UNE GÉNÉRALISATION DE LA LOI DE TRANSFORMATION POUR LES RESIDUS.

J.Y. Boyer et M. Hickel

Résumé. Cet article prouve comment, dans le cadre analytique des résidus, les représentations intégrales du type Bochner-Martinelli permettent d'obtenir une preuve complète d'une généralisation de la loi de transformation. On montre ensuite comment, dans une théorie trés générale dûe à J. Lipman, ce résultat peut s'étendre sans le recours à des outils analytiques.

Abstract. This paper shows that integral representations of Bochner-Martinelli types is a way to achieve a complete proof of an extended transition formula for multidimensional complex residues. Then, without any use of analytic tools we generalize this result in the algebraic formalism of residues due to J. Lipman.

1-Introduction

Soient $\mathbf{A}$ un anneau commutatif, $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre commutative, $f = (f_1, \dots, f_n)$ et $g = (g_1, \dots, g_n)$ deux suites de $\mathbf{R}$ quasi-régulières (cf. [Ku 1] ou [M]) tel que les $\mathbf{A}$ modules $\dfrac{\mathbf{R}}{(f_1 \dots f_n)}$ et $\dfrac{\mathbf{R}}{(g_1 \dots g_n)}$ soient projectifs de type fini. On suppose qu'il existe une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que:

$$g = Af \tag{1.1}$$

Dans la théorie algébrique des résidus mis en place par J.Lipman (cf.[L]) on définit pour $\omega \in \wedge^n \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$, où $\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ est le $\mathbf{R}$ module des différentielles de la $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{R}$, la notation résidu ([L] 3.5.1) par:

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} \omega \\ f_1, \dots, f_n \end{bmatrix} \in \mathbf{A}$$

Dans le cas où $\mathbf{R} = \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ (resp. $\mathbf{R} = \mathcal{O}_n$) et $(f_1, \dots, f_n)$ définit une variété discrète (resp. O est un zéro isolé) , on a précédemment prouvé ([Boy]) que cette définition algébrique coïncide avec la définition analytique des résidus utilisant les représentations intégrales ([T] ,[Y]).

La définition algébrique des résidus respecte la loi de tranformation([L] (2.8)):

$$\forall \omega \in \wedge^n \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}, \qquad \operatorname{Res}\begin{bmatrix} \omega \\ f_1, \dots, f_n \end{bmatrix} = \operatorname{Res}\begin{bmatrix} \det A\omega \\ g_1, \dots, g_n \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 32A27 , 14F10.

L'utilité d'une telle "loi" est bien connue, cependant certaines démonstrations, comme celle proposée dans la preuve du Nullstellensatz sur un corps de caractéristique quelconque dans [B-Y], ou encore dans le cadre analytique les calculs effectués dans [E] ou [K], nécessitent d'exprimer le résidu par rapport à $(f_1^{\beta_1+1}, \ldots, f_n^{\beta_n+1})$ où $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, en fonction d' une somme de résidus par rapport à $(g_1^{\alpha_1+1}, \ldots, g_n^{\alpha_n+1})$ où $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, ce que permet seulement la loi de transformation lorsque $\beta_i = 0$ pour tout i.

Lorsque $\mathbf{R} = \mathcal{O}_n$, l'anneau des germes en 0 des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^n$, et $h \in \mathcal{O}_n$ en notant

$$\mathrm{Res}_{(f,0)}(h) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_f} \frac{h dz}{f_1 \ldots f_n}$$

le résidu local de Grothendieck (cf. [G] ou [T]) l'article [K] d'une part, le livre [T] d'autre part proposent la formule:

$$c_{i_1 \ldots i_m} \int_{\Gamma_f} \frac{h dz}{f_{i_1} \ldots f_{i_m} f^I} = \sum_{j_1, \ldots, j_m = 1}^{n} c_{j_1 \ldots j_m} \int_{\Gamma_g} \frac{h \det A a_{j_1, i_1} \ldots a_{j_m, i_m} dz}{g_{j_1} \ldots g_{j_m} g^I} \tag{1.3}$$

où $f^I = f_1 \ldots f_n$ et $c_{i_1 \ldots i_m} = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, α_k désignant le nombre de fois où k apparaît dans la liste $(i_1, \ldots, i_m)$. Cette formule, proposée dans le cas général, est uniquement démontrée dans le cas où f et g ont un Jacobien non nul en 0.

Il est présenté ci-dessous une preuve analytique complète de (1.3). En fait cette formule peut prendre sa place dans une théorie algébrique des résidus, une démonstration en est donnée dans le paragraphe 4.

La preuve analytique, présentée dans le paragraphe 2, utilise des formules de représentations intégrales de type Bochner-Martinelli (cf. [A], [C], ou [Y]). L'idée de cette preuve est dûe à A. Yger, elle contient par ailleurs une méthode de démonstration originale de la loi de transformation (cf. [Y]). On se place dans le cadre de $\mathcal{O}_n$ et des suites $f = (f_1, \ldots, f_n)$ et $g = (g_1, \ldots, g_n)$ régulières, mais la preuve est aussi valable dans le cadre de $\mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_n]$ et des suites $f = (f_1, \ldots, f_n)$ et $g = (g_1, \ldots, g_n)$ de $\mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_n]$ qui définissent une variété discrète de $\mathbb{C}^n$. On peut montrer que de telles suites sont quasi-régulières [Boy].

Dans la démonstration algébrique, présentée dans le paragraphe 4, on se place dans le cadre général d'une $\mathbf{A}$-algèbre commutative $\mathbf{R}$ où $\mathbf{A}$ est un anneau commutatif, et l'on utilise le formalisme algébrique des résidus mis en place par J. Lipman (cf. [L]). Dans le cas particulier où l'on choisit $\mathbf{R} = \mathcal{O}_n$ ou bien $\mathbf{R} = \mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_n]$ et pour éléments de $\mathbf{R}$, $X_1 = Z_1, \ldots, X_n = Z_n$, la proposition 4.3 fournit le théorème 2.1 du paragraphe 2.

Nous remerçions vivement A. Yger pour les nombreuses discussions et idées qui nous ont aidés à réaliser ce travail.

2-Une loi de transformation généralisée.

