Université Bordeaux
Mathématiques

Algèbre 3 – Licence 2
Année 2014–2015

FEUILLE D'EXERCICES n^{o} 3

Ordre d'un élément, sous-groupe engendré par une partie, groupes cycliques

Exercice 1 – Soit $(G, \cdot)$ un groupe d'élément neutre e, tel que pour tout $x \in G$ on ait $x^2 = e$. On a vu dans la feuille 2 qu'un tel groupe est nécessairement abélien.
1) Soient H un sous-groupe de G et $a \in G$. Montrer que $H \cup aH$ est un sous-groupe de G.
2) Montrer que si H est fini et $a \notin H$, $H \cup aH$ est fini de cardinal $2|H|$.
3) En déduire que si G est fini, son cardinal est une puissance de 2.

Exercice 2 – Soient $(G, \cdot)$ un groupe et $x, y \in G$.
1) Montrer que si $xy = yx$ et si x et y sont d'ordres finis, respectivement m et n, alors xy est d'ordre fini divisant $\mathrm{ppcm}(m, n)$ et que si $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$, xy est d'ordre $\mathrm{ppcm}(m, n)$.
2) Montrer que si G est abélien, l'ensemble des éléments de G d'ordre fini est un sous-groupe de G.
3) Montrer que si xy est d'ordre fini, yx l'est aussi. Que dire de l'ordre de yx ?
4) Donner un exemple dans lequel xy est d'ordre fini alors que ni x ni y ne le sont.
5) Donner un exemple dans lequel x et y sont d'ordres finis mais pas xy. *Indication* : on pourra utiliser deux symétries de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
6) Donner un exemple de groupe infini dans lequel tout élément est d'ordre fini.

Exercice 3 – Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini d'élément neutre e.
1) Montrer que si G est de cardinal pair, il existe dans G un élément d'ordre 2. *Indication* : on pourra considérer dans G les ensembles $\{x, x^{-1}\}$.
2) Montrer que si G est abélien et si $|G| = 2n$ où n est impair, il existe dans G un unique élément d'ordre 2. Cette conclusion subsiste-t-elle si on ne suppose pas G abélien ?
3) Montrer que si G est de cardinal $2p$ où p est premier, il existe dans G un élément d'ordre 2 et un élément d'ordre p. On pourra distinguer les cas $p = 2$ et p impair, et se servir de l'exercice 1.[1]
4) Montrer que si G est de cardinal impair l'application $f : G \to G$ définie par $f(x) = x^2$ est une bijection et que l'équation $x^2 = e$ a une unique solution.
5) Soit n un entier ≥ 1 tel que $\mathrm{pgcd}(n, |G|) = 1$. Soit $g \in G$ quelconque. Montrer que l'équation $x^n = g$ a une unique solution dans G.

Exercice 4 – On considère le groupe $(\mathfrak{S}_3, \circ)$.
1) Ce groupe est-il cyclique ?
2) Quel est l'ordre de la transposition $(1, 2)$ et quel est le sous-groupe engendré par $(1, 2)$? Même question avec le cycle $(1, 2, 3)$.
3) Quel est le sous-groupe engendré par $\{(1, 2), (2, 3)\}$?

Exercice 5 – Soit $(G, \cdot)$ un groupe cyclique.
1) Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique.
2) Montrer que pour tout diviseur d de l'ordre de G, il existe un unique sous-groupe de G d'ordre d.

Exercice 6 – Le groupe $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ est-il monogène ?

Exercice 7 – Soient $(G, \cdot)$ et $(H, \cdot)$ deux groupes.
1) Montrer que si $g \in G$ et $h \in H$ sont d'ordres finis, respectivement m et n, (g, h) est d'ordre $\mathrm{ppcm}(m, n)$ dans $G \times H$.

[1] Ceci se généralise. Si p premier divise $|G|$, il existe dans G un élément d'ordre p. Il s'agit du théorème de Cauchy. On le démontrera peut-être plus tard.

2) On suppose que G et H sont cycliques. Montrer que $G \times H$ est cyclique si et seulement si $\mathrm{pgcd}(|G|, |H|) = 1$.

Exercice 8 – Soit n un entier ≥ 2. On considère

$$G = \{z \in \mathbb{C};\ \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tel que } z^{n^k} = 1\}.$$

1) Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$.
2) Pour $k \in \mathbb{N}$, on note

$$G_k = \{z \in \mathbb{C};\ z^{n^k} = 1\}.$$

Montrer que $(G_k)_{k \geq 0}$ est une suite strictement croissante de sous-groupes de G.
3) Montrer que G ne peut pas être engendré par un nombre fini d'éléments.
4) On suppose dans cette question que n est premier. Soit H un sous-groupe propre de G (c'est-à-dire différent de G). Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $H = G_k$.