Université Bordeaux
Mathématiques

Algèbre 3 – Licence 2
Année 2014–2015

FEUILLE D'EXERCICES n° 4

Morphismes de groupes, sous-groupes normaux, groupes quotients

Exercice 1 –
1) Déterminer les morphismes de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{Z},+)$. Parmi ceux-ci, quels sont les automorphismes ?
2) Déterminer les morphismes de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(\{-1,1\},\times)$. Sont-ce des isomorphismes ?
3) Déterminer les morphismes de $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Q},+)$. Parmi ceux-ci, quels sont les automorphismes ?
4) Déterminer les morphismes de $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},+)$. Parmi ceux-ci, quels sont les automorphismes ?

Exercice 2 – Si $n \geq 1$ est un entier, on note U_n le sous-groupe de $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\times)$ constitué par les racines n-ièmes de l'unité.
1) Montrer que si $m,n \geq 1$ sont deux entiers tels que $\text{pgcd}(m,n) \neq 1$, alors les groupes $U_m \times U_n$ et U_{mn} ne sont pas isomorphes.
2) On suppose que $m,n \geq 1$ sont deux entiers tels que $\text{pgcd}(m,n) = 1$. Montrer que l'application $f : U_m \times U_n \to U_{mn}$ définie par $f(a,b) = ab$ est un morphisme de groupes. Déterminer son noyau (indication : penser à Bezout) et en déduire que $U_m \times U_n$ et U_{mn} sont isomorphes.

Exercice 3 –
1) Soit $(G,\cdot)$ un groupe. On note $Aut(G)$ l'ensemble des automorphismes de G. Montrer que $(Aut(G),\circ)$ est un groupe.
2) Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que si $(G,\cdot) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$, alors $Aut(G)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ le groupe multiplicatif des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3) Montrer que si $(G,\cdot) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+)$, alors $Aut(G)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 4 – Soit $(\mathfrak{S}_n,\circ)$ le groupe des permutations de $\{1,2,\dots n\}$. Soient $x_1,x_2,\dots,x_k \in \{1,2,\dots,n\}$. On note $(x_1\ x_2\ \dots\ x_k)$ le cycle qui à x_i $(1 \leq i \leq k-1)$ associe x_{i+1}, à x_k associe x_1 et laisse invariants les autres éléments de $\{1,2,\dots,n\}$. On note également multiplicativement la loi $\circ$: $\tau\sigma = \tau\circ\sigma$.
1) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que $\sigma(x_1\ x_2\ \dots\ x_k)\sigma^{-1} = (\sigma(x_1)\ \sigma(x_2)\ \dots\ \sigma(x_k))$.
2) On travaille désormais dans $\mathfrak{S}_4$ et on note Id l'élément neutre de $\mathfrak{S}_4$ (l'application identité de $\{1,2,3,4\}$). Soit

$$V_4 = \{\text{Id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}.$$

Montrer que V_4 est un sous-groupe normal de $\mathfrak{S}_4$.
3) Montrer que le sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ engendré par $(1\ 2)(3\ 4)$ est un sous-groupe normal de V_4 mais n'est pas un sous-groupe normal de $\mathfrak{S}_4$. On a donc exhibé des groupes emboîtés $K \subseteq H \subseteq G$ tels que H soit normal dans G, K normal dans H mais K non normal dans G.

Exercice 5 –
1) Soient $(G,\cdot)$ un groupe et H un sous-groupe de G. Montrer que si l'indice de H est 2, alors H est un sous-groupe normal de G.
2) Donner un exemple de groupe G admettant un sous-groupe d'indice 3 qui n'est pas normal.

