(Y>X)} \\
&= 3\sum_y yP(Y=y)P(y>X) = \sum_y yP(y>X) \\
&= -1\times P(-1>X) + 0\times P(0>X) + 1\times P(1>X) = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

## 8 Conditionnement - Cas général

**Exercice 8.1**
Soit la v.a. $Y$ de loi $\mathcal{B}(n, X)$ où le paramètre $X$ est une v.a. $\mathcal{U}([0,1])$.

$$P(Y = k|X = x) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k}, \forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

Déterminer les lois de $Y$ et de $X$ conditionnée par $Y$.

---

**Exercice 8.2**
Soit le vecteur aléatoire $(X, Y)$ uniformément réparti sur le support carré de sommets $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

(1) Déterminer la loi conjointe, les lois marginales et conditionnelles .

(2) Les composantes sont-elles indépendantes ? corrélées ?

---

**Exercice 8.3** *Espérance et variance de la taille d'une population constituée d'un nombre aléatoire de sous-populations*
Soit un nombre aléatoire $N$ de populations de tailles décrites par les variables aléatoires $(X_i)_{i=1,..,N}$ indépendantes entre elles, de même loi que $X$ et indépendante de $N$ : $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ étant la taille de la population totale.
Démontrer $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$ et $V(S) = \mathbb{E}(N)V(X) + V(N)(\mathbb{E}(X))^2$.

---

**Exercice 8.4**
Soit $(X_n)$ une suite de v.a. indépendantes identiquement distribuées, de densité $f_X$ et $N$ une v.a. entière positive, indépendante des $X_n$. Posons $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

(1) Déterminer la loi conditionnelle de $N$ si $S_N = x$, puis la loi de $S_n$ où $n$ est fixé. Calculer l'espérance de $S_N$.

(2) Application : $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $N$ est la v.a. géométrique $\mathcal{G}(p)$.
[On rappelle que la somme de $n$ v.a. indépendantes $\mathcal{E}(\lambda)$ suit une loi Gamma $\gamma(\lambda, n)$.]

---

**Exercice 8.5**
Soit le vecteur gaussien centré $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de matrice de covariance $\Gamma$, il s'agit de déterminer $\mathbb{E}(X_n \,|X_1, X_2, ..., X_{n-1})$.

(1) Déterminer $\mathbb{E}(X_n X_i)$ pour tout $i = 1,....,n-1$ ; en déduire un système linéaire de $n-1$ équations dont la solution permet d'exprimer

$$\mathbb{E}(X_n|X_1, X_2, ..., X_{n-1}).$$

(2) Appliquer cette méthode au vecteur $(X_1, X_2, X_3)$ pour lequel

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 6 & 14 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

En déduire l'expression de la densité conditionnelle du vecteur $(X_3|X_1, X_2)$.

**Corrigés des exercices**

**Exercice 8.1**

$P([Y=k]) = \binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\dfrac{(n-k)!k!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}$ donc $Y$ est de loi uniforme sur $\{0, 1, \cdots, n\}$.

$$f_{X/Y=k}(x) = \frac{\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}{\left(\frac{1}{n+1}\right)}\mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

---

**Exercice 8.2**

(1) $f_{(X,Y)}(x,y) = \dfrac{1}{2}\mathbf{1}_D(x,y)$ où $D$ est le carré.

$$f_X(x) = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\mathbf{1}_D(x,y)\,dy = (1+x)\mathbf{1}_{[-1,0]}(x) + (1-x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

Par analogie, $f_Y(y) = (1+y)\mathbf{1}_{[-1,0]}(y) + (1-y)\mathbf{1}_{[0,1]}(y)$.

$f_{X/Y=y}(x) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ : si, par exemple $y \in [0,1]$,

$$f_{X/Y=y}(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{1}_D(x,y)}{(1-y)} = \frac{\mathbf{1}_{[y-1\,;\,1-y]}(x)}{2(1-y)}.$$

(2) Les composantes ne peuvent pas être indépendantes, puisque le support n'est pas un pavé rectangle.

---

**Exercice 8.3**

On peut utiliser le théorème de la variance totale, ou procéder comme suit :

$$\mathbb{E}(S) = \sum_n \mathbb{E}(S/[N=n])P([N=n]) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X).$$

$$V(S) = \mathbb{E}(S^2) - (\mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X))^2 \qquad (*)$$

$\mathbb{E}(S^2) = \sum_n \mathbb{E}(S^2/[N=n]).P([N=n])\,;\ V(S_n) = nV(X) = \mathbb{E}(S_n^2) - (\mathbb{E}(S_n))^2$.

On en déduit :

$$\mathbb{E}(S^2) = \sum_n (nV(X) + n^2(\mathbb{E}(X))^2)\,P([N=n]) = V(X)\mathbb{E}(N) + (\mathbb{E}(X))^2\mathbb{E}(N^2)$$

d'où, par $(*)$, $V(S) = \mathbb{E}(N)V(X) + (\mathbb{E}(X))^2V(N)$.

---

**Exercice 8.4**

(1) D'après le théorème 6.8 :

$$\begin{aligned} P([N=n]/[S_N=x]) &= \frac{f_{S_N/N=n}(x)}{f_{S_N}(x)} P([N=n]) \\ &= \frac{f_{S_N/N=n}(x)P([N=n])}{\sum\limits_k f_{S_N/N=k}(x)P([N=k])} \end{aligned}$$

(2) $f_{S_N/N=n}$ est la convolution de $n$ densités exponentielles $\mathcal{E}(\lambda)$ et est donc égale à la densité de la loi gamma $\gamma(\lambda, n)$ : $\dfrac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)}$. On a donc

$$\begin{aligned} P([N=n]/[S_N=x]) &= \frac{\frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x} p(1-p)^{n-1}}{\Gamma(n)}}{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x} p(1-p)^{k-1}}{\Gamma(k)}} \\ &= \frac{\frac{\lambda^n x^{n-1}(1-p)^{n-1}}{\Gamma(n)}}{\lambda e^{\lambda(1-p)x}} = \frac{(\lambda(1-p)x)^{n-1} e^{-\lambda(1-p)x}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

La v.a. $N-1$ conditionnée par $(S_N = x)$ est poissonnienne $\mathcal{P}(\lambda(1-p)x)$.

---

**Exercice 8.5**

D'après le théorème du conditionnement de vecteurs gaussiens :

$$\mathbb{E}(X_n/X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j X_j. \qquad (*)$$

Il s'agit donc de déterminer les $(\alpha_j)_j$. Multiplions les membres de $(*)$ par $X_i$ :

$$\mathbb{E}(X_n/X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}).X_i = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j X_j X_i$$

d'où $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n/X_1, X_2, \cdots, X_{n-1})X_i) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} \alpha_j \mathbb{E}(X_j X_i) = \mathbb{E}(X_n X_i)$.

Si l'on fait varier $i$ dans $\{1, 2, \cdots, n-1\}$, on parvient à un système de $(n-1)$ équations linéaires en les $(\alpha_j)_{1 \leqslant j \leqslant n-1}$ :

$$\left( \sum_j \alpha_j \mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(X_n X_i) \right)_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \qquad (**)$$

Le vecteur étant centré, $\Gamma$ est la matrice des $(\mathbb{E}(X_i X_j))_{i,j}$.

*Application :* $(**)$ s'écrit $2 = \alpha_1$, $-1 = 4\alpha_2$, soit $\alpha_2 = -\dfrac{1}{4}$, d'où

$$\mathbb{E}(X_3/X_1, X_2) = 2X_1 - \frac{1}{4}X_2.$$

# 9 Chaînes de Markov

**Exercice 9.1** *Étude de la chaîne à deux états*

Soit $P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$ ; supposons que $\pi(0) = (1, 0)$.
Déterminer la loi $\pi(n)$ (discuter selon les valeurs de $\alpha$ et $\beta$).

---

**Exercice 9.2**

Soit $X_n$ la v.a. égale à la valeur maximale obtenue après $n$ jets d'un dé.
(1) Montrer que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov.
(2) Déterminer la matrice de transition.
(3) Déterminer la limite de $\pi(n)$, loi de $(X_n)$, quand $n$ tend vers l'infini.

---

**Exercice 9.3**

Étude des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^3$.

---

**Exercice 9.4**

Soit la chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbb{N}$, de matrice de transition définie par :

$$\begin{array}{cc} p_{i,0} = p_i, & p_{i,i+1} = 1 - p_i \\ \forall i \in \mathbb{N} & 0 < p_i < 1. \end{array}$$

(1) Dessiner le graphe de la chaîne ; en déduire qu'elle est irréductible.
(2) À quelle condition est-elle récurrente ?
(3) Si $\forall i$, $p_i = p$, montrer que la chaîne est récurrente positive.

---

**Exercice 9.5**

Deux machines identiques fonctionnent indépendamment ; chacune pouvant tomber en panne avec la probabilité $q$. Soit $X_n$ le nombre de machines en panne au début de la $n^{ième}$ journée.

(1) Si une machine tombe en panne elle est réparée la nuit suivante et on ne peut réparer qu'une machine par nuit. Caractériser la chaîne de Markov $(X_n)_n$. Déterminer la distribution stationnaire.

(2) Même question en supposant qu'une machine en panne n'est réparée que le lendemain et qu'on ne peut réparer qu'une machine dans la journée.

---

**Exercice 9.6** *Modèle markovien de gestion de stocks*

Un stock contient au maximum $s$ pièces. La v.a. $X_n$ est le nombre de pièces au début de la $n^{ième}$ semaine ; la v.a. $Y_n$ est le nombre de pièces sorties du stock au cours de la $n^{ième}$ semaine. On supposera que $X_1 = s$ et que pour tout $j = 0, 1, ..., i$ $P(Y_n = j | X_n = i) = \dfrac{1}{1+i}$, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. Au début de chaque semaine, on complète le stock mais le délai de livraison est une semaine.

(1) Montrer que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov, et qu'elle admet une distribution stationnaire définie par $\pi_i = \dfrac{2(i+1)}{(s+1)(s+2)}$.

(2) Quel est le nombre moyen de pièces disponibles ?

---

**Exercice 9.7**

Lorsqu'une équipe de foot a joué $n$ matches, on note $X_n$ la série de matches sans défaites en cours. Si $X_n = k$, on note $p_k$ la probabilité de ne pas perdre le match suivant. Ainsi, $P([X_{n+1} = k+1]/[X_n = k]) = p_k$ et $P([X_{n+1} = 0]/[X_n = k]) = 1 - p_k$.

(1) Montrer rapidement que $(X_n)$ définit une chaîne de Markov irréductible et faire son graphe. Si $T_0$ est l'instant de premier retour en 0, exprimer $P([T_0 = n]/[X_0 = 0])$ et donner des conditions pour que la chaîne soit transitoire, récurrente nulle ou récurrente positive (à l'aide des $r_n = p_0 p_1 \cdots p_{n-1}$).