Théorème 2.1. *Soient $f = (f_1, \ldots, f_n)$ et $g = (g_1, \ldots, g_n)$ deux suites régulières dans $\mathcal{O}_n$ qui vérifient la relation (1.1). Pour $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ et $h \in \mathcal{O}_n$ on a:*

$$\beta!\,\mathrm{Res}_{(f_1^{\beta_1+1},\dots,f_n^{\beta_n+1},0)}(h) =$$
$$\sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{n,1}=\beta_1\\ \vdots \\ \alpha_{1,n}+\cdots+\alpha_{n,n}=\beta_n}} C(\beta,\alpha)\,\mathrm{Res}_{((g_k^{\alpha_{k,1}+\cdots+\alpha_{k,n}+1})_{1\le k\le n},0)}\left(h\det A\prod_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^{\alpha_{i,j}}\right) \tag{2.2}$$

où $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$, $\alpha=(\alpha_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ *et* $C(\beta,\alpha)$ *est le coefficient binomial:* $\binom{\beta_1}{\alpha_{1,1};\dots;\alpha_{n,1}}\dots\binom{\beta_n}{\alpha_{1,n};\dots;\alpha_{n,n}}(\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{1,n})!\dots(\alpha_{n,1}+\cdots+\alpha_{n,n})!$
avec: $\binom{\beta_k}{\alpha_{1,k};\dots;\alpha_{n,k}}=\frac{\beta_k!}{\alpha_{1,k}!\dots\alpha_{n,k}!}$

Preuve de 2.1. Soit U un ouvert, contenant 0, sur lequel on peut choisir des représentants des germes des fonctions holomorphes en jeu dans le théorème. On notera de la même manière les représentants et les germes, et quitte à réduire U, on peut supposer que f et g admettent l'origine pour seul zéro. Le théorème est une conséquence de la proposition suivante, qui peut avoir un intérêt pour elle même:

Proposition 2.3. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant $B(0,\rho)$, W un voisinage de $\partial B(0,\rho)$ inclus dans U, $f=(f_1,\dots,f_n)$ des fonctions holomorphes sur U qui admettent pour seul zéro l'origine et s une fonction de classe C^1 sur W qui vérifie:*

$$\langle s(\zeta),f(\zeta)\rangle=\sum_{k=1}^{n}s_k(\zeta)f_k(\zeta)\neq 0$$

pour $\zeta\in W$. Pour toute fonction h holomorphe sur U et tout $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{N}^n$ on a:

$$\mathrm{Res}_{(f_1^{\beta_1+1},\dots,f_n^{\beta_n+1},0)}(h) =$$
$$\frac{(n-1+|\beta|)!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\beta!(2i\pi)^n}\int_{|\zeta|=\rho} h\prod_{j=1}^{n}s_j^{\beta_j}\,\frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}s_k\,ds_{[k]}\bigwedge d\zeta}{\langle s(\zeta),f(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}} \tag{2.4}$$

où $ds_{[k]}=\bigwedge_{j\neq k}ds_j$

Le théorème est une conséquence facile de cette proposition. En effet, on choisit s défini par $s_k=\sum_{j=1}^{n}a_{j,k}\overline{g_j}$ pour $1\le k\le n$ et $\rho>0$ tel que $B(0,\rho)\subset U$. En notant $K(n,\beta)=\dfrac{(n-1+|\beta|)!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n}$ la proposition donne:

$$\beta!\,\mathrm{Res}_{(f_1^{\beta_1+1},\dots,f_n^{\beta_n+1},0)}(h) =$$
$$K(n,\beta)\int_{|\zeta|=\rho} h\prod_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{j,k}\overline{g_j}\Big)^{\beta_k}\frac{\det A\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\overline{g_k}\,d\overline{g}_{[k]}\bigwedge d\zeta}{\|g\|^{2(n+|\beta|)}} \tag{2.5}$$

en développant, le second menbre de (2.5) s'écrit:

$$K(n,\beta)\int_{|\zeta|=\rho} h\prod_{k=1}^{n}\Big(\sum_{\alpha_{1,k}+\cdots+\alpha_{n,k}=\beta_k}\binom{\beta_k}{\alpha_{1,k};\ldots;\alpha_{n,k}}\prod_{j=1}^{n} a_{j,k}^{\alpha_{j,k}}\overline{g}_{j,k}^{\alpha_{j,k}}\Big)$$

$$\frac{\det A\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\overline{g_k}d\overline{g}_{[k]}\bigwedge d\zeta}{\|g\|^{2(n+|\beta|)}}$$

$$= K(n,\beta)\int_{|\zeta|=\rho}\sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{n,1}=\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_{1,n}+\cdots+\alpha_{n,n}=\beta_n}}\frac{C(\beta,\alpha)}{\prod_{k=1}^{n}(\alpha_{k,1}+\cdots+\alpha_{k,n})!}\Big(h\det A\prod_{i,j=1}^{n}a_{i,j}^{\alpha_{i,j}}\Big)$$

$$\prod_{k=1}^{n}\overline{g}_k^{(\alpha_{k,1}+\cdots+\alpha_{k,n})}\frac{\Omega g}{\|g\|^{2(n+|\beta|)}} \qquad (2.6)$$

où $\Omega_g=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\overline{g_k}d\overline{g}_{[k]}\bigwedge d\zeta$

On peut appliquer à chaque terme de (2.6) la proposition 2.3 où f est remplacé par g et s par $\overline{g}$, on obtient:

$$\sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{n,1}=\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_{1,n}+\cdots+\alpha_{n,n}=\beta_n}} C(\beta,\alpha)\operatorname{Res}_{((g_k^{\alpha_{k,1}+\cdots+\alpha_{k,n}+1})_{1\le k\le n},0)}\left(h\det A\prod_{i,j=1}^{n}a_{i,j}^{\alpha_{i,j}}\right)$$

ce qui termine la preuve du théorème.

Remarque 2.7 Les formulations proposées en (1.3) et (2.2) sont différentes mais elles contiennent les mêmes informations. En effet dans (1.3) on peut supposer que $1\le i_1\le\cdots\le i_m$, on note β_k le nombre de fois qu'apparait k dans la liste $(i_1,\ldots,i_m)$ et l'on choisit $(j_1,\ldots,j_m)\in(\mathbb{N}^*)^n$ où $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}-\{0\}$. On peut écrire:

$$\frac{a_{j_1,i_1}\ldots a_{j_m,i_m}}{g_{j_1}\cdots g_{j_m}}=\prod_{\substack{1\le j\le\beta_k\\ 1\le k\le n\\ \beta_k\ne 0}}\frac{a_{\sigma_k(j),k}}{g_{\sigma_k(j)}} \qquad (2.8)$$

où σ_k est une application de $[[1,\beta_k]]$ dans $[[1,n]]$. En notant $\alpha_{s,k}$ le nombre de fois que l'application α_k prend la valeur s, (2.8) s'écrit: $\displaystyle\prod_{\substack{1\le k,s\le n\\ \beta_k\ne 0}}\frac{a_{s,k}^{\alpha_{s,k}}}{g_s^{\alpha_{s,k}}}$.

