

Transport optimal de sable avec une pelle et un seau, terrain de jeu pour les mathématiques et l'intelligence artificielle

Bernard Bercu & Jérémie Bigot

Institut de Mathématiques de Bordeaux
Université de Bordeaux

Soirée de présentation masters et recherche à l'IMB

Janvier 2019

- 1 Le transport optimal un vieux problème très actuel !
- 2 Un problème d'allocation de ressources
- 3 Transport optimal et distance de Wassertein
- 4 Illustration avec arrivée de données en ligne
- 5 Transport optimal pour l'intelligence artificielle ?

Bref aperçu du problème de transport optimal



Question introduite par Gaspard Monge¹ en 1781 dans

Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais

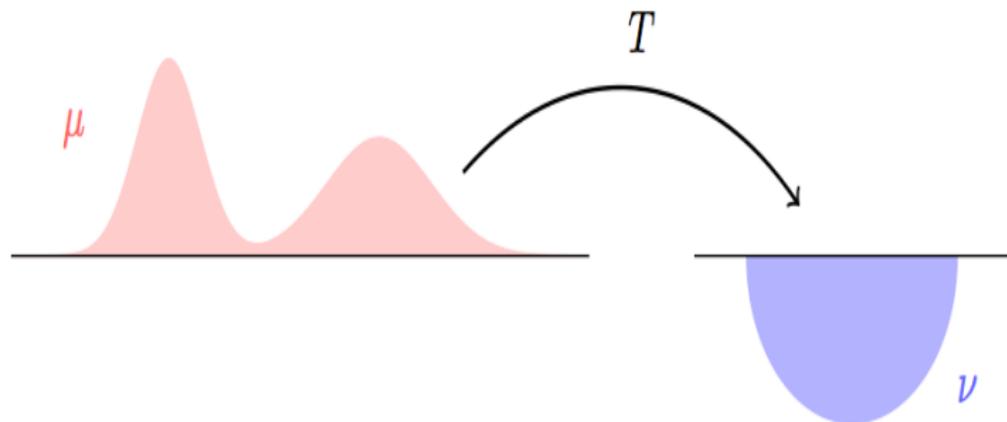
pour un problème de transfert de masses :

Comment trouver le moyen le plus efficace (à moindre coût) pour transporter un tas de sable (à l'aide d'une pelle et d'un seau...) dans un trou de même volume ?

1. <https://fr.wikipedia.org/wiki/GaspardMonge>

Bref aperçu du problème de transport optimal ¹

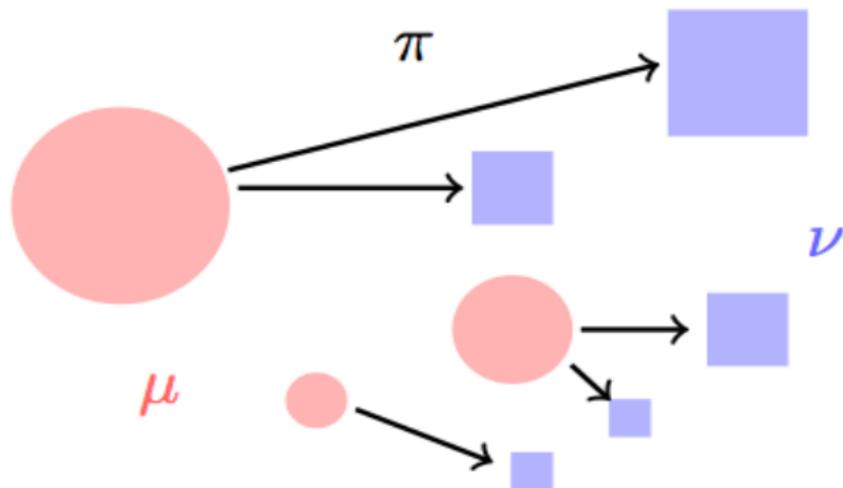
Formulation mathématique moderne : trouver une application $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ pour transférer une masse μ (répartie sur un support \mathcal{X}) vers une masse ν (répartie sur un support \mathcal{Y})



1. Thèse d'Elsa Cazelles, 2018, Université de Bordeaux

Bref aperçu du problème de transport optimal ¹

Formulation mathématique moderne : trouver un transfert de la masse μ (répartie sur un support \mathcal{X}) vers une masse ν (répartie sur un support \mathcal{Y}) par un plan de transport $\pi : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow [0, 1]$



Un fabuleux terrain d'investigation pour les mathématiques ¹ ...