(2) On suppose que $p_k = p$ pour tout $k$. Déterminer la distribution stationnaire de la chaîne et la longueur moyenne d'une série sans défaite. (*Application numérique : $p = \dfrac{1}{2}$*)

**Corrigés des exercices**

**Exercice 9.1**
On a $\pi(n) = \pi(0)P^n$ et pour calculer les puissances d'une matrice, on étudie ses éléments propres.

$\to$ On sait que $\lambda_1 = 1$ est toujours valeur propre de $P$ (associée au vecteur propre ${}^t(1, \cdots, 1)$ car $\sum_{y \in E} p_{x,y} = 1$). Pour trouver ici l'autre valeur propre, on utilise $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr} P = 2 - \alpha - \beta$ : $\lambda_2 = 1 - \alpha - \beta \neq 1$ si $P \neq I$ : $P$ est donc diagonalisable.

$\to$ Recherche des vecteurs propres : pour $\lambda_2 = 1 - \alpha - \beta$, $(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 = (1 - \alpha - \beta)x_1$ conduit à $\beta x_1 + \alpha x_2 = 0$.

$\to$ On a donc, si $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$, alors $\Omega^{-1} = \dfrac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et

$$\pi(n) = \pi(0)\Omega \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \Omega^{-1} = \left( \frac{\beta + \alpha(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha - \alpha(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta} \right).$$

---

**Exercice 9.2**
$Y_i$ résultat du $i$-ème lancer.

(1) $X_{n+1} = \max(X_n, Y_{n+1})$ est de la forme $\psi(X_n, Y_{n+1})$ donc d'après la remarque 1 de ce chapitre, $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov.

$$(2)\ E = \{1,2,3,4,5,6\} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Soit $\pi(0) = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ ; $\pi(0) \lim_{n \to +\infty} P^n = (0,0,0,0,0,1)$ car $\lim_{n \to +\infty} X_n = 6$. D'où :

$$\lim_{n \to +\infty} P^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

**Exercice 9.3**
(1) $E = Z$. Pour être de nouveau au point de départ après $n$ étapes, il faut avoir fait autant de pas vers la droite que vers la gauche : ainsi, $n$ doit être pair ($n = 2m$). Il y a autant de trajets possibles que de $2m$ u-plets avec $m$ "d" et $m$ "g", soit $C_{2m}^m$, et ils sont tous de probabilité $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m}$. Ainsi, $\boxed{p_{x,x}^{(2m)} = C_{2m}^m \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m}}$ (et $p_{x,x}^{(2m+1)} = 0$).

Pour la nature de la série, on utilise un équivalent grâce à Stirling :

$$p_{xx}^{(2m)} = \frac{(2m)!}{(m!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \sim \frac{(2m)^{2m}}{e^{2m}} \sqrt{2\pi \times 2m} \left( \frac{e^m}{m^m \sqrt{2\pi m}} \right)^2 \times \frac{1}{2^{2m}} = \frac{1}{\sqrt{\pi m}}.$$

Ainsi, $\boxed{p_{xx}^{(2m)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}}}$ terme général tendant vers 0 d'une série divergente entraîne que la chaîne est récurrente nulle. On démontre sans difficulté qu'une marche aléatoire disymétrique dans $\mathbb{Z}$, donc telle que $p \neq q$, est tansiente.

(2) $E = Z^2$. Pour être de nouveau au point de départ après $n$ étapes, il faut avoir fait dans chacune des 2 directions autant de pas dans un sens que dans l'autre : ainsi, $n$ doit être pair ($n = 2m$). Si il y a $2k$ pas verticaux (et donc $2m - 2k$ pas horizontaux), alors il doit y avoir $k$ pas vers le haut, $k$ pas vers le bas, $m - k$ pas vers la gauche et $m - k$ pas vers la droite. Ainsi, dans ces cas-là, il y a $C_{2m}^{2k} \times C_{2k}^{k} \times C_{2m-2k}^{m-k}$ trajets possibles (on a $C_{2m}^{2k}$ façons de choisir les pas verticaux, puis, parmi ceux-ci, on en choisit $C_{2k}^{k}$ vers le haut et, parmi les $2m - 2k$ horizontaux on choisit les $C_{2m-2k}^{m-k}$ vers la droite par exemple), et ils sont tous de probabilité $\left(\frac{1}{4}\right)^{2m}$. Mais, comme $k$ peut prendre toutes les valeurs de 0 à $m$, il vient

$$\begin{aligned} p_{xx}^{(2m)} &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(2m)!}{(2k)!(2m-2k)!} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \frac{(2m-2k)!}{((m-k)!)^2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2m} \\ &= C_{2m}^{m} \left(\frac{1}{4}\right)^{2m} \left(\sum_{k=0}^{m} (C_m^k)^2\right) = \left[C_{2m}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\right]^2 \sim \frac{1}{\pi m} \end{aligned}$$

car $\sum_{k=0}^{m} (C_m^k)^2 = \sum_{k=0}^{m} C_m^k C_m^{m-k} = C_{2m}^{m}$ (on peut par exemple développer $(1+x)^{2m} = (1+x)^m(1+x)^m$ des 2 façons et identifier le coefficient de $x^m$ dans chacune des expressions). Même conclusion que précédemment.

(3) $E = Z^3$. Pour être de nouveau au point de départ après $n$ étapes, il faut avoir fait dans chacune des 3 directions autant de pas dans un sens que dans l'autre : ainsi, $n$ doit être pair ($n = 2m$). Si il y a $2k_1$ pas dans la direction 1, $2k_2$ pas dans la direction 2 (et donc $2m - 2k_1 - 2k_2$ pas dans la direction 3), alors il doit y avoir $k_1$ pas dans chaque sens de la direction 1, $k_2$ dans ceux de la direction 2 et $m - k_1 - k_2$ dans ceux de la direction 3. Ainsi, dans ces cas-là, il y a $C_{2m}^{2k_1} \times C_{2m-2k_1}^{2k_2} \times C_{2k_1}^{k_1} \times C_{2k_2}^{k_2} \times C_{2(m-k_1-k_2)}^{m-k_1-k_2}$ trajets possibles et ils sont tous de probabilité $\left(\frac{1}{6}\right)^{2m}$ (3 directions et 2 sens dans chacune, donc 6 possibilités à chaque pas). Il vient alors

$$\begin{aligned} p_{xx}^{(2m)} &= \sum_{k_1,k_2} \frac{(2m)!}{(2k_1)!(2m-2k_1)!} \frac{(2m-2k_1)!}{(2k_2)!(2m-2k_1-2k_2)!} \frac{(2k_1)!}{(k_1!)^2} \frac{(2k_2)!}{(k_2!)^2} \frac{(2m-2k_1-2k_2)!}{((m-k_1-k_2)!)^2} \left(\frac{1}{6}\right)^{2m} \\ &= \sum_{k_1,k_2} \frac{(2m)!}{(k_1!)^2(k_2!)^2((m-k_1-k_2)!)^2} \left(\frac{1}{6}\right)^{2m} \end{aligned}$$

On pourrait montrer que l'on peut majorer cette expression par un terme équivalent à $\frac{K_3}{m^{3/2}}$. Ainsi $p_{xx}^{(2m)}$ est le terme général d'une série convergente donc la chaîne est <u>transitoire</u>.

---

**<u>Exercice 9.4</u>**

(1) La chaîne est irréductible (structure de son graphe).

(2) Il suffit donc de montrer que l'un des états, par exemple 0, est récurrent pour s'assurer que la chaîne est récurrente.

$$P(\text{temps de retour en 0 fini}) = 1 - P(\text{temps de retour en 0 infini}) = 1 - \prod_{i=0}^{+\infty}(1 - p_i)$$

donc 0 est récurrent si $\prod_{i=0}^{+\infty}(1-p_i)=0$, ce qui équivaut à

$$\ln\left(\prod_{i=0}^{+\infty}(1-p_i)\right)=\sum_{i=0}^{+\infty}\ln(1-p_i)=-\infty.$$

Sachant que : $-\ln(1-x)\underset{0}{\sim}x$, la série précédente est de même nature que $-\sum_{i=0}^{+\infty}p_i$.

Conclusion : $\boxed{\text{0 est récurrent si et seulement si } \sum_{i=0}^{+\infty}p_i=+\infty}$.

(3) La chaîne est donc récurrente et sera récurrente positive si et seulement si l'espérance de $T_0$, temps de retour en 0 est fini.

$$P(T_0=n)=P(T_0>n-1)-P(T_0>n)=p(1-p)^{n-1}$$

donc $\boxed{T_0 \text{ est une v.a. géométrique } \mathcal{G}(p) \text{ et } E(T_0)=\frac{1}{p}}$.

**Exercice 9.5**

(1) La connaissance de l'état au $n$-ième jour suffit pour déterminer les probabilités d'occupation des états au $(n+1)$-ième jour et celles-ci sont indépendantes de $n$. Ainsi, on a bien une chaîne de Markov telle que :
• si $X_n=0$, $X_{n+1}=1$ si les 2 machines tombent en panne le $n$-ième jour, et $X_{n+1}=0$ sinon,
• si $X_n=1$, $X_{n+1}=1$ si la machine en service tombe en panne le $n$-ième jour, et $X_{n+1}=0$ sinon.

En notant $p_{ij}=P([X_{n+1}=j]/[X_n=i])$, on a $p_{0,1}=q^2$ (les machines fonctionnent indépendamment) ; $p_{0,0}=1-q^2$ ; $p_{1,1}=q$ ; $p_{1,0}=1-q$.

$$P=\begin{pmatrix}1-q^2 & q^2\\ 1-q & q\end{pmatrix}.$$

On cherche $\pi=(\pi_0,\pi_1)$ tel que $\pi=\pi P$ et $\pi_0+\pi_1=1$.
Ceci donne $\pi_1=q^2\pi_0+q\pi_1$, soit $\pi_1=\dfrac{q^2}{1-q}\pi_0$ et $\pi_0\left(1+\dfrac{q^2}{1-q}\right)=1$. Ainsi, la distribution stationnaire est $\boxed{\pi=\left(\frac{1-q}{1-q+q^2},\frac{q^2}{1-q+q^2}\right)}$.

(2) Le réparateur ne travaillant plus la nuit, il peut y avoir le matin 0, 1 ou 2 machines en pannes.
• si $X_n=0$, on peut avoir $X_{n+1}=0$ (0 panne), $X_{n+1}=1$ (1 panne) ou $X_{n+1}=2$ (2 pannes) ;
• si $X_n=1$, (1 seule machine en service), alors $X_{n+1}=0$ si elle ne tombe pas en panne le $n$-ième jour, et $X_{n+1}=1$ sinon (l'autre remarchera le lendemain) ;
• si $X_n=2$, alors $X_{n+1}=1$ car la machine réparée remarchera.