Or pour $\beta_k\ne 0$ il existe $\displaystyle\binom{\beta_k}{\alpha_{1,k};\ldots;\alpha_{n,k}}$ applications de $[[1,\beta_k]]$ dans $[[1,n]]$ qui prennent $\alpha_{s,k}$ fois la valeur s, et donc dans (1.3) on a $\binom{\beta_1}{\alpha_{1,1};\ldots;\alpha_{n,1}}\cdots\binom{\beta_n}{\alpha_{1,n};\ldots;\alpha_{n,n}}$ termes identiques à $\displaystyle\int_{\Gamma_g}\frac{h\det A a_{j_1,i_1}\ldots a_{j_m,i_m}dz}{g_{j_1}\cdots g_{j_m}g^I}$. D'autre part $c_{j_1\ldots j_m}=(\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{1,n})!\ldots(\alpha_{n,1}+\cdots+\alpha_{n,n})!$ et $c_{i_1\ldots i_m}=\beta!$ ce qui prouve que (1.3) peut s'écrire comme (2.2)

Preuve de la proposition 2.3. Dans un premier temps on prouve que (2.4) ne dépend pas de la section s choisie, puis la preuve est faite lorsque f a un Jacobien qui ne s'annule pas sur U et enfin pour f quelconque.

Soit $0 < \rho_1 < \rho$ tel que $\partial B(0,\rho) \subset W$ et $\mathcal{X}$ une fonction de classe C^1 sur U qui prend la valeur 0 sur un voisinage de $\partial B(0,\rho_1)$ et 1 sur un voisinage de $\partial B(0,\rho)$, on pose pour $\zeta \in U - \{0\}$:

$$\tilde{s}(\zeta) = \mathcal{X}(\zeta)\frac{s(\zeta)}{\langle s(\zeta), f(\zeta)\rangle} + (1 - \mathcal{X}(\zeta)\frac{\overline{f}(\zeta)}{\langle \overline{f}(\zeta), f(\zeta)} \tag{2.9}$$

où $\langle s(\zeta), f(\zeta)\rangle = \sum_{k=1}^n s_k(\zeta)f_k(\zeta)$

On a: $\langle \tilde{s}(\zeta), f(\zeta)\rangle = 1$ donc $\overline{\partial}\tilde{s} = \bigwedge_{k=1}^n \overline{\partial}\tilde{s}_k = 0$.

En particulier on obtient:

$$d(\prod_{j=1}^n \tilde{s}_j^{\beta j}\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\tilde{s}_k^{\beta_k} d\tilde{s}_{[k]}\bigwedge d\zeta) = \overline{\partial}(\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}(\prod_{j\neq k}\tilde{s}_j^{\beta_j})\tilde{s}_k^{\beta_k+1}d\tilde{s}_{[k]}\bigwedge d\zeta) = 0$$

ce qui prouve que la forme:

$$h\Omega_{\tilde{s}} := h\prod_{j=1}^n \tilde{s}_j^{\beta_j}\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\tilde{s}_k^{\beta_k}d\tilde{s}_{[k]}\bigwedge d\zeta$$

est fermée sur $U - \{0\}$. En utilisant le théorème de Stokes on a:

$$\int_{|\zeta|=\rho} h\Omega_{\tilde{s}} = \int_{|\zeta|=\rho_1} h\Omega_{\tilde{s}}$$

c'est à dire

$$\int_{|\zeta|=\rho} h\prod_{j=1}^n s_j^{\beta_j}\frac{\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}s_k ds_{[k]}\bigwedge d\zeta}{\langle s(\zeta), f(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}} = \int_{|\zeta|=\rho_1} h\prod_{j=1}^n \overline{f}_j^{\beta_j}\frac{\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\overline{f}_k d\overline{f}_{[k]}\bigwedge d\zeta}{\langle \overline{f}(\zeta), f(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}}$$

ce qui montre que la valeur de l'intégrale ne dépend pas de la section s.

Pour démontrer la proposition dans le cas où f a un Jacobien qui ne s'annule pas sur U, on considère f comme un système de coordonnées sur U.

D'une part, d'aprés la formule de Cauchy, on a:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{(f_1^{\beta_1+1},\dots,f_n^{\beta_n+1},0)}(h) &= \frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{\Gamma f}\frac{h(\zeta)d\zeta}{f_1^{\beta_1+1}\dots f_n^{\beta_n+1}} \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{\Gamma f}\frac{\left(\frac{h}{det\frac{\partial f}{\partial\zeta}}\right)}{f_1^{\beta_1+1}\dots f_n^{\beta_n+1}}df = \frac{1}{\beta!}\frac{\partial^{|\beta|}\left(\frac{h}{det\frac{\partial f}{\partial\zeta}}\right)}{\partial f^\beta}(0)\end{aligned}$$

D'autre part,d'aprés les formules de Bochner-Martinelli - ou de Leray - (cf. [A] [Y] ou [C] p.181) pour f_0 proche de 0, on a:

$$\left(\frac{h}{det\frac{\partial f}{\partial\zeta}}\right)(f_0) = \frac{(n-1)!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n}\int_{|\varsigma|=\rho}\left(\frac{h}{det\frac{\partial f}{\partial\zeta}}\right)\frac{\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}s_k ds_{[k]}\bigwedge df}{\langle s(\zeta), f(\zeta)-f_0\rangle^n}$$

en dérivant par rapport à f_0 l'intégrale ci-dessus on obtient:

$$\frac{\partial^{|\beta|}\left(\frac{h}{det\frac{\partial f}{\partial\zeta}}\right)}{\partial f^{\beta}}(0) = K(n,\beta)\int_{|\zeta|=\rho}\left(\frac{h}{det\frac{\partial f}{\partial\zeta}}\right)\prod_{j=1}^{n} s_j^{\beta_j}\frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}s_k ds_{[k]}\bigwedge df}{\langle s(\zeta),f(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}}$$

ce qui, dans ce cas, prouve la proposition.