Monge



Kantorovich



Dantzig



Brenier



Otto



McCann



Villani



Crédit : Gabriel Peyré (CNRS & ENS Paris)

1. Villani, C. (2003) Topics in optimal transportation

... pour de très nombreuses applications ¹ !

- économie (ex : gestion de stock)
- physique
- infographie
- **PUB !! traitement d'images : exposé d'Arthur Leclaire PUB !!**
- apprentissage automatique (machine learning)
- intelligence artificielle
- ...

1. Cuturi & Peyré (2018) <https://optimaltransport.github.io/>

- 1 Le transport optimal un vieux problème très actuel !
- 2 Un problème d'allocation de ressources
- 3 Transport optimal et distance de Wassertein
- 4 Illustration avec arrivée de données en ligne
- 5 Transport optimal pour l'intelligence artificielle ?

Optimiser le secteur d'intervention de la Police ?

Données disponibles ¹ :

- positions des postes de Police à Chicago
- lieux d'infractions enregistrées à Chicago en 2014

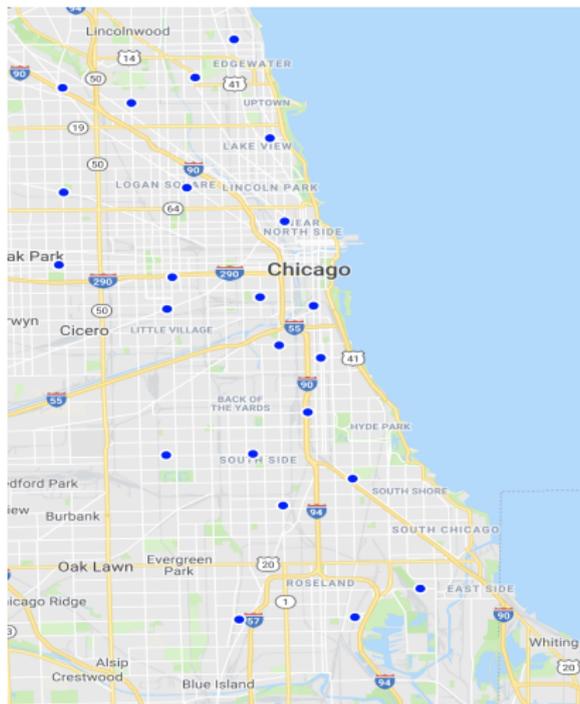
Questions (d'intérêt ?) :

- étant donné le lieu d'une infraction, quel poste de Police devrait intervenir ?
- comment faire évoluer la réponse au fur et à mesure de l'année ?

1. Open Data de la ville de Chicago : <https://data.cityofchicago.org>

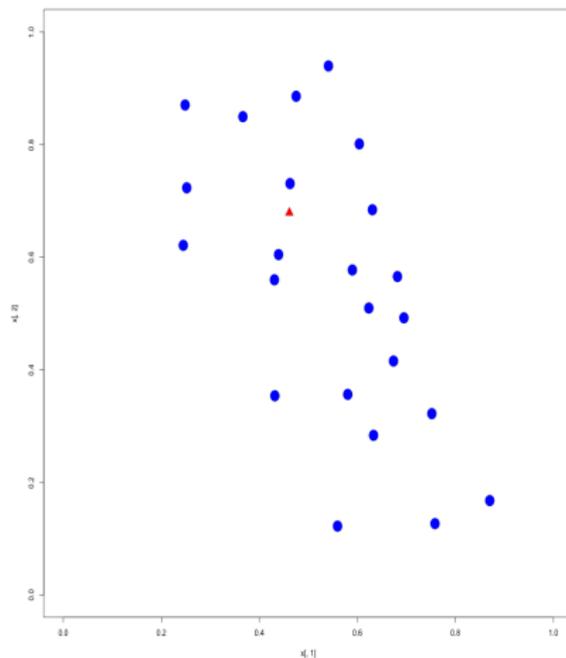
Optimiser le secteur d'intervention de la Police ?