On a alors $P=\begin{pmatrix}(1-q)^2 & 2q(1-q) & q^2\\ 1-q & q & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

$\pi = \pi P$ et $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ donne ici : $\begin{cases} \pi_0 = (1-q)^2\pi_0 + (1-q)\pi_1 \\ \pi_2 = q^2\pi_0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$,

soit $\pi_1 = \dfrac{2q-q^2}{1-q}\pi_0$, $\pi_2 = q^2\pi_0$ et $\pi_0\left(1 + \dfrac{2q-q^2}{1-q} + q^2\right) = 1$, soit $\pi_0 = \dfrac{1-q}{1+q-q^3}$.

Ainsi, la distribution stationnaire est $\boxed{\pi = \left(\dfrac{1-q}{1+q-q^3}, \dfrac{2q-q^2}{1+q-q^3}, \dfrac{q^2-q^3}{1+q-q^3}\right)}$.

---

**Exercice 9.6**

(1) On a $P([X_{n+1} = k]/[X_n = i]) = P([s - Y_n = k]/[X_n = i]) = P([Y_n = s-k]/[X_n = i]) = \dfrac{1}{i+1}$ si $0 \leqslant s-k \leqslant i$, *i.e.* si $s-i \leqslant k \leqslant s$. $P([X_{n+1} = k]/[X_n = i])$ est donc indépendant de $n$ et l'axiome d'homogénéité est bien vérifié. De plus, la connaissance de $X_0, \cdots, X_{n-1}$ n'apporterait rien de plus pour déterminer la loi de $X_{n+1}$ donc l'axiome de Markov est aussi vérifié et $(X_n)$ est bien une chaîne de Markov de matrice de transition $P = (p_{ij})$ où $p_{ij} = \dfrac{1}{i+1}$ si $s-i \leqslant j \leqslant s$ et 0 sinon.

Pour $\pi_i = \dfrac{2(i+1)}{(s+1)(s+2)}$, on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{s} \pi_i = \frac{2}{(s+1)(s+2)}\sum_{i=0}^{s}(i+1) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}\sum_{i=1}^{s+1} i = 1$ et on a aussi :

$(\pi P)_j = \displaystyle\sum_i \pi_i p_{ij} = \sum_{i=s-j}^{s} \frac{2(i+1)}{(s+1)(s+2)}\frac{1}{i+1} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}(j+1) = \pi_j$. La chaîne étant irréductible finie, elle admet une unique distribution stationnaire : c'est donc $(\pi_i)$ où $\boxed{\pi_i = \dfrac{2(i+1)}{(s+1)(s+2)}}$.

(2) $N = \displaystyle\sum_{i=0}^{s} i\pi_i = \frac{2}{(s+1)(s+2)}\left[\sum_{i=1}^{s} i(i+1)\right]$ avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} i^2 = \frac{s(s+1)(2s+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} i = \frac{s(s+1)}{2}$, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} i(i+1) = \frac{1}{6}[s(s+1)(2s+4)] = \frac{s(s+1)(s+2)}{3}$, donc $\boxed{N = \dfrac{2s}{3}}$ et pour $s = 30$, $\boxed{N = 20}$.

---

**Exercice 9.7**

(1) La valeur de $X_n$ n'est fonction que de $X_{n-1}$ et du résultat du $n$-ième match (c'est $X_{n-1}+1$ si le $n$-ième match n'est pas perdu et c'est 0 si le $n$-ième match est perdu). Ainsi, l'axiome de Markov est vérifié. De plus, $P(X_n = k+1 \mid X_{n-1} = k) = p_k$ et $P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = k) = 1 - p_k$ indépendants de $n$ donc l'axiome d'homogénéité est aussi vérifié. On a donc bien une chaîne de Markov de matrice de transition $(p_{k,j})$ avec

$$p_{k,j} = \begin{cases} p_k \text{ si } j = k+1 \\ 1 - p_k \text{ si } j = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

On a $P^{[X_0=0]}([T_0 = 1]) = 1 - p_0$, $P^{[X_0=0]}([T_0 = 2]) = p_0(1-p_1)$ et, pour $n \geqslant 3$, il faut aller jusqu'à $n-1$ matches sans défaites, puis perdre, d'où $P^{[X_0=0]}([T_0 = n]) = p_0p_1 \cdots p_{n-2}(1-p_{n-1})$. 0 est récurrent si et seulement si $P^{[X_0=0]}([T_0 < +\infty]) = 1$.

Or $P^{[X_0=0]}([T_0 < +\infty]) = P^{[X_0=0]}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}[T_0 = k]\right) = \lim_{n\to+\infty} P^{[X_0=0]}\left(\bigcup_{k=1}^{n}[T_0 = k]\right)$ avec

$$P^{[X_0=0]}\left(\bigcup_{k=1}^{n}[T_0 = k]\right) = (1-p_0) + (p_0 - p_0p_1) + \cdots - p_0p_1\cdots p_{n-1} = 1 - r_n.$$

$r_n = p_0p_1\cdots p_{n-1}$ donc $(r_n)$ est une suite décroissante de réels positifs, qui converge nécessairement vers une limite $r \geqslant 0$.
On a donc 0 récurrent si et seulement si $r = \lim_n p_0p_1\cdots p_{n-1} = 0$.

La chaîne étant irréductible, tous les états sont de même nature. Elle admet une distribution stationnaire si et seulement si elle est récurrente positive.

On cherche donc à résoudre $\pi = \pi P$ avec $P = \begin{pmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 1-p_1 & 0 & p_1 & \ddots & \\ 1-p_2 & 0 & 0 & p_2 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\pi_n = 1$.

On obtient, à partir de la deuxième équation, $\pi_1 = p_0\pi_0$, $\pi_2 = p_1\pi_1$,...,$\pi_n = p_{n-1}\pi_{n-1}$,..., puis $\pi_2 = p_0p_1\pi_0$,...,$\pi_n = p_0p_1\cdots p_{n-1}\pi_0 = r_n\pi_0$ et on doit avoir $\pi_0\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r_n\right) = 1$. On a donc une solution si et seulement si $(\sum r_n)$ converge et cette solution est alors unique.

La chaîne est donc :

- transitoire si $\lim_n p_0p_1\cdots p_{n-1} \neq 0$ ;
- récurrente nulle si $\lim_n p_0p_1\cdots p_{n-1} = 0$ et $(\sum_n p_0p_1\cdots p_{n-1})$ diverge ;
- récurrente positive si $(\sum_n p_0p_1\cdots p_{n-1})$ converge.

(2) Dans le cas où $p_n = p$ pour tout $n$, on a $r_n = p^n$, avec $p \in ]0,1[$, donc la chaîne est récurrente positive, de distribution stationnaire donnée par $\pi_n = p^n\pi_0$ et donc $\pi_0\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} p^n\right) = \dfrac{\pi_0}{1-p} = 1$, soit $\pi_0 = 1-p$ et finalement $\pi_n = (1-p)p^n$ pour tout $n$.
Le temps moyen de retour à l'état 0 est $\mu_0 = \dfrac{1}{\pi_0} = 2$ si $p = \dfrac{1}{2}$ mais, lorsque le temps de retour à 0 est $n$, la longueur de la série est $n-1$. Ainsi, si $p = \dfrac{1}{2}$, il y a en moyenne 1 match sans défaite.

# 10 Processus de Poisson

**Exercice 10.1**

Soit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda$ et deux entiers i,j tels que $i < j$.

(1) Pour tout entier k, déterminer $\mathrm{P}(N_u = k \mid (N_s = i) \cap (N_t = j))$ dans chacun des cas suivants. $(a)$ $s \leqslant t \leqslant u$ ; $(b)$ $s \leqslant u \leqslant t$ ; $(c)$ $u \leqslant s \leqslant t$.

(2) Le flux des clients arrivant dans un service est décrit par le processus de Poisson d'intensité 10 $clients/h$ ; déterminer la probabilité pour qu'au bout de demi-heure, 2 clients soient arrivés, sachant que dans le premier quart d'heure, aucun client n'est arrivé et que deux clients sont arrivés durant la première heure.

---

**Exercice 10.2**

(1) Déterminer $F_{T_n}(t)$ en fonction de $P_{N_t}$, puis $f_{T_n}(t)$.

(2) Déterminer la covariance et le coefficient de corrélation du couple ($\mathrm{N}_s$, $\mathrm{N}_t$) sachant que $(0 < s < t)$ ; interpréter ces résultats en fonction des valeurs de $s$ et $t$.

---

**Exercice 10.3** *Paradoxe des stations de bus*

On suppose que les arrivées de bus à une station forment un processus de Poisson d'intensité $\lambda$, ce qui n'est pas réaliste, compte tenu de la régulation imposée à un réseau citadin de bus. Un passager arrive à la station au temps $\theta$ : soient $U$ le temps qui sépare $\theta$ du temps de la prochaine arrivée et $V$ le temps qui sépare $\theta$ de la dernière arrivée si un bus est passé avant $\theta$, $\theta$ si aucun bus n'est passé.

(1) Déterminer les lois de $U$ et $V$.

(2) Démontrer l'indépendance des v.a. $U$ et $V$, en calculant $P((U > y) \cap (V > x))$ dans chacun des deux cas : $0 < x < \theta$ et $x \geqslant \theta$. De l'égalité des lois de $U$ et $T$, temps aléatoire qui sépare deux arrivées consécutives, on déduit que quelque soit l'instant d'arrivée à une station de bus, le temps d'attente moyen est constant. On constate que $E(U + V)$ est distinct de $E(T)$.

---

**Exercice 10.4**

Sur une route à sens unique, l'écoulement des voitures est poissonnien d'intensité $\lambda = \dfrac{1}{6}$. Un piéton arrive à l'instant $t$ sur le bord de la route.

(1) Probabilité pour qu'il attende, sachant qu'il lui faut 4 secondes pour traverser ?

(2) Quelle est la durée moyenne des intervalles lui permettant de traverser ?

(3) Quel est le nombre moyen de voitures qu'il voit passer avant de traverser ?

---

**Exercice 10.5**

Des bus arrivent à un arrêt selon un processus de Poisson d'intensité $\lambda$. De l'arrêt à votre domicile il vous faut $t_1$ minutes en bus et $t_2$ minutes à pied. Vous décidez d'attendre le bus $s$ minutes et de partir à pied s'il n'est pas arrivé. Soit $T$ le temps écoulé entre votre arrivée et celle du bus et $W$ le temps mis pour rentrer.

(1) Vérifier que : $W = (T + t_1)\mathbf{1}_{[0,s]}(T) + (s + t_2)\mathbf{1}_{]s,+\infty[}(T)$

(2) En déduire $E(W)$.

(3) Temps moyen pour rentrer chez vous ? Trouver la valeur de s qui minimise ce temps. [ Considérer trois cas selon la valeur de $\lambda$ par rapport à $\dfrac{1}{t_2 - t_1}$.]