Dans le cas où f est quelconque, pour ϵ générique, $f_\epsilon = f-\epsilon$ n'a que des zéros simples dans U, et il existe $\alpha>0$ tel que pour ϵ assez petit $|f_\epsilon(\zeta)|>\alpha$ sur $\partial B(0,\rho)$. En prenant pour section $\overline{f}$, on a:

$$\begin{aligned}K(n,\beta)&\int_{|\zeta|=\rho}h\prod_{j=1}^{n}s_j^{\beta_j}\frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}s_k ds_{[k]}\bigwedge d\zeta}{\langle s(\zeta),f(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}}\\ &= K(n,\beta)\int_{|\zeta|=\rho}h\prod_{j=1}^{n}\overline{f}_j^{\beta_j}\frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\overline{f}_k d\overline{f}_{[k]}\bigwedge d\zeta}{\langle\overline{f}(\zeta),f(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}}\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}K(n,\beta)\int_{|\zeta|=\rho}h\prod_{j=1}^{n}\overline{f}_{\epsilon,j}^{\beta_j}\frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\overline{f}_{\epsilon,k}d\overline{f}_{\epsilon,[k]}\bigwedge d\zeta}{\langle\overline{f}_\epsilon(\zeta),f_\epsilon(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}}\end{aligned}$$

En remplaçant dans (2.6) $\overline{f}$ par $\overline{f}_\epsilon$, le même calcul qui a permis de prouver que $\Omega_{\tilde{s}}$ est fermé sur $U-\{0\}$,prouve que la forme $h\prod_{j=1}^{n}\overline{f}_{\epsilon,j}^{\beta_j}\frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\overline{f}_{\epsilon,k}d\overline{f}_{\epsilon,[k]}\bigwedge d\zeta}{\langle\overline{f}_\epsilon(\zeta),f_\epsilon(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}}$ est fermée dans $U-V(f_\epsilon)$. En notant P_ϵ les zéros de f_ϵ, le théorème de Stokes permet de remplacer

$$K(n,\beta)\int_{|\zeta|=\rho}h\prod_{j=1}^{n}\overline{f}_{\epsilon,j}^{\beta_j}\frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\overline{f}_{\epsilon,k}d\overline{f}_{\epsilon,[k]}\bigwedge d\zeta}{\langle\overline{f}_\epsilon(\zeta),f_\epsilon(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}}$$

$$\text{par}\sum_{P_\epsilon\in V(f_\epsilon)}K(n,\beta)\int_{|P_\epsilon+\zeta|=\tau}h\prod_{j=1}^{n}\overline{f}_{\epsilon,j}^{\beta_j}\frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\overline{f}_{\epsilon,k}d\overline{f}_{\epsilon,[k]}\bigwedge d\zeta}{\langle\overline{f}_\epsilon(\zeta),f_\epsilon(\zeta)\rangle^{n+|\beta|}} \tag{2.10}$$

Les zéros de f_ϵ étant simples, on est pour chaque terme de (2.10) dans le cas précédant et (2.10) peut s'écrire:

$$\sum_{P_\epsilon\in V(f_\epsilon)}\mathrm{Res}_{(f_1^{\beta_1+1},\ldots,f_n^{\beta_n+1},P_\epsilon)}(h)$$

D autre part, d'aprés le "principe de continuité" (cf. [G] p.657) on a:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{P_\epsilon\in V(f_\epsilon)}\mathrm{Res}_{(f_1^{\beta_1+1},\ldots,f_n^{\beta_n+1},P_\epsilon)}(h)=\mathrm{Res}_{(f_1^{\beta_1+1},\ldots,f_n^{\beta_n+1},0)}(h)$$

ce qui termine la preuve de la proposition.

3-Une application des techniques utilisées

Dans la preuve de la loi de transformation, comme celle écrite dans [G], on prouve par un argument algébrique immédiat que si:

$g = Af, f(P) \neq 0$ et $g(P) = 0$, P étant un zéro isolé de g alors:

$$\forall h \in \mathcal{O}_P, \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_{g_P}} \frac{h \det A dz}{g_1 \dots g_n} = 0 \tag{3.1}$$

Des exemples simples montrent par contre, que dans les mêmes conditions il est possible d'obtenir

$$\int_{\Gamma_{g_P}} \frac{h \det A a_{j_1,i_1} \dots a_{j_m,i_m} dz}{g_{j_1} \dots g_{j_m} g^I} \neq 0$$

Un argument analytique mis en œuvre dans la preuve de la proposition 2.3 permet d'obtenir la proposition suivante qui généralise (3.1):

Proposition 3.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ $f = (f_1, \dots, f_n)$ et $g = (g_1, \dots, g_n)$ des fonctions holomorphes sur U telles que $g = Af$ où $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice à coefficients dans $\mathcal{O}(U)$. On suppose que g admet un zéro isolé P qui n'est pas un zéro de f alors:*

$$\forall h \in \mathcal{O}(U), \sum_{j_1,\dots,j_m=1}^{n} c_{j_1 \dots j_m} \int_{\Gamma_{g_P}} \frac{h \det A a_{j_1,i_1} \dots a_{j_m,i_m} dz}{g_{j_1} \dots g_{j_m} g^I} = 0$$

Preuve. Comme dans la preuve de la proposition 2.3 on choisit W un voisinage de $\partial B(P,r)$, s une fonction de classe C^1 sur W qui vérifie: $\langle s(\zeta), f(\zeta) \rangle \neq 0$ pour $\zeta \in W$. Soit $\tilde{U}$ un voisinage de $B(P,r)$, $\mathcal{X}$ une fonction de classe C^1 sur $\tilde{U}$ qui prend la valeur 1 sur un voisinage de $\partial B(P,r)$, et zéro sur un voisinage de P on pose pour $\zeta \in \tilde{U}$:

$$\tilde{s}(\zeta) = \mathcal{X}(\zeta) \frac{s(\zeta)}{\langle s(\zeta), f(\zeta) \rangle} + (1 - \mathcal{X}(\zeta)) \frac{\overline{f}(\zeta)}{\langle \overline{f}(\zeta), f(\zeta)}$$

le calcul fait dans la preuve de la proposition 2.3 montre que la forme:

$$h \prod_{j=1}^{n} \tilde{s}_j^{\beta_j} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \tilde{s}_k^{\beta_k} d\tilde{s}_{[k]} \bigwedge d\zeta$$

est fermée sur $\tilde{U}$ ce qui prouve que:

$$\int_{|\zeta+P|=r} h \prod_{j=1}^{n} s_j^{\beta_j} \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_k ds_{[k]} \bigwedge d\zeta}{\langle s(\zeta), f(\zeta) \rangle^{n+|\beta|}} = 0 \tag{3.3}$$