Position des postes de Police à Chicago



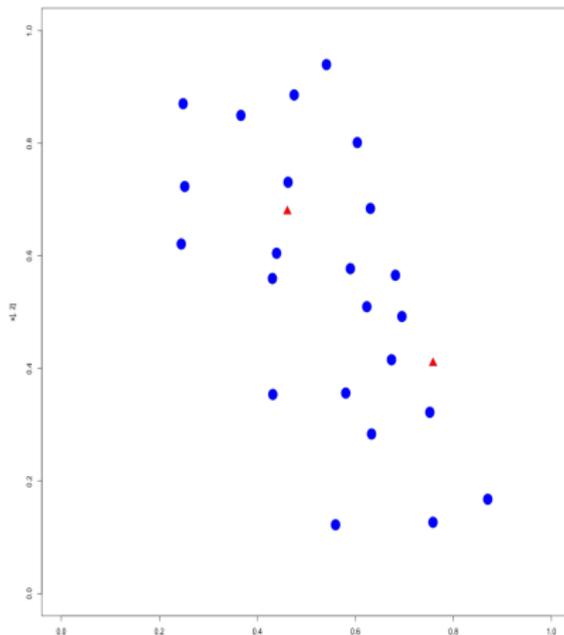
Optimiser le secteur d'intervention de la Police ?

Position X_1 de la **première** infraction enregistrée à Chicago en 2014



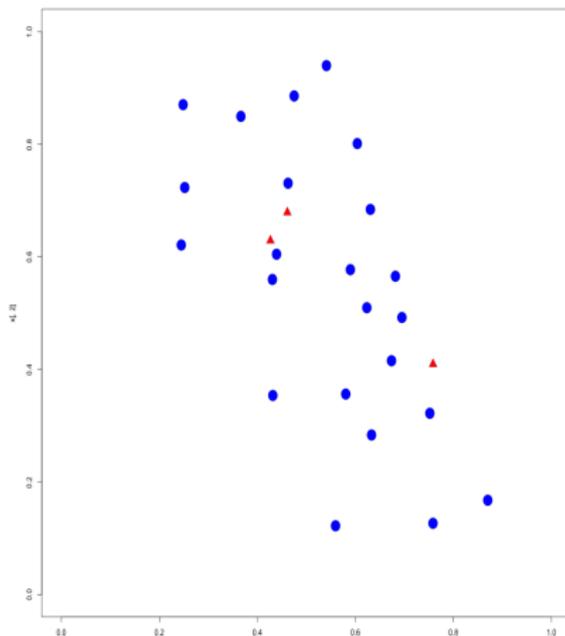
Optimiser le secteur d'intervention de la Police ?

Positions X_1, X_2 des infractions enregistrées à Chicago par **ordre chronologique**



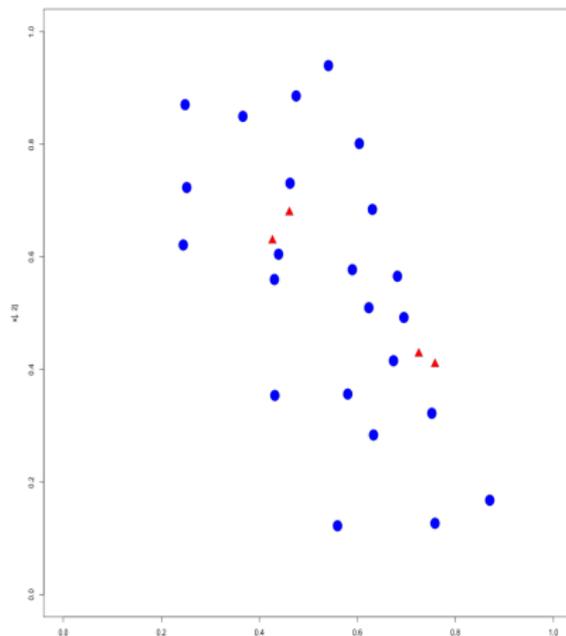
Optimiser le secteur d'intervention de la Police ?

Positions X_1, X_2, X_3 des infractions enregistrées à Chicago par **ordre chronologique**



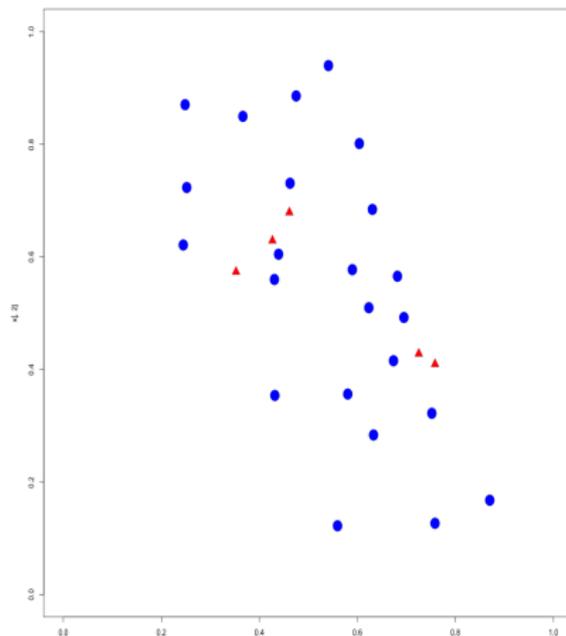
Optimiser le secteur d'intervention de la Police ?