---

**Exercice 10.6** *Nombre d'occurrences sur un intervalle de temps aléatoire*

(1) Calculer la loi du nombre aléatoire $X$ d'occurrences d'un processus de Poisson d'intensité $\lambda$ sur une durée $U$ aléatoire de densité $f_U$. Application au cas où $U$ est de loi exponentielle.

(2) Déterminer la fonction génératrice $g_X$ de $X$, et en déduire $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

---

**Exercice 10.7**

Un radar est placé sur une route où il passe en moyenne 5 véhicules en excès de vitesse par heure. On admet que ces véhicules forment un Processus de Poisson $(N_t)$.

(1) Déterminer la probabilité qu'1 voiture ait été prise dans le premier 1/4 d'heure sachant que 2 ont été prises en 1 heure.

(2) On suppose ici que la durée de fonctionnement du radar $T$ suit une loi exponentielle de moyenne 100 heures. Déterminer la loi du nombre $N$ de véhicules détectés par le radar et le nombre moyen de ces véhicules. Pour cela :

a) Expliquer la relation $P^{(T=t)}([N = k]) = P([N_t = k])$.

b) En utilisant $P([N = k]) = \int P^{(T=t)}([N = k]) f_T(t)\, dt$, établir que $N$ suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$.

**Corrigés des exercices**

**Exercice 10.1**

(1) $P(N_u = k \mid N_s = i,\, N_t = j) = \dfrac{P(N_u = k,\, N_s = i,\, N_t = j)}{P(N_s = i,\, N_t = j)}$ avec

$$\begin{array}{rcl} P(N_s = i,\, N_t = j) & = & P(N_s = i,\, N_t - N_s = j - i) \\ & = & P(N_s = i)P(N_t - N_s = j - i) \\ & = & P(N_s = i)P(N_{t-s} = j - i) \\ & = & e^{-\lambda s}\dfrac{(\lambda s)^i}{i!}\, e^{-\lambda(t-s)}\dfrac{(\lambda(t-s))^{j-i}}{(j-i)!} \\ & = & e^{-\lambda t}\dfrac{\lambda^j s^i (t-s)^{j-i}}{i!(j-i)!} \end{array}$$

a) Cas $s \leqslant t \leqslant u$. Pour $i \leqslant j \leqslant k$, on a :

$$\begin{array}{rcl} P(N_u = k,\, N_s = i,\, N_t = j) & = & P(N_s = i,\, N_t - N_s = j - i,\, N_u - N_t = k - j) \\ & = & P(N_s = i)P(N_t - N_s = j - i)P(N_u - N_t = k - j) \\ & = & P(N_s = i)P(N_{t-s} = j - i)P(N_{u-t} = k - j) \end{array}$$

On a donc $P(N_u = k \mid N_s = i,\ N_t = j) = P(N_{u-t} = k - j) = e^{-\lambda(u-t)}\,\dfrac{(\lambda(u-t))^{k-j}}{(k-j)!}$, qui est donc indépendant de l'événement $(N_s = i)$ antérieur aux événements $(N_t = j)$ et $(N_u = k)$.

b) Cas $s \leqslant u \leqslant t$. Pour $i \leqslant k \leqslant j$, on a :

$$\begin{array}{rcl} P(N_u = k,\, N_s = i,\, N_t = j) & = & P(N_s = i,\, N_u - N_s = k - i,\, N_t - N_u = j - k) \\ & = & P(N_s = i)P(N_u - N_s = k - i)P(N_t - N_u = j - k) \\ & = & P(N_s = i)P(N_{u-s} = k - i)P(N_{t-u} = j - k) \end{array}$$

On a donc

$$\begin{array}{rcl} P(N_u = k \mid N_s = i,\, N_t = j) & = & \dfrac{P(N_{u-s} = k - i)P(N_{t-u} = j - k)}{P(N_{t-s} = j - i)} \\ & = & \dfrac{e^{-\lambda(u-s)}\ \frac{(\lambda(u-s))^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda(t-u)}\ \frac{(\lambda(t-u))^{j-k}}{(j-k)!}}{e^{-\lambda(t-s)}\ \frac{(\lambda(t-s))^{j-i}}{(j-i)!}}. \end{array}$$

soit $P([N_u = k \mid N_s = i,\ N_t = j) = C_{j-i}^{k-i}\dfrac{(u-s)^{k-i}(t-u)^{j-k}}{(t-s)^{j-i}}$.

c) Cas $u \leqslant s \leqslant t$. Pour $k \leqslant i \leqslant j$, on a :

$$\begin{array}{rcl} P(N_u = k,\ N_s = i,\ N_t = j]) & = & P(N_u = k,\ N_s - N_u = i - k,\ N_t - N_s = j - i) \\ & = & P(N_u = k)P(N_s - N_u = i - k)P(N_t - N_s = j - i) \\ & = & P(N_u = k)P(N_{s-u} = i - k)P(N_{t-s} = j - i) \end{array}$$

On a donc

$$\begin{aligned} P(N_u = k \,|\, N_s = i,\ N_t = j) &= \frac{P(N_u = k)P(N_{s-u} = i-k)}{P(N_s = i)} \\ &= \frac{e^{-\lambda u}\,\frac{(\lambda u)^k}{k!}e^{-\lambda(s-u)}\,\frac{(\lambda(s-u))^{i-k}}{(i-k)!}}{e^{-\lambda s}\,\frac{(\lambda s)^i}{i!}}. \end{aligned}$$

On a donc $P(N_u = k \,|\, N_s = i,\ N_t = j) = C_i^k\, \dfrac{u^k(s-u)^{i-k}}{s^i}$.

soit $P(N_u = k \mid N_s = i,\ N_t = j) = C_i^k \dfrac{u^k(s-u)^{i-k}}{s^i}$.

(2) Application : $u = 1/2$, $k = 1$ et $s = 1/4$, $t = 1$, $i = 0$ et $j = 2$.

On est dans le cas b) ; $u - s = \dfrac{1}{4}$, $t - u = \dfrac{1}{2}$, $t - s = \dfrac{3}{4}$, $k - i = 1$, $j - k = 1$, $j - i = 2$ et la valeur de $\lambda$ n'a pas d'importance. $p = 2 \times \dfrac{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$, soit $p_1 = \dfrac{4}{9} \approx 0,44$.

---

**Exercice 10.2**

(1) $F_{T_n}(t) = P([T_n \leqslant t]) = P([N_t \geqslant n]) = 1 - P([N_t \leqslant n-1])$ pour $n \geqslant 1$ ($T_0 = 0$), soit $F_{T_n}(t) = 1 - e^{-\lambda t}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ pour $n \geqslant 1$ et $t > 0$. On a alors,

$$\begin{aligned} f_{T_n}(t) = F'_{T_n}(t) &= \lambda e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!} - e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda^k\, k t^{k-1}}{k!} \\ &= e^{-\lambda t}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^{k+1}t^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}\right] \\ &= e^{-\lambda t}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^{k+1}t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{\lambda^{k+1}t^k}{k!}\right] \end{aligned}$$

et finalement $f_{T_n}(t) = \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}e^{-\lambda t}\, t^{n-1}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)$ : on reconnait la densité de la loi gamma $\gamma(\lambda, n)$.

(2) $\mathbb{E}(N_s N_t) = \mathbb{E}(N_s(N_t - N_s) + N_s^2) = \mathbb{E}(N_s)\mathbb{E}(N_t - N_s) + \mathbb{E}(N_s^2)$ car $N_s$ et $N_t - N_s$ sont indépendantes. De plus, $N_t - N_s$ a même loi que $N_{t-s}$ et si $X$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{E}(X) = \mathrm{var}(X) = \lambda$. Comme ici $N_t$ est de loi $\mathcal{P}(\lambda t)$, on a donc :

$$\mathrm{cov}(N_s, N_t) = \mathrm{cov}(N_s, N_t - N_s + N_s) = \mathrm{cov}(N_s, N_t - N_s) + \mathrm{var}(N_s) = \mathrm{var}(N_s) = \lambda s$$

car $N_s$ et $N_t - N_s$ sont indépendantes, donc décorrélées.

$$\rho(N_s, N_t) = \frac{\mathrm{cov}(N_s, N_t)}{\sqrt{\mathrm{var}N_s}\sqrt{\mathrm{var}N_t}} = \frac{\lambda s}{\lambda\sqrt{st}} = \sqrt{\frac{s}{t}}$$

Plus $s$ est proche de $t$, plus $N_s$ et $N_t$ sont fortement corrélées, ce qui paraît logique.

---

**Exercice 10.3**

(1) Loi de $V$ : $\forall x > \theta$, $P([V > x]) = 0$.

$\forall x \in [0, \theta[$, l'événement $[V > x]$ signifie que pendant la durée $x$ précédant $\theta$, il n'y a aucune arrivée :

$$P([V > x]) = P([N_\theta - N_{\theta - x} = 0]) = P([N_x = 0]) = e^{-\lambda x}$$

pour $x \in [0, \theta[$, 0 si $x \geqslant \theta$. D'où une loi de $V$, de forme mixte, définie par :

$$F_V(x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathbf{1}_{[0,\theta[}(x) + \mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}(x).$$

Loi de $U$ : $P([U > x]) = P([N_{\theta+x} - N_\theta = 0]) = P([N_x = 0]) = e^{-\lambda x}$ car $[U > x]$ signifie que pendant la durée $x$ qui suit $\theta$, il n'y a aucune arrivée.

(2) Indépendance de $U$ et $V$.

Si $0 < x < \theta$ et $y > 0$ : $[V > x] \cap [U > y]$ signifie qu'il n'y a aucune arrivée entre $\theta - x$ et $\theta + y$ donc

$$P([V > x] \cap [U > y]) = e^{-\lambda(x+y)} = e^{-\lambda x}e^{-\lambda y} = P([V > x])P([U > y]).$$

Si $x \geqslant \theta$ et $y > 0$ : $P([V > x] \cap [U > y]) = 0 = P([V > x])P([U > y])$.

$\mathbb{E}(U) = \dfrac{1}{\lambda}$ ; $\mathbb{E}(V) = \displaystyle\int_0^\theta P([V > s])\, ds = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda\theta})$ donc :

$$\mathbb{E}(U + V) = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda\theta} > \frac{1}{\lambda} = \mathbb{E}(T).$$

---

**Exercice 10.4**

Le piéton arrive au bord de la route à un instant $\theta$. On note $U$ la v.a.r. qui sépare $\theta$ de la prochaine arrivée de voiture.

(1) Le piéton ayant besoin d'au moins 4s pour traverser, il devra attendre si $U \leqslant 4$.

Or $P([U \leqslant 4]) = \displaystyle\int_0^4 \lambda e^{-\lambda u}\, du = \Big[-e^{-\lambda u}\Big]_0^4 = 1 - e^{-4\lambda}$ car on a vu à l'exercice 3 que $U$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Comme $\lambda = 1/6$, $P([U \leqslant 4]) = 1 - e^{-4/6}$.