On choisit s défini par: $s_k = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} \overline{g}_k$, (3.3) s'écrit en utilisant le calcul fait dans la preuve du théorème 2.1:

$$\sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\dots+\alpha_{n,1}=\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{1,n}+\dots+\alpha_{n,n}=\beta_n}} C(\beta, \alpha) \operatorname{Res}_{((g_k^{\alpha_{k,1}+\dots+\alpha_{k,n}+1})_{1 \leq k \leq n}, P)} \left(h \det A \prod_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^{\alpha_{i,j}} \right) = 0$$

soit encore:

$$\sum_{j_1,\dots,j_m=1}^{n} c_{j_1 \dots j_m} \int_{\Gamma_{g_P}} \frac{h \det A a_{j_1,i_1} \dots a_{j_m,i_m} dz}{g_{j_1} \dots g_{j_m} g^I} = 0$$

4-Une preuve algébrique de la loi de transformation généralisée.

lemme 4.1. *Soient* $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre commutative,* $g = (f_1, \ldots, f_n)$ *une suite de* $\mathbf{R}$ *quasi-réguliére,* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ *une matrice,* $U_1, \ldots, U_n$ *des variables algébriquement indépendantes sur* $\mathbf{R}$ *et* $V = AU$*, alors la suite* $(U_1, \ldots, U_n, f_1 - V_1, \ldots, f_n - V_n)$ *de* $\mathbf{R}[U]$ *est quasi-régulière.*

Preuve de 4.1.

Soit $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in \mathbf{R}$, $I = (U_1, \ldots, U_n, f_1 - a_{i_1} U_{i_1}, \ldots, f_n - a_{i_n} U_{i_n})\mathbf{R}[U]$, $k \in \mathbb{N}^*$ et

$$\Big(\sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n, \beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta| + |\beta'| = k}} a_{\beta,\beta'} U^\beta (f - aU)^{\beta'}\Big) \in I^{k+1} \tag{4.1.1}$$

où $a_{\beta,\beta'} \in \mathbf{R}[U]$ et $(f - aU) = (f_1 - a_{i_1} U_{i_1}, \ldots, f_n - a_{i_n} U_{i_n})$.

Pour montrer que la suite $(U_1, \ldots, U_n, f_1 - a_{i_1} U_{i_1}, \ldots, f_n - a_{i_n} U_{i_n})$ est quasi-régulière, il suffit de traiter le cas où $a_{\beta,\beta'} \in \mathbf{R}$ ce que l'on suppose maintenant.

En notant

$$P_0\Big(\sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n, \beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta| + |\beta'| = k}} a_{\beta,\beta'} U^\beta (f - aU)^{\beta'}\Big)$$

le terme constant de (4.1.1) considéré comme un polynôme en U, on a:

$$P_0\Big(\sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n, \beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta| + |\beta'| = k}} a_{\beta,\beta'} U^\beta (f - aU)^{\beta'}\Big) = \sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta'| = k}} a_{0,\beta'} f^{\beta'}$$

Les éléments de I^{k+1} s'écrivent:

$\sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n, \beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta| + |\beta'| \geq k+1}} c_{\beta,\beta'} U^\beta f^{\beta'}$ où $c_{\beta,\beta'} \in \mathbf{R}$, en particulier leur terme constant est de la forme $\sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta'| = k+1}} c_{0,\beta'} f^{\beta'}$, par conséquent

$$\sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta'| = k}} a_{0,\beta'} f^{\beta'} = \sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta'| = k+1}} c_{0,\beta'} f^{\beta'}$$

ce qui prouve que $\sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta'| = k}} a_{0,\beta'} f^{\beta'} \in J^{k+1}$, où $J = (f_1, \ldots, f_n)\mathbf{R}$. La suite $(f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathbf{R}$ étant quasi-régulière on a $a_{0,\beta'} \in J$, en particulier $a_{0,\beta'} \in I$ pour tout β' tel que $|\beta'| = k$.

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \geq 1$. On suppose prouvé par récurrence sur $|\alpha|$ que $a_{\beta,\beta'} \in I$ pour tout $(\beta, \beta') \in \mathbb{N}^{2n}$ tel que $|\beta| < |\alpha|$ et $|\beta| + |\beta'| = k$.

En notant $P_\alpha(\sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n, \beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta| + |\beta'| = k}} a_{\beta,\beta'} U^\beta (f - aU)^{\beta'})$, les termes qui contiennent exactement U^α on a:

$$\begin{aligned} &P_\alpha\Big(\sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n, \beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta| + |\beta'| = k}} a_{\beta,\beta'} U^\beta (f - aU)^{\beta'}\Big) \\ &= \sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| + |\beta'| = k}} a_{\alpha,\beta'} U^\alpha f^{\beta'} + P_\alpha\Big(\sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n, \beta' \in \mathbb{N}^n \\ |\beta| < |\alpha| \\ |\beta| + |\beta'| = k}} a_{\beta,\beta'} U^\beta (f - aU)^{\beta'}\Big) \end{aligned}$$

Les variables $U_1, \ldots, U_n$ étant algébriquement indépendantes sur $\mathbf{R}$, il existe des $c_{\alpha,\beta'} \in \mathbf{R}$ tels que:

$$P_\alpha(\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n,\beta'\in\mathbb{N}^n \\ |\beta|+|\beta'|=k}} a_{\beta,\beta'}U^\beta(f-aU)^{\beta'}) = \sum_{\substack{\beta'\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|+|\beta'|=k+1}} c_{\alpha,\beta'}U^\alpha f^{\beta'}$$

par récurrence sur (β, β') on a que:

$$P_\alpha(\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n,\beta'\in\mathbb{N}^n \\ |\beta|<|\alpha| \\ |\beta|+|\beta'|=k}} a_{\beta,\beta'}U^\beta(f-aU)^{\beta'}) \in I^{k+1}$$

par conséquent $\sum_{\substack{\beta'\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|+|\beta'|=k}} a_{\alpha,\beta'}U^\alpha f^{\beta'} \in I^{k+1}$.

Or Les éléments de I^{k+1} s'écrivent: $\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n,\beta'\in\mathbb{N}^n \\ |\beta|+|\beta'|\geq k+1}} c_{\beta,\beta'}U^\beta f^{\beta'}$ où $c_{\beta,\beta'} \in \mathbf{R}$, les variables $U_1, \ldots, U_n$ étant algébriquement indépendantes on en déduit que:

$$(\sum_{\substack{\beta'\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|+|\beta'|=k}} a_{\alpha,\beta'}f^{\beta'}) \in J^{k+1-|\alpha|}$$

La suite $(f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathbf{R}$ étant quasi-régulière on a que $a_{\alpha,\beta'} \in I$ pour tout β' et par récurrence $a_{\beta,\beta'} \in I$ pour tout (β, β') ce qui prouve que la suite $(U_1, \ldots, U_n, f_1 - a_{i_1}U_{i_1}, \ldots, f_n - a_{i_n}U_{i_n})$ est $\mathbf{R}[U]$ quasi-régulière.