Positions X_1, \dots, X_4 des infractions enregistrées à Chicago par **ordre chronologique**



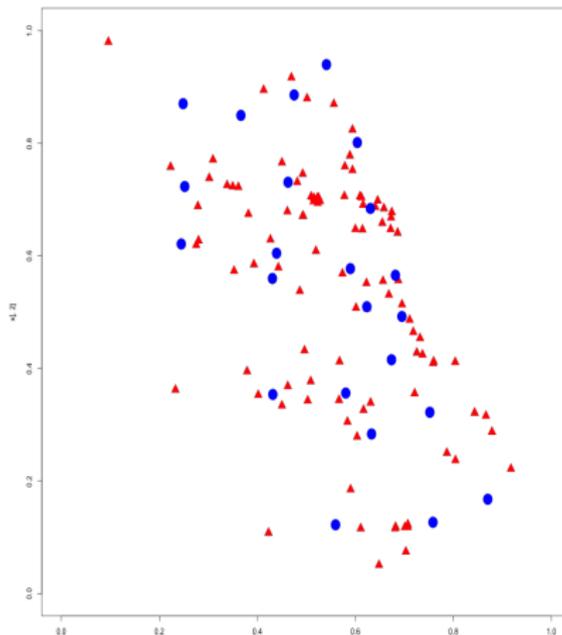
Optimiser le secteur d'intervention de la Police ?

Positions X_1, \dots, X_5 des infractions enregistrées à Chicago par **ordre chronologique**



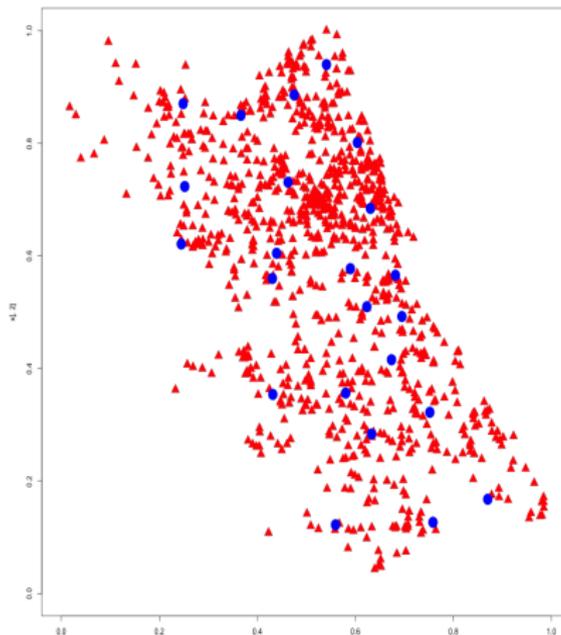
Optimiser le secteur d'intervention de la Police ?

Positions des infractions enregistrées à Chicago par **ordre chronologique** (100 premières)



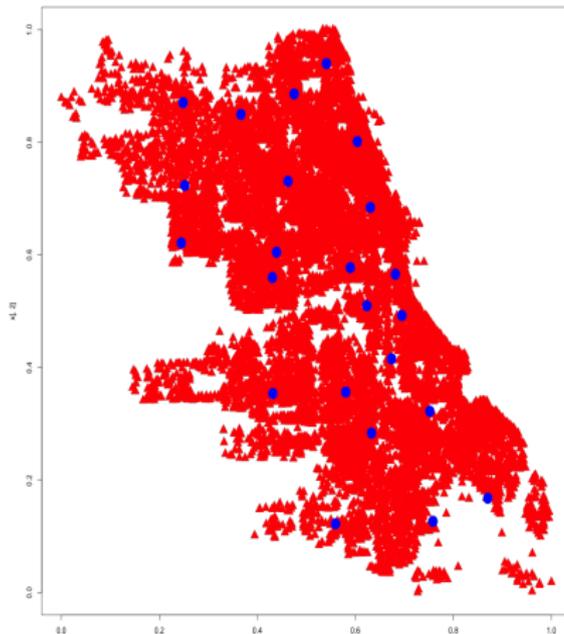
Optimiser le secteur d'intervention de la Police ?