La probabilité pour qu'il doive attendre est donc $\boxed{1 - e^{-2/3} \approx 0,487}$.

(2) On cherche $\mathbb{E}^{[U>4]}(U)$ c'est-à-dire $\displaystyle\int u f_U^{[U>4]}(u)\, du$. On a

$$\begin{aligned} F_U^{[U>4]}(u) &= P^{[U>4]}([U \leqslant u]) = \frac{P([U \leqslant u] \cap [U > 4])}{P([U > 4])} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } u \leqslant 4 \\ \dfrac{P([4 < U \leqslant u])}{P([U > 4])} = \dfrac{F_U(u) - F_U(4)}{P([U > 4])} & \text{si } u > 4 \end{cases} \end{aligned}$$

et donc $f_U^{[U>4]}(u) = \dfrac{f_U(u)}{P([U>4])}\,\mathbf{1}_{]4,+\infty[}(u) = \lambda\, e^{-\lambda(u-4)}\,\mathbf{1}_{]4,+\infty[}(u)$ puis

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{[U>4]}(U) &= \int_4^{+\infty} \lambda u\, e^{-\lambda(u-4)}\,du \underset{v=u-4}{=} \int_0^{+\infty} \lambda(v+4)\,e^{-\lambda v}\,dv \\
&= \int_0^{+\infty} v\lambda\, e^{-\lambda v}\,dv + 4\int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda v}\,dv = \frac{1}{\lambda}+4
\end{aligned}$$

car $\displaystyle\int_0^{+\infty} v\lambda\, e^{-\lambda v}\,dv$ est l'espérance d'une v.a.r. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda v}\,dv$ l'intégrale de sa densité.

Ainsi, $\boxed{\text{il faut en moyenne } 6+4=10\text{s pour que le piéton puisse traverser}}$.

(3) Soit $N$ le nombre moyen de voitures que voit passer le piéton avant de pouvoir traverser la route. On a

- $[N=0]=[U>4]$, où $U$ est le temps entre l'arrivée du piéton et la prochaine voiture ;
- $[N=1]=[U\leqslant 4]\cap[U_1>4]$ où $U_1$ est le temps entre la première et la deuxième voiture qui se présentent après l'arrivée du piéton.
- Plus généralement, $[N=k]=[U\leqslant 4]\cap[U_1\leqslant 4]\cdots\cap[U_{k-1}\leqslant 4]\cap[U_k>4]$ où $U_k$ est le temps entre la $k$-ième et la $(k+1)$-ième voiture qui se présentent après l'arrivée du piéton.

Les v.a.r. $U,\ U_1,\cdots,U_k$ étant toutes indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ on a $P([N=0])=P([U>4])=e^{-4\lambda}$ et

$$\begin{aligned}
P([N=k]) &= P([U\leqslant 4])P([U_1\leqslant 4])\cdots P([U_{k-1}\leqslant 4])P([U_k>4]) \\
&= e^{-4\lambda}(1-e^{-4\lambda})^k = e^{-2/3}(1-e^{-2/3})^k
\end{aligned}$$

(valable aussi pour $k=0$). On reconnait la loi géométrique $\mathcal{G}_0(e^{-2/3})$ sur $\mathbb{N}$ définie par : $P(X=k)=p(1-p)^k$.

La fonction génératrice de $N$ est :

$$G_N(s)=\sum_{k=0}^{+\infty} s^k\,P([N=k]) = e^{-2/3}\sum_{k=0}^{+\infty}(s(1-e^{-2/3}))^k$$

soit $G_N(s)=\dfrac{e^{-2/3}}{1-s(1-e^{-2/3})}$ et $G_N'(s)=\dfrac{e^{-2/3}(1-e^{-2/3})}{(1-s(1-e^{-2/3}))^2}$.

On a alors $\mathbb{E}(N)=G_N'(1)=\dfrac{1-e^{-2/3}}{e^{-2/3}}=e^{2/3}-1\approx 0,948$.

$\boxed{\text{Le piéton voit donc passer en moyenne 1 voiture avant de traverser}}$.

---

**Exercice 10.5**

1) $P(X=k)=\displaystyle\int_0^{+\infty} P(X=k\mid U=u)f_U(u)\,du = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda u}(\lambda u)^k}{k!}f_U(u)\,du.$

Si $U$ est de loi exponentielle de paramètre $\alpha$,

$$\begin{aligned}
P([X=k]) &= \int_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda u}(\lambda u)^k}{k!}\alpha e^{-\alpha u}\,du = \frac{\lambda^k}{k!}\alpha\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+\lambda)u}u^k\,du \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\alpha\frac{1}{(\alpha+\lambda)^{k+1}}\,\Gamma(k+1) = \left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}\right)^k\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : $X$ est une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}_0\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)$.

(2) $g_X(s) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} s^k P([X=k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u}(\lambda u s)^k}{k!} f_U(u)\,du = \int_0^{+\infty} e^{\lambda u(s-1)} f_U(u)\,du.$

Ainsi, $g'_X(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda u e^{\lambda u(s-1)} f_U(u)\,du$ et $g''_X(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda^2 u^2 e^{\lambda u(s-1)} f_U(u)\,du$ et, pour $s=1$, on obtient $\mathbb{E}(X) = g'_X(1) = \lambda\mathbb{E}(U)$ et $g''_X(1) = \lambda^2\mathbb{E}(U^2)$ donc $\mathrm{var}(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - g'_X(1)^2$, soit $\mathrm{var}(X) = \lambda^2\mathrm{var}(U) + \lambda\mathbb{E}(U)$.

(3) Si $U$ est de loi exponentielle de paramètre $\alpha$, on a alors $\mathbb{E}(U) = \dfrac{1}{\alpha}$ et $\mathrm{var}(U) = \dfrac{1}{\alpha^2}$, donc $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\lambda}{\alpha}$ et $\mathrm{var}(X) = \dfrac{\lambda^2}{\alpha^2} + \dfrac{\lambda}{\alpha}$.

---

**Exercice 10.6**

$$P([X=k]) = \int_0^{+\infty} P([N_T=k]/[T=t]) f_T(t)\,dt$$

où $f_T$ est la densité de la loi gamma $\gamma(1,a)$ égale à : $\dfrac{t^{a-1}e^{-t}}{\Gamma(a)}$.

---

**Exercice 10.7**

(1) En utilisant successivement les propriétés d'un processus de Poisson (indépendance des accroissements, stationnarité, et $N_t$ de loi $\mathcal{P}(\lambda t)$), il vient :

$$\begin{aligned}
P(N_{1/4}=1 \mid N_1=2) &= \frac{P(N_{1/4}=1,\, N_1=2)}{P(N_1=2)} = \frac{P(N_{1/4}=1,\, N_1-N_{1/4}=1)}{P(N_1=2)} \\
&= \frac{P(N_{1/4}=1)P(N_1-N_{1/4}=1)}{P(N_1=2)} = \frac{P(N_{1/4}=1)P(N_{3/4}=1)}{P(N_1=2)} \\
&= \frac{e^{-\frac{\lambda}{4}}\ \frac{\lambda}{4} \times e^{-\frac{3\lambda}{4}}\ \frac{3\lambda}{4}}{e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^2}{2!}} = \frac{3\times 2}{4\times 4} = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

(2) Si $T=t$ le radar aura enregistré les véhicules de 0 à $t$ et leur nombre est exactement $N_t$. Ainsi, $P_N^{T=t} = P_{N_t}$ . Avec $f_T(t) = \dfrac{1}{100}e^{-\frac{t}{100}}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)$, on a alors

$$\begin{aligned}
P([N=n]) &= \int P^{T=t}([N=n]) f_T(t)dt = \int P([N_t=n]) f_T(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\ \frac{(\lambda t)^n}{n!}\ \frac{1}{100}e^{-\frac{t}{100}}\ dt = \frac{\lambda^n}{100 n!}\int_0^{+\infty} t^n\ e^{-(\lambda+\frac{1}{100})t}\ dt
\end{aligned}$$

et en posant $u = \left(\lambda + \dfrac{1}{100}\right)t$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\ e^{-(\lambda+\frac{1}{100})t}\ dt = \frac{\Gamma(n+1)}{(\lambda+\frac{1}{100})^{n+1}} = \frac{100^{n+1}\ n!}{(100\lambda+1)^{n+1}}$ donc $P([N=n]) = \dfrac{(100\lambda)^n}{(100\lambda+1)^{n+1}} = \dfrac{1}{100\lambda+1}\left(\dfrac{100\lambda}{100\lambda+1}\right)^n$ de la forme $pq^n$. Ainsi, avec $\lambda=5$, $N$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}_0\left(\dfrac{1}{501}\right)$, et $\mathbb{E}(N) = \dfrac{q}{p} = 500$ .

# 11 Annales d'examen

**ENSICA deuxième année**

Test : 04-10-2012

**Probabilités - 3TMA4**

*Les 3 exercices sont indépendants* - **Le document est recto-verso, donc pensez à tourner la feuille !**

---

**Exercice I :** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$. On pose $Y_n = X_{n+1}X_n$ et $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

**1.** Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y_n$. Calculer $E(Y_n)$ et $\mathrm{Var}(Y_n)$.

**2.** a) Montrer que les variables aléatoires $Y_i$ et $Y_{i+1}$ ne sont pas indépendantes.
b) Montrer que les variables aléatoires $Y_i$ et $Y_j$ pour $j > i+1$ sont indépendantes.

**3.** Calculer $E(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$

---

**Exercice II :** Soit $(X,Y)$ un couple aléatoire de densité $f$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2y} & \text{si } (x,y) \in \Delta = \{(x,y)\ ;\ x > 1 \text{ et } \dfrac{1}{x} < y \leqslant x\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**1.** Déterminer la loi de $X$ et la loi de $X^2$.

Une variable aléatoire continue réelle est de loi Gamma de paramètres $\lambda > 0$ et $a > 0$ si sa densité $f$ est définie par $f(x) = \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \exp(-\lambda x) x^{a-1} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$ où $\Gamma(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{a-1} dt$.

**2.** a) Montrer que la loi de $T = \ln X$ est une loi Gamma.
b) En déduire $\mathbb{E}(T)$.

**3.** a) Déterminer la loi de $Y$ (on distinguera les cas $y \in ]0,1[$ et $y \geqslant 1$).
b) Les v.a.r. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**4.** a) Déterminer la densité $g$ du couple $(U,V) = (XY, X^2)$.
b) En déduire les lois marginales de $(U,V)$.

---

<u>**Exercice III :**</u> Supposons que des boîtes de céréales contiennent chacune un coupon parmi $n$ coupons possibles. Un collectionneur souhaite posséder au moins un exemplaire de chacun des coupons. Il voudrait savoir combien il faut acheter en moyenne de boîtes de céréales pour cela.