En réitérant ce procédé on obtient que la suite $(U_1, \ldots, U_n, g_1 - \sum_{i=1}^n a_{1,i}U_i, \ldots, g_n - \sum_{i=1}^n a_{n,i}U_i)$ de $\mathbf{R}[U]$ est quasi-régulière.

lemme 4.2. *Soient $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre commutative, $(f_1, \ldots, f_n)$ une suite de $\mathbf{R}$ quasi-régulière telle que $\dfrac{\mathbf{R}}{(f_1 \ldots f_n)}$ soit un $\mathbf{A}$ module projectif de type fini, $X_1, \ldots, X_n$ des éléments quelconques de $\mathbf{R}$, $U_1, \ldots, U_n$ des variables algébriquement indépendantes sur $\mathbf{R}$, $m_1, \ldots, m_n, m'_1, \ldots m'_n$ des entiers et $h = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha U^\alpha \in \mathbf{R}[U]$ alors*

$$\operatorname{Res}\left[\begin{matrix}\sum a_\alpha U^\alpha dU \wedge dX \\ U_1^{m_1+1}, \ldots, U_n^{m_n+1}, f_1^{m'_1+1}, \ldots, f_n^{m'_n+1}\end{matrix}\right] = \operatorname{Res}\left[\begin{matrix}a_{m_1,\ldots,m_n}dX \\ f_1^{m'_1+1}, \ldots, f_n^{m'_n+1}\end{matrix}\right] \quad (4.2.1)$$

et si $m_i > 0$, $r \in \mathbf{R}$ on a:

$$\operatorname{Res}\left[\begin{matrix}rf_i dX \\ f_1^{m_1+1}, \ldots, f_i^{m_i+1}, \ldots, f_n^{m_n+1}\end{matrix}\right] = \operatorname{Res}\left[\begin{matrix}rdX \\ f_1^{m_1+1}, \ldots, f_i^{m_i}, \ldots, f_n^{m_n+1}\end{matrix}\right] \quad (4.2.2)$$

Preuve de 4.2.

Soit $\hat{\mathbf{R}}$ le complété I adique de $\mathbf{R}$ où I est l'idéal de $\mathbf{R}$ engendré par $f_1, \ldots, f_n$, $\mathbf{P} = \dfrac{\hat{\mathbf{R}}}{\hat{I}} = \dfrac{\mathbf{R}}{I}$ et $\sigma : \mathbf{P} \to \hat{\mathbf{R}}$ une section de la projection canonique $\pi : \hat{\mathbf{R}} \to \mathbf{P}$

Soit $\mathbf{R'} = \mathbf{R}[U_1, \ldots, U_n]$, $I' = (U_1, \ldots, U_n, f_1, \ldots, f_n)\,\mathbf{R'}$, $\hat{\mathbf{R}}'$ le complété I' adique de $\mathbf{R'}$, $\mathbf{P'} = \dfrac{\hat{\mathbf{R}}'}{\hat{I'}} = \dfrac{\mathbf{R'}}{I'} = \dfrac{\mathbf{R}}{I} = \mathbf{P}$ et $\sigma' : \mathbf{P} \longrightarrow \hat{\mathbf{R}}'$ une section de la projection canonique $\pi' : \hat{\mathbf{R}}' \longrightarrow \mathbf{P}$

D'aprés la propriété universelle du séparé complété, l'injection canonique i de **R** dans **R'** induit une application injective $\bar{\imath}$ de $\hat{\mathbf{R}}$ dans $\hat{\mathbf{R}}$**'** et par conséquent on peut choisir $\sigma' = \bar{\imath} \circ \sigma$

En suivant les notations mises en place par Lipman ([L] (3.7)), pour $r \in$ **R** identifié par l'injection canonique à un élément de $\hat{\mathbf{R}}$, soit $r^\sharp = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} r_\alpha f^\alpha$ l'élément de $\hom_A($ **P**, **P**$)[[f]]$ qui vérifie pour tout $p \in$ **P** , $\sigma(p)r = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sigma(r_\alpha(p)f^\alpha$ on a alors

$\bar{\imath} \circ \sigma(p)r = \bar{\imath} \circ (\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sigma(r_\alpha(p)f^\alpha)$ donc $\sigma'(p)r = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sigma'(r_\alpha(p)f^\alpha$ ce qui permet d'identifier les écritures de $r^\sharp$ et $\bar{\imath}(r)^\sharp$. D'autre part si l'on note $r^\sharp \det((\dfrac{\partial}{\partial f_i} X_j^\sharp)) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \delta_\alpha f^\alpha$ on a

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} rdX \\ f_1^{m_1'+1}, \ldots, f_n^{m_n'+1} \end{bmatrix} = Tr_{P/A}(\delta_{m_1', \ldots, m_n'})$$

Soit $\beta \in \mathbb{N}^n$, pour tout $p \in$ **P** on a: $\sigma(p)rU^\beta = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sigma(r_\alpha(p)f^\alpha U^\beta$ donc

$$(rU^\beta)^\sharp = r^\sharp U^\beta$$

$$(rU^\beta)^\sharp \det((\frac{\partial}{\partial f_i} X_j^\sharp)) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \delta_\alpha U^\beta f^\alpha$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\begin{bmatrix} rdX \\ f_1^{m_1'+1}, \ldots, f_n^{m_n'+1} \end{bmatrix} &= Tr_{P/A}(\delta_{m_1', \ldots, m_n'}) \\ &= \operatorname{Res}\begin{bmatrix} rU^\beta dU \wedge dX \\ U_1^{\beta_1+1}, \ldots, U_n^{\beta_n+1}, f_1^{m_1'+1}, \ldots, f_n^{m_n'+1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

et si $\beta \neq (\beta_1', \ldots, \beta_n')$

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} rU^\beta dU \wedge dX \\ U_1^{\beta_1'+1}, \ldots, U_n^{\beta_n'+1}, f_1^{m_1'+1}, \ldots, f_n^{m_n'+1} \end{bmatrix} = 0$$

ce qui montre

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} \sum a_\alpha U^\alpha dU \wedge dX \\ U_1^{m_1+1}, \ldots, U_n^{m_n+1}, f_1^{m_1'+1}, \ldots, f_n^{m_n'+1} \end{bmatrix} = \operatorname{Res}\begin{bmatrix} a_{m_1, \ldots, m_n} dX \\ f_1^{m_1'+1}, \ldots, f_n^{m_n'+1} \end{bmatrix}$$