Positions des infractions enregistrées à Chicago par **ordre chronologique** (1000 premières)



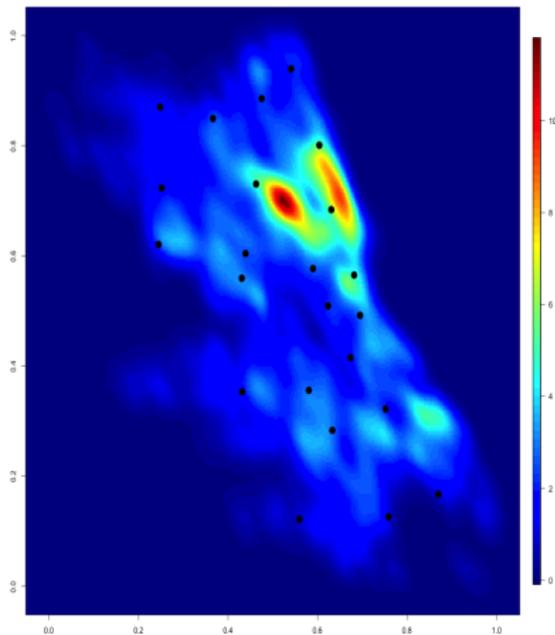
Optimiser le secteur d'intervention de la Police ?

Positions X_1, \dots, X_N des infractions enregistrées à Chicago par **ordre chronologique** (total $N = 16104$)



Optimiser le secteur d'intervention de la Police ?

Carte de chaleur (densité) des positions des infractions enregistrées à Chicago en 2014



- 1 Le transport optimal un vieux problème très actuel !
- 2 Un problème d'allocation de ressources
- 3 Transport optimal et distance de Wassertein**
- 4 Illustration avec arrivée de données en ligne
- 5 Transport optimal pour l'intelligence artificielle ?

Approche statistique de l'allocation de ressources ¹

Hypothèses de modélisation :

- positions des lieux d'infraction : une suite de variables aléatoires

$$X_1, \dots, X_n$$

indépendantes et identiquement distribuées, échantillonnées à partir d'une mesure de probabilité **inconnue** μ de support $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$

- positions des postes de Police : une mesure de probabilité **connue et discrète**

$$\nu = \sum_{j=1}^J \nu_j \delta_{y_j}$$

1. Bercu, B. & Bigot, J. (2018) ArXiv :1812.09150

Approche statistique de l'allocation de ressources

Problème : trouver une application

$$T : \mathcal{X} \rightarrow \{y_1, \dots, y_J\}$$

qui “envoie” la mesure μ sur la mesure $\nu = \sum_{j=1}^J \nu_j \delta_{y_j}$ de **façon optimale** par rapport à un coût de transport

$$c(x, y) = \|x - y\|_{\ell_p} = \left(\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)^p \right)^{1/p}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d \text{ (ici } d = 2)$$

Transport optimal entre des mesures de probabilités

Soit $T : \mathcal{X} \rightarrow \{y_1, \dots, y_J\}$ tel que $T\#\mu = \nu$ (notation mathématique de T “envoie” μ sur ν)

Definition (Formulation de Monge)

Le transport optimal entre μ et ν correspond à résoudre le problème de minimisation suivant

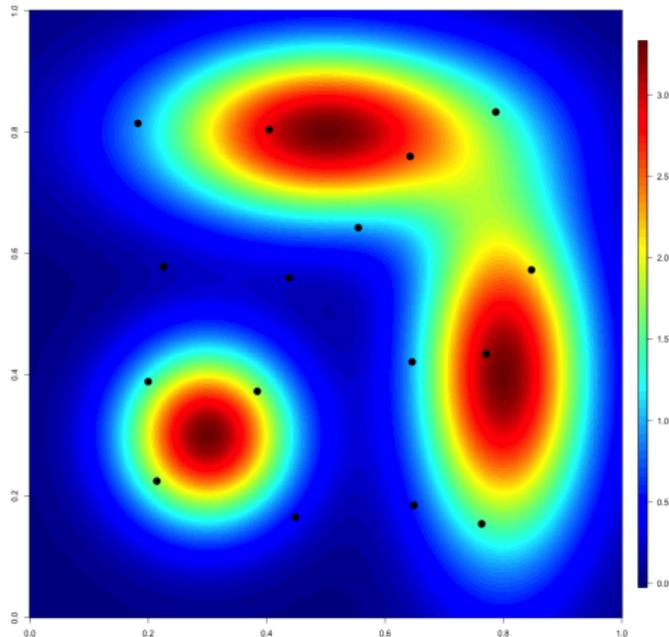
$$W_0(\mu, \nu) = \min_{T : T\#\mu = \nu} \int_{\mathcal{X}} c(x, T(x)) d\mu(x),$$

où $c(x, y)$ est le coût du transport de masse de la position x à la position y .