Soit $X$ le nombre de boîtes qui ont du être achetées pour posséder tous les $n$ coupons. On appelle $X_i$ le nombre de boîtes achetées avant d'avoir un nouveau coupon lorsque l'on possède déjà $i-1$ coupons (avec $i \geqslant 2$). On a donc que

$$X = 1 + \sum_{i=2}^{n} X_i.$$

**1.** Soit $2 \leqslant i \leqslant n$. Montrer que $X_i$ suit une loi géométrique de paramètre $0 < p_i < 1$ et donner la valeur de $p_i$.

**2.** En déduire $\mathbb{E}(X_i)$ et $\mathrm{Var}(X_i)$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$.

**3.** En utilisant la relation $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \log(n) + O(1)$, montrer que $\mathbb{E}(X) = n\log(n) + O(n)$.

**Les 2 questions suivantes sont à faire si vous avez terminé tout le reste des exercices.**

**4. (bonus)** Montrer que $\displaystyle\mathrm{Var}(X) \leqslant n^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-2} = n^2 \frac{\pi^2}{6}$.

**5. (bonus)** Soit $\displaystyle H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$. En utilisant l'inégalité de Tchebychev montrer que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left( \left| \frac{X}{nH_n} - 1 \right| > \epsilon \right) = 0.$$

**ENSICA deuxième année**

Corrigé du Test de Probabilités du 04-10-2012

---

__Exercice I :__ **[8 points]**

**1.** $Y_n(\Omega)=\{0,1\}$ et $P(Y=1)=P((X_n=1)\cap(X_{n+1}=1))=P(X_n=1)P(X_{n+1}=1)=p^2$ car $X_n$ et $X_{n+1}$ sont indépendantes. Ainsi, $\boxed{Y_n \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(p^2)}$ [*1,5pts*]. On a donc $\boxed{\mathbb{E}(Y_n)=p^2}$ [*0.5pt*] et $\boxed{\mathrm{Var}(Y_n)=p^2(1-p^2)}$ [*0.5pt*].

**2.** a) On a $\mathbb{E}(Y_iY_{i+1})=\mathbb{E}(X_iX_{i+1}^2X_{i+2})=\mathbb{E}(X_iX_{i+1}X_{i+1})$ car $X_{i+1}=X_{i+1}^2$. On utilise ensuite l'indépendance des $X_n$ donc $\mathbb{E}(Y_iY_{i+1})=\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_{i+1})\mathbb{E}(X_{i+2})=p^3$ et $\mathrm{Cov}(Y_i,Y_{i+1})=\mathbb{E}(Y_iY_{i+1})-\mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_{i+1})=p^3-p^4=p^3(1-p)\neq 0$.
$\boxed{Y_i \text{ et } Y_{i+1} \text{ ne sont pas indépendantes}}$, puisqu'elles sont décorrélées [*1,5pt*].

b) $Y_i=X_iX_{i+1}$ et $Y_j=X_jX_{j+1}$ avec $X_i$, $X_{i+1}$, $X_j$ et $X_{j+1}$ indépendantes (indices tous distincts). Ainsi, toute fonction des deux premières est indépendante de toute fonction des deux dernières. En particulier, $\boxed{Y_i \text{ et } Y_j \text{ pour } j>i+1 \text{ sont indépendantes}}$ [*1pt*].

**3.** Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_n)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(Y_i)$ et comme par 1. $\mathbb{E}(Y_i)=p^2$ pour tout $i$, on a $\boxed{\mathbb{E}(S_n)=p^2}$ [*1pt*]. $\mathrm{Var}(S_n)=\dfrac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)=\dfrac{1}{n^2}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(Y_i)+2\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{Cov}(Y_i,Y_{i+1})\right)$. Or $\mathrm{Var}(Y_i)=p^2(1-p^2)$ et $\mathrm{Cov}(Y_i,Y_{i+1})=p^3(1-p)$ donc $\mathrm{Var}(S_n)=\dfrac{np^2(1-p^2)+2(n-1)p^3(1-p)}{n^2}$ soit $\boxed{\mathrm{Var}(S_n)=\dfrac{np^2+2(n-1)p^3+(2-3n)p^4}{n^2}}$ [*2pts*].

---

__Exercice II :__ **[10 points]**

**1.** $f_X(x)=\displaystyle\int f(x,y)\,dy=\frac{1}{2x^2}\int_{x^{-1}}^{x}\frac{1}{y}\,dy\ \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x)$, soit $\boxed{f_X(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}\,\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x)}$ [*1,5pt*].
$F_{X^2}(s)=P(X^2\leqslant s)=P(-\sqrt{s}\leqslant X\leqslant\sqrt{s})\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(s)=(F_X(\sqrt{s})-F_X(-\sqrt{s}))\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(s)$ et $f_{X^2}(s)=F'_{X^2}(s)=\dfrac{1}{2\sqrt{s}}(f_X(\sqrt{s})+f_X(-\sqrt{s}))\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(s)=\dfrac{1}{2\sqrt{s}}\dfrac{\ln\sqrt{s}}{s}\,\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(\sqrt{s})\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(s)$ soit finalement $\boxed{f_{X^2}(s)=\dfrac{\ln s}{4s\sqrt{s}}\,\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(s)}$ [*1,5pt*].

**2.** a) $F_T(t)=P(T\leqslant t)=P(\ln X\leqslant t)=P(X\leqslant e^t)=F_X(e^t)$ car $t\mapsto e^t$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors $f_T(t)=F'_T(t)=f_X(e^t)e^t=\dfrac{t}{e^{2t}}e^t\,\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(e^t)$, soit $\boxed{f_T(t)=te^{-t}\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)}$. Ainsi, $\boxed{T \text{ suit la loi Gamma de paramètres } \lambda=1 \text{ et } a=2}$ [*1,5pt*].

b) On a, d'après le cours, $\mathbb{E}(T)=\dfrac{a}{\lambda}$ donc ici $\boxed{\mathbb{E}(T)=2}$ [*0,5pt*].

**3.** a) $f_Y(y)=\displaystyle\int f(x,y)\,dx$. Or $(x,y)\in\Delta$ équivaut à $x^{-1}<y$ et $y<x$, soit $x>y^{-1}$ et $x>y$ donc $f_Y(y)=\dfrac{1}{2y}\left[-\dfrac{1}{x}\right]_{\max(y,y^{-1})}^{+\infty}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$. Si $y\in]0,1[$, $\max(y^{-1},y)=y^{-1}$ et $f_Y(y)=\dfrac{1}{2}$ ; si $y\geqslant 1$, $\max(y^{-1},y)=y$ et $f_Y(y)=\dfrac{1}{2y^2}$. Ainsi, $\boxed{f_Y(y)=\dfrac{1}{2}\,\mathbb{1}_{]0,1[}(y)+\dfrac{1}{2y^2}\,\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(y)}$ [*1,5pt*].

b) Le domaine $\Delta$ de $f_{X,Y}$ n'est pas un pavé donc on ne peut pas avoir $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. $\boxed{\text{Les v.a.r. } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$ [*0,5pt*].

**4.** a) On pose $h(x,y) = (u,v) = (xy, x^2)$ pour tout $(x,y) \in \Delta$. On a alors, comme $x^{-1} < y < x$, $1 < u < v$ (multiplication par $x$) avec $x = \sqrt{v}$ et $y = \dfrac{u}{\sqrt{v}}$. Ainsi, $h^{-1}(u,v) = \left(\sqrt{v}, \dfrac{u}{\sqrt{v}}\right)$.

$$J_{h^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{1}{2\sqrt{v}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{v}} & -\dfrac{u}{2v\sqrt{v}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2v} \text{ et } f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}\left(\sqrt{v}, \frac{u}{\sqrt{v}}\right)\frac{1}{2v}\,\mathbb{1}_{1<u<v} = \frac{\sqrt{v}}{4uv^2}\,\mathbb{1}_{1<u<v},$$

soit $\boxed{g(u,v) = \dfrac{1}{4uv^{3/2}}\,\mathbb{1}_{\Delta'}(u,v) \text{ où } \Delta' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;;\; 1 < u < v\}}$ [*1pt*].

b) $f_U(u) = \displaystyle\int g(u,v)\,dv = \frac{1}{2u}\left[-\frac{1}{\sqrt{v}}\right]_u^{+\infty} \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(u)$, soit $\boxed{f_U(u) = \dfrac{1}{2u^{3/2}}\,\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(u)}$ [*1pt*].

$f_V(v) = \displaystyle\int g(u,v)\,du = \frac{1}{4v^{3/2}}\,[\ln u]_1^v\,\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(v)$, soit $\boxed{f_V(v) = \dfrac{\ln v}{4v\sqrt{v}}\,\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(v)}$ [*1pt*] : on retrouve la densité trouvée à la question 1.

---

**<u>Exercice III :</u> [4 points]**

**1.** On a $X_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $(X_i = k)$ est réalisé si, durant $k-1$ tirages, on obtient un des $i-1$ coupons que l'on possède déja (probabilité $\dfrac{i-1}{n}$ pour chacun de ces tirages) et au tirage suivant, on obtient un nouveau coupon (probabilité $\dfrac{n-i+1}{n}$). On a donc $P(X_i = k) = \left(\dfrac{i-1}{n}\right)^{k-1}\dfrac{n-i+1}{n}$.

Ainsi, $\boxed{X_i \text{ suit la loi géométrique } \mathcal{G}(p_i) \text{ où } p_i = \dfrac{n-i+1}{n}}$ [*1,5pt*].

**2.** On déduit du cours que $\boxed{\mathbb{E}(X_i) = \dfrac{1}{p_i} = \dfrac{n}{n-i+1}}$ et $\boxed{\mathrm{Var}(X_i) = \dfrac{1-p_i}{p_i^2} = \dfrac{n(i-1)}{(n-i+1)^2}}$ [*1pt*].

**3.** L'espérance étant linéaire, $\mathbb{E}(X) = 1 + \displaystyle\sum_{i=2}^{n}\mathbb{E}(X_i) = 1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{n}{n-i+1}$. On fait le changement d'indice $k = n-i+1$. On a alors $\mathbb{E}(X) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{k}$ soit, avec $1 = \dfrac{n}{n}$, $\boxed{\mathbb{E}(X) = n\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$. On a bien, en utilisant la relation $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = \ln(n) + O(1)$, $\boxed{\mathbb{E}(X) = n\ln(n) + O(n)}$ [*1,5pt*].

**4.** Les variables aléatoires $X_i$ étant indépendantes, on a $\mathrm{Var}(X) = \displaystyle\sum_{i=2}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{n(n-k)}{k^2}$ avec le même changement d'indice que dans 3. Or $n(n-k) \leqslant n^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-k)}{k^2} \leqslant n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant n^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On a donc bien $\boxed{\mathrm{Var}(X) \leqslant n^2\dfrac{\pi^2}{6}}$ [*1pt bonus*].