Pour la seconde égalité on a $(rf_i)^\sharp \det((\dfrac{\partial}{\partial f_i} X_j^\sharp)) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \delta_\alpha f^\alpha f_i$ d'où:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\begin{bmatrix} rf_i dX \\ f_1^{m_1+1}, \ldots, f_n^{m_n+1} \end{bmatrix} &= Tr_{P/A}(\delta_{m_1, \ldots, m_i - 1, \ldots, m_n}) \\ &= \operatorname{Res}\begin{bmatrix} rdX \\ f_1^{m_1+1}, \ldots, f_i^{m_i}, \ldots, f_n^{m_n+1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du lemme 4.2.

Proposition4.3. *Soit* $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre commutative,* $f = (f_1, \ldots, f_n)$ *et* $g = (g_1, \ldots, g_n)$ *deux suites de* $\mathbf{R}$ *quasi-régulières telles que d'une part* $g = Af$ *où* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ *et d'autre part que les* $\mathbf{A}$*-modules* $\dfrac{\mathbf{R}}{(f_1 \cdots f_n)}$ *et* $\dfrac{\mathbf{R}}{(g_1 \cdots g_n)}$ *soient projectifs de type fini. Pour tout entier* $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *et les éléments quelconques* $r, X_1, \ldots, X_n$ *de* $\mathbf{R}$ *on a :*

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} rdX \\ f_1^{\beta_1+1}, \ldots, f_n^{\beta_n+1} \end{bmatrix} = \sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{n,1}=\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{1,n}+\cdots+\alpha_{n,n}=\beta_n}} K(\beta,\alpha) \operatorname{Res}\begin{bmatrix} r \det A \prod_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^{\alpha_{i,j}} dX \\ (g_k^{\alpha_{k,1}+\cdots+\alpha_{k,n}+1})_{1 \le k \le n} \end{bmatrix} \tag{4.3.1}$$

où $K(\beta, \alpha) = \dfrac{C(\beta, \alpha)}{\beta!}$

preuve de la proposition 4.3.

Soient $U_1, \ldots, U_n$ des variables algébriquement indépendantes sur $\mathbf{R}$ et $V = AU$, d'aprés le lemme 4.1 les suites de $\mathbf{R}[U]$

$$(U_1, \ldots, U_n, f_1 - U_1, \ldots, f_n - U_n) \text{ et } (U_1, \ldots, U_n, g_1 - V_1, \ldots, g_n - V_n)$$

sont quasi-régulières, par conséquent les suites

$$(U_1^{\beta_1+1}, \ldots, U_n^{\beta_n+1}, f_1 - U_1, \ldots, f_n - U_n) \text{ et } (U_1^{\beta_1+1}, \ldots, U_n^{\beta_n+1}, g_1 - V_1, \ldots, g_n - V_n)$$

sont aussi quasi-régulières ([L] (3.2.c)). Les modules:

$$\frac{\mathbf{R}[U]}{(U_1^{\beta_1+1}, \ldots, U_n^{\beta_n+1}, f_1 - U_1, \ldots, f_n - U_n)}, \frac{\mathbf{R}[U]}{(U_1^{\beta_1+1}, \ldots, U_n^{\beta_n+1}, g_1 - V_1, \ldots, g_n - V_n)}$$

sont des $\mathbf{A}$-modules projectifs de type fini.

Soit $\tilde{A} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R}[U])$, on a $\tilde{A} \begin{pmatrix} U_1^{\beta_1+1} \\ \vdots \\ U_n^{\beta_n+1} \\ f_1 - U_1 \\ \vdots \\ f_n - U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^{\beta_1+1} \\ \vdots \\ U_n^{\beta_n+1} \\ g_1 - V_1 \\ \vdots \\ g_n - V_n \end{pmatrix}$ donc

d'aprés la loi de transformation ([L] (2.8)):

$$\begin{aligned} &\operatorname{Res}\begin{bmatrix} rdU \wedge dX \\ U_1^{\beta_1+1}, \ldots, U_n^{\beta_n+1}, f_1 - U_1, \ldots, f_n - U_n \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{Res}\begin{bmatrix} r \det A dU \wedge dX \\ U_1^{\beta_1+1}, \ldots, U_n^{\beta_n+1}, g_1 - V_1, \ldots, g_n - V_n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

On va donner une autre écriture de chaque membre de cette égalité.

En utilisant

$$f_i^{\beta_i+1} = U_i^{\beta_i+1} + (f_i - U_i)\sum_{k=0}^{\beta_i} U_i^k f_i^{\beta_i-k}$$

et en notant

$$B = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\beta_1} U_1^k f_1^{\beta_1-k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\beta_n} U_n^k f_n^{\beta_n-k} \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{\beta_1+1} \\ \vdots \\ U_n^{\beta_n+1} \\ f_1 - U_1 \\ \vdots \\ f_n - U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^{\beta_1+1} \\ \vdots \\ U_n^{\beta_n+1} \\ f_1^{\beta_1+1} \\ \vdots \\ f_n^{\beta_n+1} \end{pmatrix}$$

qui donne en appliquant la loi de transformation:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Res}\left[\begin{matrix} rdU \wedge dX \\ U_1^{\beta_1+1}, \ldots, U_n^{\beta_n+1}, f_1 - U_1, \ldots, f_n - U_n \end{matrix}\right] \\ &= \operatorname{Res}\left[\begin{matrix} r(\prod_{i=1}^n \sum_{k=0}^{\beta_i} U_i^k f_i^{\beta_i-k}) dU \wedge dX \\ (U_1^{\beta_1+1}, \ldots, U_n^{\beta_n+1}, f_1^{\beta_1+1}, \ldots, f_n^{\beta_n+1} \end{matrix}\right] \end{aligned}$$

le lemme 4.2 appliqué au membre de droite donne:

$$\operatorname{Res}\left[\begin{matrix} rdU \wedge dX \\ U_1^{\beta_1+1}, \ldots, U_n^{\beta_n+1}, f_1 - U_1, \ldots, f_n - U_n \end{matrix}\right] = \operatorname{Res}\left[\begin{matrix} rdX \\ f_1^{\beta_1+1}, \ldots, f_n^{\beta_n+1} \end{matrix}\right] \tag{4.3.3}$$