Exercice 6 – Soit $(G,\cdot)$ un groupe d'élément neutre e.
1) Soit $g \in G$. Montrer que $f_g : G \to G$ définie par $f_g(x) = gx$ est un morphisme si et seulement si $g = e$.
2) Soit $F(G) = \{f_g;\ g \in G\}$. On considère $\mu : G \to F(G)$ définie par $\mu(g) = f_g$. Montrer que $(F(G),\circ)$ est un groupe et que μ est un isomorphisme de groupes.
3) Pour $g \in G$ on note ϕ_g l'application de G dans G définie par $\phi_g(x) = gxg^{-1}$. Montrer que ϕ_g

est un automorphisme de G. Un tel automorphisme est dit *intérieur*.
4) Montrer que $\phi_g = \mathrm{Id}_G$ si et seulement si $g \in Z(G)$ le centre de G.
5) Soit $\mathcal{A}(G) = \{\phi_g;\ g \in G\}$. Montrer que $(\mathcal{A}(G), \circ)$ est un groupe isomorphe à $G/Z(G)$. *Indication* : considérer $\Psi : G \to \mathcal{A}(G)$ définie par $\Psi(g) = \phi_g$.
6) Montrer que pour $n \geq 3$ on a $\mathcal{A}(\mathfrak{S}_n) \simeq \mathfrak{S}_n$. Est-ce vrai pour $n = 2$?
7) On veut donner un exemple de groupe G pour lequel $Z(G) \neq \{e\}$ et tel que $\mathcal{A}(G) \simeq G$.
a) Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ et $S(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$. Soit

$$G = \{R(t);\ t \in \mathbb{R}\} \cup \{S(t);\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que G muni de la multiplication matricielle est un groupe.
b) Montrer que $Z(G) = \{I_2, -I_2\}$. La question 4) implique donc que $\mathcal{A}(G) \simeq G/\{I_2, -I_2\}$.
c) Soit $\omega : G \to G$ définie par : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\omega(R(t)) = R(2t)$ et $\omega(S(t)) = S(2t)$. Montrer que ω est un morphisme surjectif de G dans G.
d) Quel est le noyau de ω ?
e) En déduire que $G \simeq G/Z(G) \simeq \mathcal{A}(G)$.

Exercice 7 –
1) Soient G et G' deux groupes finis et $f : G \to G'$ un morphisme. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que $|f(H)|$ divise $|H|$ et $|G'|$. En déduire que si $\mathrm{pgcd}(|H|, |G'|) = 1$, alors $H \subseteq \ker f$.
2) Soient G un groupe fini et H un sous-groupe normal de G. Montrer que si $\mathrm{pgcd}(|H|, |G/H|) = 1$, H est l'unique sous-groupe de G de cardinal $|H|$.

Exercice 8 – Soit $(G, \cdot)$ un groupe délément neutre e. Si $g, h \in G$ on appelle commutateur de g et h l'élément $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$.
1) Soient $g, h, i \in G$. Montrer que $[g, h]^{-1} = [h, g]$ et que $g[h, i]g^{-1} = [ghg^{-1}, gig^{-1}]$.
2) On note $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs de G :

$$D(G) = \langle [g, h];\ g, h \in G \rangle.$$

Montrer que $D(G) = \{e\}$ si et seulement si G est abélien.
3) Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe normal de G et que $G/D(G)$ est un groupe abélien.
4) Soit N un sous-groupe normal de G. Montrer que si G/N est abélien alors $D(G) \subseteq N$.
5) Réciproquement, soit H un sous-groupe de G. Montrer que si $D(G) \subseteq H$, alors H est normal et G/H est abélien.

Exercice 9 –
1) Soit $n \geq 1$ un entier. On considère le groupe multiplicatif $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et le sous-ensemble de G, $H = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices de déterminant 1). Montrer que H est un sous-groupe normal de G et que G/H est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2) On garde la notation de l'exercice 2. On pose $U = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ et $U_\infty = \{z \in \mathbb{C};\ \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $z^n = 1\}$. Si $A = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$, on note $A^\times = A \setminus \{0\}$. On ne demande pas de vérifier que U_n, U_∞ et U sont des sous-groupes (emboîtés) du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\times$. Établir les isomorphismes suivants :

$$U \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z},\ U \simeq \mathbb{C}^\times/\mathbb{R}_+^\times,\ U \simeq \mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times,\ U \simeq U/U_n,\ \mathbb{C}^\times \simeq \mathbb{C}^\times/U_n,\ U_\infty \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

où $n \geq 1$ est un entier quelconque. Dans chaque cas, on précisera les lois de groupes.