**5.** On a $\mathbb{E}\left(\dfrac{X}{nH_n}\right) = \dfrac{\mathbb{E}(X)}{nH_n} = 1$ et $\mathrm{Var}\left(\dfrac{X}{nH_n}\right) = \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{n^2H_n^2} \leqslant \dfrac{\pi^2}{6H_n^2}$. Si on applique l'inégalité de Tchebychev : $P(|Z - \mathbb{E}(Z)| > \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathrm{Var}(Z)}{\varepsilon^2}$ à $Z = \dfrac{X}{nH_n}$, on obtient $P\left(\left|\dfrac{X}{nH_n} - 1\right| > \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\pi^2}{6\varepsilon^2 H_n^2}$ et, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$, on a bien $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{X}{nH_n} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0}$ [*1pt bonus*].

**ENSICA deuxième année**

Examen : 08-11-2012

**Probabilités - 3TMA4**

*Les 3 exercices sont indépendants*

---

## Exercice 1 - Répartition de boules dans des urnes

On dispose de $N$ boules numérotées de 1 à $N$, ($N \geqslant 2$), qui sont réparties dans deux urnes : $k$ dans l'urne $U_1$ et $N-k$ dans l'urne $U_2$ (avec $0 \leqslant k \leqslant N$). On tire au sort un numéro compris entre 1 et $N$ de façon equiprobable, puis on change d'urne la boule dont le numéro a été tiré. On note alors $X_1$ le nombre de boules dans l'urne $U_1$. On réitère l'opération et on note $X_n$ le nombre de boules dans l'urne $U_1$ après $n$ opérations.

**Q. 1.1.** *Déterminer la loi de $X_1$ [Dans un premier temps, traiter à part les cas $k=0$ et $k=N$].*

**Q. 1.2.** *Montrer que*

$$\mathbb{E}(X_1) = k\left(1 - \frac{2}{N}\right) + 1.$$

**Q. 1.3.** *Déterminer la loi conditionnelle de $X_{n+1}$ sachant $X_n = q$, c'est à dire calculer*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = p | X_n = q)$$

*pour $p$ et $q$ deux entiers entre $0$ et $N$.*

**Q. 1.4.** *Déduire des questions précédentes l'espérance conditionnelle de $X_{n+1}$ sachant $X_n$ puis établir une relation de récurrence entre $\mathbb{E}(X_{n+1})$ et $\mathbb{E}(X_n)$.*

**Q. 1.5.** *En déduire la valeur de $E(X_n)$ et déterminer la limite de $E(X_n)$ quand $n \to +\infty$.*

On peut également considérer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{0, 1, \ldots, N\}$ de loi initiale $\pi(0) = (\mathbb{P}(X_0 = 0), \mathbb{P}(X_0 = 1), \ldots, \mathbb{P}(X_0 = N))$ où $X_0$ est un nombre aléatoire de boules dans l'urne $U_1$.

**Q. 1.6.** *Donner la matrice de transition $P$ de la chaîne.*

**Q. 1.7.** *Tracer le graphe de transition de la chaîne. Est-elle irréductible ?*

On pose $\pi_q = \dfrac{1}{2^N}\dbinom{N}{q}$ et $\pi = (\pi_q)_{0\leqslant q\leqslant N}$

**Q. 1.8.** *Montrer que $\pi$ est une distribution stationnaire de la chaîne.*

**Q. 1.9.** *Montrer que $\pi$ est l'unique distribution stationnaire et que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est récurrente positive (à bien justifier à l'aide des théorèmes du cours).*

**Q. 1.10.** *Soit $0 \leqslant k \leqslant N$. Si l'on démarre avec $k$ boules dans l'urne $U_1$, au bout de combien de temps en moyenne a-t-on de nouveau $k$ boules dans l'urne $U_1$ ? Comparer les cas $k = 0$ et $k = 5$ pour $N = 10$. Si $N$ tend vers l'infini, que peut-on dire du temps moyen de retour à $k = 0$ boules dans l'urne $U_1$ ?*

---

**Exercice 2 - Autour du maximum d'un nombre aléatoire de variables aléatoires**

Soit $(X_i)$ une suite de variables indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda$. On pose $Y_n = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{X_i\}$ et $Z_n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{X_i\}$.

**Q. 2.1.** *Déterminer la fonction de répartition puis la densité de la variable aléatoire $Y_n$.*

**Q. 2.2.** *Déterminer la fonction de répartition puis la densité de la variable aléatoire $Z_n$.*

On suppose que dans une population donnée, le nombre $N$ d'enfants par famille est une variable aléatoire qui suit une loi de la forme

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(N = k) = (1-p)^k p \ \text{ avec } 0 < p < 1$$

et que le coût des études de chaque enfant suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ (indépendante de la famille et des autres enfants).

**Q. 2.3.** *En utilisant la formule des probabilités totales avec $([N = k])_{k \in \mathbb{N}}$, déterminer la fonction de répartition puis la densité du coût maximum $C_{\max}$ des études d'un enfant dans une famille prise au hasard (on convient que ce coût maximum est nul si la famille ne compte aucun enfant).*

**Q. 2.4.** *Déterminer l'espérance de $C_{\max}$. Indication : introduire la primitive de la densité de $C_{\max}$ tendant vers 0 en $+\infty$.*

---

**Exercice 3 - Convergence de variables aléatoires**

On laisse tomber une aiguille de longueur 4cm sur un parquet formé de lattes de largeur 8cm et on s'intéresse à la probabilité de l'événement $E$ “l'aiguille coupe l'une des raies de ce parquet”.

**Q. 3.1.** *Montrer que $P(E) = 1/\pi$. Indication : si on note $Y$ la distance entre le milieu de l'aiguille et la raie du bas, et $\Theta$ l'angle entre l'aiguille et la raie, on remarquera que $E = (Y + 2\sin\Theta > 8) \cup (Y \leqslant 2\sin\Theta)$ où $Y$ suit la loi uniforme sur $[0, 8[$ et $\Theta$ la loi uniforme sur $[0, \pi/2]$.*

On laisse tomber une boîte entière de $n$ aiguilles. Le nombre d'aiguilles qui coupent une raie est donc $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où $X_i = 1$ si l'aiguille $i$ coupe une raie, et 0 sinon. On pose $Z_n = \dfrac{S_n}{n}$.

**Q. 3.2.** *Montrer que $Z_n$ converge en probabilité vers $1/\pi$.*

Soit $\alpha \in [0,1]$ et $\epsilon > 0$.

**Q. 3.3.** *Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff, pour déterminer un entier $n_0$ (en fonction de $\alpha$ et $\epsilon$) tel que*

$$\forall n \geqslant n_0,\ \mathbb{P}\left(|Z_n - 1/\pi| > \epsilon\right) \leqslant \alpha$$

**Q. 3.4.** *A l'aide du théorème central limite, donner une approximation de $\mathbb{P}\left(|Z_n - 1/\pi| > \epsilon\right)$ et utiliser cette approximation pour trouver un entier $n_1$ (fonction de $\pi$, $\alpha$, $\varepsilon$ et $\Phi^{-1}$ où $\Phi$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite) tel que*

$$\forall n \geqslant n_1,\ \mathbb{P}(|Z_n - 1/\pi| > \varepsilon) \leqslant \alpha.$$

**Q. 3.5.** *Proposer un algorithme et un nombre d'itérations de celui-ci qui retourne une valeur approchée de $1/\pi$ à $10^{-4}$ près avec un niveau de confiance supérieur à 95 %.* *<u>Indication</u> : on rappelle que $P([0 \leqslant Z \leqslant 1,96]) = 0,475$ pour une variable $Z$ de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.*

$\boxed{\textbf{ENSICA deuxième année}}$

## $\boxed{\textbf{Corrigé de l'Examen de Probabilités du 08-12-2012 - 3TMA4}}$

---

### 1. Répartition de boules dans des urnes [*12 points*]

**1.1** Si $k = 0$, $X_1 = 1$ et si $k = N$, $X_1 = N - 1$. Si $1 \leqslant k \leqslant N - 1$, $X_1 = k - 1$ si la boule est tirée dans l'urne $U_1$, ce qui se fait avec la probabilité $\dfrac{k}{N}$ et $X_1 = k + 1$ si la boule est tirée dans l'urne $U_2$, ce qui se fait avec la probabilité $\dfrac{N-k}{N}$. On a donc $X_1(\Omega) = \{k-1, k+1\}$ avec $\boxed{P(X_1 = k-1) = k/N \text{ et } P(X_1 = k+1) = (N-k)/N}$ [*1pt*].

**1.2** Ainsi, si $1 \leqslant k \leqslant N-1$, $\mathbb{E}(X_1) = (k-1) \times \dfrac{k}{N} + (k+1) \times \dfrac{N-k}{N} = \dfrac{k^2 - k + Nk - k^2 + N - k}{N}$ soit $\boxed{\mathbb{E}(X_1) = k\left(1 - \dfrac{2}{N}\right) + 1}$ et cette relation est encore vraie pour $k = 0$ et pour $k = N$ [*1pt*].

**1.3** Le passage de $X_n$ à $X_{n+1}$ se fait de la même façon que le passage de $X_0$ à $X_1$. On a donc $P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = P(X_{n+1} = N - 1 | X_n = N) = 1$, $P(X_{n+1} = q - 1 | X_n = q) = q/N$ et $P(X_{n+1} = q + 1 | X_n = q) = (N - q)/N$ si $1 \leqslant q \leqslant N - 1$, les autres probabilités étant nulles [*1pt*].

**1.4** D'après 1.2, on a $\mathbb{E}^{X_n = k}(X_{n+1}) = k\left(1 - \dfrac{2}{N}\right) + 1$ donc $\boxed{\mathbb{E}^{X_n}(X_{n+1}) = X_n\left(1 - \dfrac{2}{N}\right) + 1}$. D'après le théorème de l'espérance totale, puis la linéarité de l'espérance, il vient, en prenant l'espérance des deux membres, $\boxed{\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n)\left(1 - \dfrac{2}{N}\right) + 1}$ [*1,5pt*].

**1.5** La suite $(\mathbb{E}(X_n))$ est donc une suite arithmético-géométrique. On cherche un point fixe éventuel $\ell$ : $\ell$ vérifie donc $\ell = \ell\left(1 - \dfrac{2}{N}\right) + 1$, soit $2\ell/N = 1$ donc $\ell = N/2$. On a alors $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \ell = (\mathbb{E}(X_n) - \ell)\left(1 - \dfrac{2}{N}\right)$ donc la suite $(\mathbb{E}(X_n) - \ell)$ est géométrique, et $\mathbb{E}(X_n) - \ell = (\mathbb{E}(X_0) - \ell)\left(1 - \dfrac{2}{N}\right)^n$, soit $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{N}{2} + \left(\mathbb{E}(X_0) - \dfrac{N}{2}\right)\left(1 - \dfrac{2}{N}\right)^n}$ [*1pt*].