Remarque : $W_0(\mu, \nu)$ peut s'interpréter comme une distance (dit de Wasserstein) entre μ et ν !

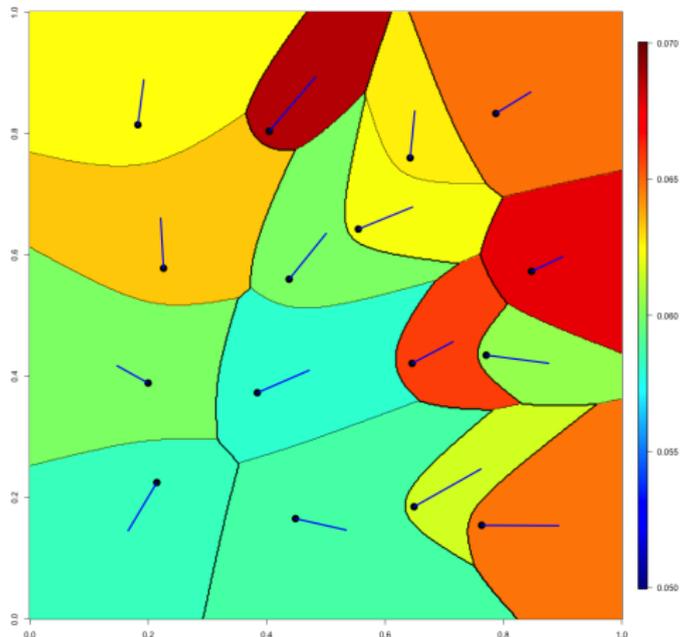
Transport optimal entre des mesures de probabilités

Transport optimal entre une mesure μ à densité vers une mesure discrète ν (points noirs)



Transport optimal entre des mesures de probabilités

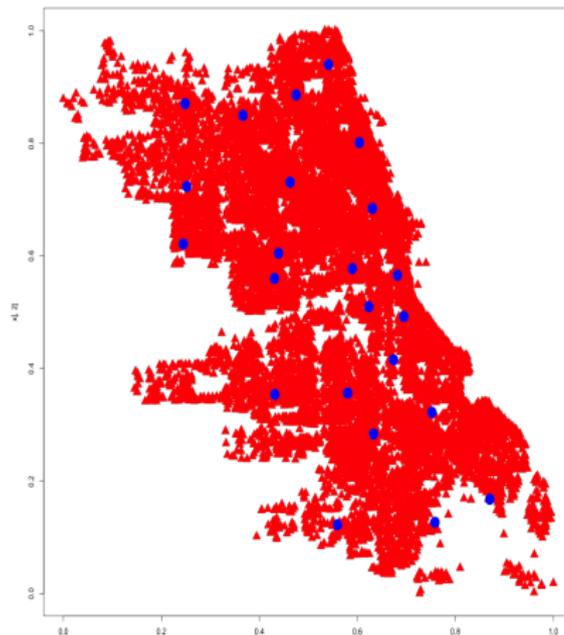
Transport optimal de μ à densité vers ν (points noirs) - Application optimale T pour le coût Euclidien $c(x, y) = \|x - y\|_{\ell_2}$



- 1 Le transport optimal un vieux problème très actuel !
- 2 Un problème d'allocation de ressources
- 3 Transport optimal et distance de Wassertein
- 4 Illustration avec arrivée de données en ligne**
- 5 Transport optimal pour l'intelligence artificielle ?

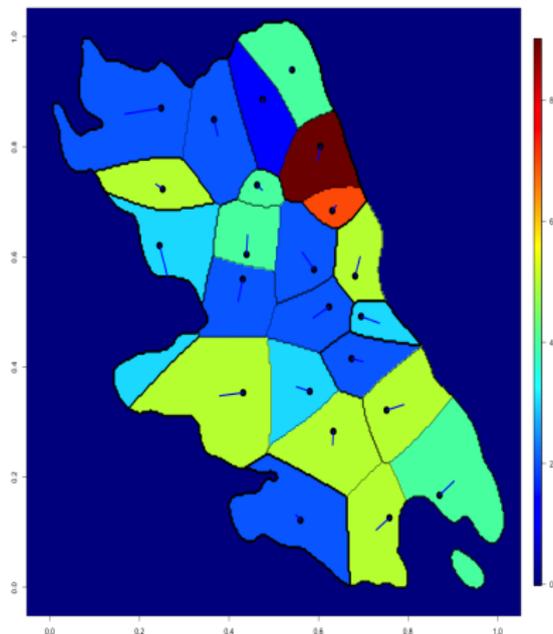
Détermination du secteur d'intervention de la Police