Pour $N \geqslant 2$, $0 < \dfrac{2}{N} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant 1 - \dfrac{2}{N} < 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(1 - \dfrac{2}{N}\right)^n = 0$. On a donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n) = \dfrac{N}{2}}$ [*0,5pt*].

**1.6** On a $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ q_1 & 0 & p_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & & 0 \\ \vdots & & & q_{N-1} & 0 & p_{N-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ avec $p_k = k/N$ et $q_k = (N-k)/N$ [*1pt*].

**1.7** On a un graphe "en boudins" en alignant les états de 0 à $N$. Tous les états communiquent : $\boxed{\text{la chaîne est donc irréductible}}$ [*1pt*].

**1.8** Pour $1 \leqslant j \leqslant N-1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} \pi_k P_{k,j} &= \pi_{j-1} P_{j-1,j} + \pi_{j+1} P_{j+1,j} = \frac{1}{2^N} \left[ \binom{N}{j-1} \frac{N-j+1}{N} + \binom{N}{j+1} \frac{j+1}{N} \right] \\ &= \frac{1}{2^N} \left[ \frac{(N-1)!}{(j-1)!(N-j)!} + \frac{(N-1)!}{j!(N-j-1)!} \right] = \frac{1}{2^N} \binom{N}{j} \left[ \frac{j}{N} + \frac{N-j}{N} \right] = \pi_j \end{aligned}$$

On a aussi $\sum_{k=0}^{N} \pi_k P_{k,0} = \pi_1 \frac{1}{N} = \pi_0$ et $\sum_{k=0}^{N} \pi_k P_{k,N} = \pi_{N-1} \frac{1}{N} = \pi_N$. De plus $\sum_{k=0}^{N} \pi_k = 1$ (formule du binôme de Newton) donc $\boxed{\pi \text{ est bien une distribution stationnaire de la chaîne}}$ [*1pt*].

**1.9** La chaîne étant irréductible et finie, on sait alors qu'elle est récurrente positive et qu'elle admet une unique distribution stationnaire. À la question précédente, on a trouvé une distribution stationnaire : $\pi$ est donc l'unique distribution stationnaire de la chaîne [*1pt*].

**1.10** Le temps moyen de retour à l'état $k$ est $\boxed{\mu_k = \frac{1}{\pi_k} = \frac{2^N}{\binom{N}{k}}}$. Pour $k = 0$, $\mu_0 = 2^N$ qui tend vers $+\infty$ quand $N \to +\infty$. Pour $N = 10$, on a $\mu_0 = 2^{10}$ et $\mu_5 = \frac{2^{10}}{\binom{10}{5}} = \frac{1024}{252}$, soit $\boxed{\mu_0 = 1024}$ et $\boxed{\mu_5 \approx 4}$ [*2pts*].

---

**2. Autour du maximum d'un nombre aléatoire de variables aléatoires** [*7 points*]

**2.1** $P(Y_n \leqslant y) = 1 - P(Y_n > y) = 1 - P((X_1 > y) \cap \cdots \cap (X_n > y))$ et, les variables $X_i$ étant indépendantes et de même loi de fonction de répartition $F$, on a donc

$$F_{Y_n}(y) = 1 - P(X_1 > y) \times \cdots \times P(X_n > y) = 1 - (1 - F(y))^n.$$

On a alors, en dérivant, si $f$ est la densité commune des $X_i$,

$$f_{Y_n}(y) = n(1 - F(y))^{n-1} f(y) = \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda y} (e^{-\lambda y})^{n-1} = n\lambda e^{-n\lambda y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $\boxed{\text{la loi de } Y_n \text{ est la loi exponentielle } \mathcal{E}(n\lambda)}$ [*2pts*].

**2.2** De même, $P(Z_n \leqslant z) = P((X_1 \leqslant z) \cap \cdots \cap (X_n \leqslant z))$ et, les variables $X_i$ étant indépendantes et de même loi de fonction de répartition $F$, on a donc

$$F_{Z_n}(z) = P(X_1 \leqslant z) \times \cdots \times P(X_n \leqslant z) = (F(z))^n.$$

On a alors, en dérivant,

$$f_{Z_n}(z) = n(F(z))^{n-1} f(z) = \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda z}(1-e^{-\lambda z})^{n-1} & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad [\textit{2pts}]$$

**2.3** Si $N = n$, le coût maximal est $\max(X_1, \cdots, X_n) = Z_n$. On utilise alors les probabilités totales, pour $x > 0$ :

$$\begin{aligned} P(C_{\max} \leqslant x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P((C_{\max} \leqslant x)/(N=n))P(N=n) + P(N=0) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(Z_n \leqslant x)pq^n + p = \sum_{n=1}^{+\infty} pF(x)^n q^n + p = p\sum_{n=0}^{+\infty}(qF(x))^n \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{F_{C_{\max}}(x) = \dfrac{p}{1-qF(x)}}$. Si $x \leqslant 0$, $F_{C_{\max}}(x) = 0$ et si $x > 0$, $F_{C_{\max}}(x) = \dfrac{p}{1-q(1-e^{-\lambda x})} = \dfrac{p}{p+qe^{-\lambda x}}$ [*1,5pt*].

**Q. 2.4** On a ensuite, en dérivant, $\boxed{f_{C_{\max}}(x) = \dfrac{pqf(x)}{(1-qF(x))^2} = \begin{cases} \dfrac{pq\lambda e^{-\lambda x}}{(p+qe^{-\lambda x})^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$

Pour calculer l'espérance $\mathbb{E}(C_{\max}) = \displaystyle\int x f_{C_{\max}}(x)\,dx$, on va faire une intégration par parties en posant $G(x) = F_{C_{\max}}(x) - 1 = -\dfrac{q}{p+qe^{-\lambda x}}$.

$$\int_0^t x f_{C_{\max}}(x)\,dx = [xG(x)]_0^t - \int_0^t G(x)\,dx = \left[-\frac{qxe^{-\lambda x}}{p+qe^{-\lambda x}}\right]_0^t + \left[-\frac{1}{\lambda}\ln(p+qe^{-\lambda x})\right]_0^t$$

avec $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -\frac{qte^{-\lambda t}}{p+qe^{-\lambda t}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{\lambda}\ln(p+qe^{-\lambda t}) = -\frac{1}{\lambda}\ln(p)$. D'où $\boxed{\mathbb{E}(C_{\max}) = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(p)}$ [*1,5pt*].

---

**3. Convergence de variables aléatoires** [*5 points*]

**3.1** $P(E) = P(E_1) + P(E_2)$ où $E_1 = (Y + 2\sin\Theta > 8)$ et $E_2 = (Y \leqslant 2\sin\Theta)$ car les deux événements sont disjoints. Or $P(E_i) = \displaystyle\iint \mathbb{1}_{E_i}(y,\theta) f_{Y,\Theta}(y,\theta)\,dy\,d\theta$ où $f_{Y,\Theta}(y,\theta) = \dfrac{2}{\pi}\mathbb{1}_{]0,\pi/2[}(\theta)\dfrac{1}{8}\mathbb{1}_{]0,8[}(y)$. Ainsi, $P(E_1) = P(E_2) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\sin\theta\,d\theta = \dfrac{1}{2\pi}[-\cos\theta]_0^{\pi/2} = \dfrac{1}{2\pi}$ et on a bien $\boxed{P(E) = 1/\pi}$ [*1pt*].

**3.2** Les $X_i$ suivent la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/\pi)$, d'espérance $1/\pi$, donc $\boxed{Z_n = S_n/n \to 1/\pi \text{ en probabilité}}$, d'après la loi faible des grands nombres [*1pt*].

**3.3** On a $\mathbb{E}(Z_n) = 1/\pi$ et $\text{var}(Z_n) = \dfrac{1}{n}\text{var}(X_i) = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{\pi}\left(1 - \dfrac{1}{\pi}\right) = \dfrac{\pi - 1}{n\pi^2}$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff, $P(|Z_n - 1/\pi| > \varepsilon) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon^2}\text{var}(Z_n) \leqslant \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$ car $\max\limits_{x\in[0,1]} x(1-x) = \dfrac{1}{4}$ et que $1/\pi \in ]0,1[$. On peut donc prendre $n_1$ tel que $\dfrac{1}{4n_1\varepsilon^2} \leqslant \alpha$, soit $\boxed{n_1 \geqslant \dfrac{1}{4\alpha\varepsilon^2}}$ [*1pt*].

**3.4** On sait, grâce au Théorème Central Limite, que $\overline{Z}_n = \dfrac{Z_n - \mathbb{E}(Z_n)}{\sqrt{\mathrm{var(Z_n)}}}$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$, avec $\overline{Z}_n = \dfrac{\pi\sqrt{n}(Z_n - 1/\pi)}{\sqrt{\pi - 1}}$ donc

$$P(|Z_n - 1/\pi| > \varepsilon) = P\left(|\overline{Z}_n| > \frac{\varepsilon\pi\sqrt{n}}{\sqrt{\pi - 1}}\right) \approx 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\pi\sqrt{n}}{\sqrt{\pi - 1}}\right)\right) \leqslant \alpha$$

si $\Phi\left(\dfrac{\varepsilon\pi\sqrt{n}}{\sqrt{\pi - 1}}\right) \geqslant 1 - \dfrac{\alpha}{2}$, soit $\boxed{n \geqslant \dfrac{\pi - 1}{\varepsilon^2\pi^2}\Phi^{-1}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right)}$ [*1pt*].

**3.5** On prend ici $\varepsilon = 10^{-4}$ et $\alpha = 0,05$. On a alors, d'après 3.4,

$$P(|Z_n - 1/\pi| > 10^{-4}) = P\left(|\overline{Z}_n| > \frac{10^{-4}\pi\sqrt{n}}{\sqrt{\pi - 1}}\right) \leqslant 0,05$$

qui équivaut à $P\left(|\overline{Z}_n| \leqslant \dfrac{10^{-4}\pi\sqrt{n}}{\sqrt{\pi - 1}}\right) \geqslant 0,95$, soit $2P\left(0 \leqslant \overline{Z}_n \leqslant \dfrac{10^{-4}\pi\sqrt{n}}{\sqrt{\pi - 1}}\right) \geqslant 0,95$ ou encore

$$P\left(0 \leqslant \overline{Z}_n \leqslant \frac{10^{-4}\pi\sqrt{n}}{\sqrt{\pi - 1}}\right) \geqslant 0,475.$$

D'après l'indication, on a alors $\dfrac{10^{-4}\pi\sqrt{n}}{\sqrt{\pi - 1}} \geqslant 1,96$, soit $n \geqslant \dfrac{1,96^2}{\pi^2}(\pi - 1)10^8$ soit $\boxed{n \geqslant 83\,358\,380}$ [*1pt*].