Positions X_1, \dots, X_N des infractions enregistrées à Chicago par **ordre chronologique** (total $N = 16104$)



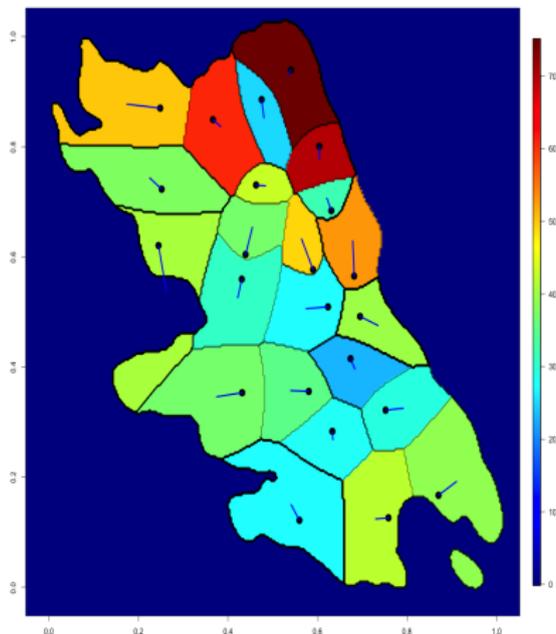
Détermination du secteur d'intervention de la Police

Application optimale T pour le coût Euclidien $c(x, y) = \|x - y\|_{\ell_2}$ après
 $n = 100$ itérations et $\varepsilon = 0.005$



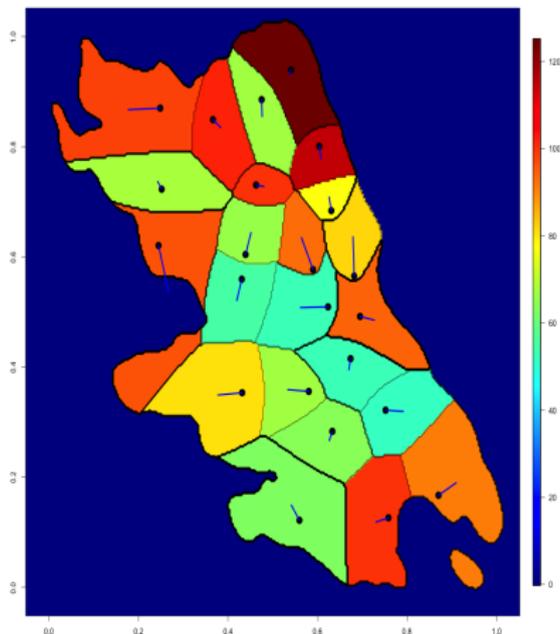
Détermination du secteur d'intervention de la Police

Application optimale T pour le coût Euclidien $c(x, y) = \|x - y\|_{\ell_2}$ après $n = 1000$ itérations et $\varepsilon = 0.005$



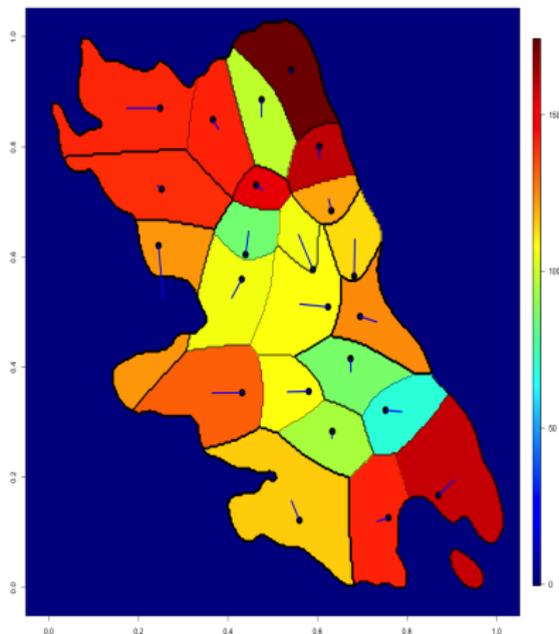
Détermination du secteur d'intervention de la Police

Application optimale T pour le coût Euclidien $c(x, y) = \|x - y\|_{\ell_2}$ après
 $n = 2000$ itérations et $\varepsilon = 0.005$



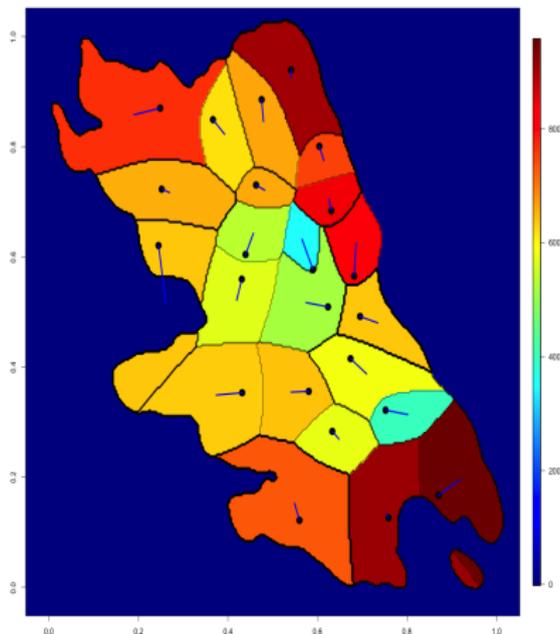
Détermination du secteur d'intervention de la Police

Application optimale T pour le coût Euclidien $c(x, y) = \|x - y\|_{\ell_2}$ après $n = 3000$ itérations et $\varepsilon = 0.005$



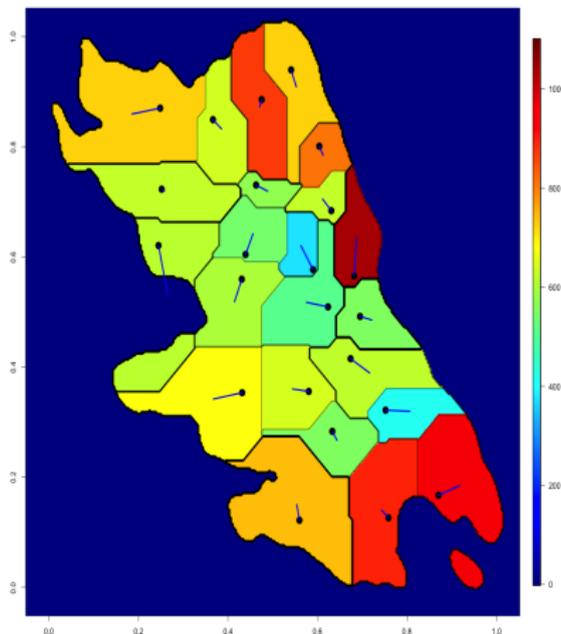
Détermination du secteur d'intervention de la Police

Application optimale T pour le coût Euclidien $c(x, y) = \|x - y\|_{\ell_2}$ après
 $N = 16104$ itérations et $\varepsilon = 0.005$



Détermination du secteur d'intervention de la Police

Application optimale T pour le coût $c(x, y) = \|x - y\|_{\ell_1}$ après
 $N = 16104$ itérations et $\varepsilon = 0.005$



- 1 Le transport optimal un vieux problème très actuel !
- 2 Un problème d'allocation de ressources
- 3 Transport optimal et distance de Wassertein
- 4 Illustration avec arrivée de données en ligne
- 5 Transport optimal pour l'intelligence artificielle ?

Intelligence artificielle et génération d'images

Base de données d'images de célébrités : **CelebA Dataset**¹



1. <http://mmlab.ie.cuhk.edu.hk/projects/CelebA.html>

Intelligence artificielle et génération d'images

Question : peut-on apprendre la distribution (mesure de probabilité) de cet ensemble de visages et en générer aléatoirement de nouveaux ?

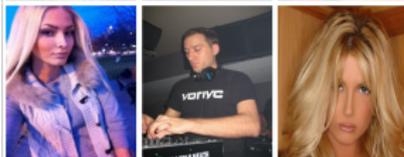
Eyeglasses



Bangs



Pointy Nose



Oval Face



Wearing Hat



Wavy Hair



Mustache



Smiling



Intelligence artificielle et génération d'images

Réponse : solution proposée par des chercheurs de la société Nvidia ¹ qui s'appuie en partie sur le transport optimal !



1. https://research.nvidia.com/publication/2017-10_Progressive-Growing-of

Intelligence artificielle et génération d'images

Question : quelles sont les vraies images et celles générées aléatoirement ¹ ?



1. https://research.nvidia.com/publication/2017-10_Progressive-Growing-of

Intelligence artificielle et génération d'images

Réponse - 1ère ligne : génération aléatoire et lignes 2 à 5 : vraies images (les plus proches de l'image générée)¹ ?



1. <https://research.nvidia.com/publication/2017-10-Progressive-Growing-of>