Pour le second membre de 4.3.2 en utilisant

$$g_i^{|\beta|+n} = V_i^{|\beta|+n} + (g_i - V_i)\sum_{k=0}^{|\beta|+n-1} V_i^k g_i^{|\beta|+n-k-1}$$

et

$$\begin{aligned} V_i^{|\beta|+n} &= (\sum_{j=1}^n a_{i,j} U_j)^{|\beta|+n} \\ &= \sum_{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_n} = |\beta|+n} \binom{|\beta|+n}{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}} a_{i,1}^{\alpha_{i,1}} \ldots a_{i,n}^{\alpha_{i,n}} U_1^{\alpha_{i,1}} \ldots U_n^{\alpha_{i,n}} \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

on a $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n$ donc pour chaque terme de 4.3.4 il existe un entier k tel que $\alpha_{i,k} \geq \beta_k + 1$, on peut donc trouver des éléments $c_{i,j} \in \mathbf{R}[U]$ tels que

$$V_i^{|\beta|+n} = \sum_{j=1}^n c_{i,j} U_j^{\beta_j+1}$$

on pose

$$C = (c_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}[U])$$

$$\text{et } D = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{|\beta|+n-1} V_1^k g_1^{|\beta|+n-k-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{|\beta|+n-1} V_n^k g_n^{|\beta|+n-k-1} \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{\beta_1+1} \\ \vdots \\ U_n^{\beta_n+1} \\ g_1 - V_1 \\ \vdots \\ g_n - V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^{\beta_1+1} \\ \vdots \\ U_n^{\beta_n+1} \\ g_1^{|\beta|+n} \\ \vdots \\ g_n^{|\beta|+n} \end{pmatrix}$$

et en appliquant la loi de transformation:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Res}\begin{bmatrix} r \det A dU \wedge dX \\ U_1^{\beta_1+1}, \dots, U_n^{\beta_n+1}, g_1 - V_1, \dots, g_n - V_n \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{Res}\begin{bmatrix} r \det A(\prod_{i=1}^n \sum_{k=0}^{|\beta|+n-1} V_i^k g_i^{|\beta|+n-k-1}) dU \wedge dX \\ (U_1^{\beta_1+1}, \dots, U_n^{\beta_n+1}, g_1^{|\beta|+n}, \dots, g_n^{|\beta|+n} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

or

$$V_i^k = (\sum_{j=1}^n a_{i,j} U_j)^k = \sum_{\alpha_{i,1}+\dots+\alpha_{i,n}=k} \binom{k}{\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n}} a_{i,1}^{\alpha_{i,1}} \dots a_{i,n}^{\alpha_{i,n}} U_1^{\alpha_{i,1}} \dots U_n^{\alpha_{i,n}}$$

par conséquent:

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^n \sum_{k=0}^{|\beta|+n-1} V_i^k g_i^{|\beta|+n-k-1} \\ &= \sum_{\substack{0\le k_i\le|\beta|+n-1\\ 1\le i\le n}} V_1^{k_1} \dots V_n^{k_n} g_1^{|\beta|+n-k_1-1} \dots g_n^{|\beta|+n-k_n-1} \\ &= \sum_{\substack{0\le k_i\le |\beta|+n-1, 1\le i\le n\\ \alpha_{1,1}+\dots+\alpha_{1,n}=k_1\\ \vdots \\ \alpha_{n,1}+\dots+\alpha_{n,n}=k_n}} \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_{i,1}+\dots+\alpha_{i,n}}{\alpha_{i,1},\dots,\alpha_{i,n}} \prod_{i,j=1}^n a_{i,j}^{\alpha_{i,j}} \prod_{j=1}^n U_j^{(\alpha_{1,j}+\dots+\alpha_{n,j})} \prod_{l=1}^n g_l^{|\beta|+n-k_l-1} \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

d'aprés le lemme 4.2 seul les termes de 4.3.6 tels que :

$$\begin{gathered} \alpha_{1,1} + \dots + \alpha_{n,1} = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{1,n} + \dots + \alpha_{n,n} = \beta_n \end{gathered}$$

apportent une contribution non nulle à (4.3.5) par conséquent on obtient:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}\left[\begin{matrix} r\det AdU\wedge dX \\ U_1^{\beta_1+1},\dots,U_n^{\beta_n+1},g_1-V_1,\dots,g_n-V_n\end{matrix}\right] \\
&= \sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{n,1}=\beta_1\\ \vdots \\ \alpha_{1,n}+\cdots+\alpha_{n,n}=\beta_n}} \prod_{i=1}^{n}\binom{\alpha_{i,1}+\cdots+\alpha_{i,n}}{\alpha_{i,1},\dots,\alpha_{i,n}} \operatorname{Res}\left[\begin{matrix} r\det A\prod\limits_{(i,j)} a_{i,j}^{\alpha_{i,j}} \prod\limits_{1\le i\le n} g_i^{|\beta|+n-k_i-1}dX \\ g_1^{|\beta|+n},\dots,g_n^{|\beta|+n}\end{matrix}\right] \\
&= \sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{n,1}=\beta_1\\ \vdots \\ \alpha_{1,n}+\cdots+\alpha_{n,n}=\beta_n}} K(\beta,\alpha)\operatorname{Res}\left[\begin{matrix} r\det A\prod_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^{\alpha_{i,j}}dX \\ (g_k^{\alpha_{k,1}+\cdots+\alpha_{k,n}+1})_{1\le k\le n}\end{matrix}\right] \qquad (4.3.7)
\end{aligned}$$

ce qui prouve en utilisant (4.3.2), (4.3.3) et (4.3.7) la proposition 4.3.

BIBLIOGRAPHIE

[A] L.A. AĬZENBERG, A.P. YUZHAKOV,, *Integral representations and residues in multidimensional complex analysis*, American Mathematical Society, 1983.

[B-Y] C. A. BERENSTEIN, A. YGER, *Properness and Effective Nullstellensatz* (1996), Prepint, University of Maryland.

[B] BOURBAKI, *Algèbre commutative. chap.3*, Hermann, 1961.

[Boy] J.Y BOYER, *Résidus algébriques et résidus analytiques dans le cas des intersections conplètes.* (1996), Prepint, Bordeaux.

[C] B. CHABAT, *Introduction à l'analyse complexe*, tome 2 Traduction française, Edition Mir Moscou, 1990.

[E] M. ELKADI, *Résidu de Grothendieck et forme de Chow*, Publicacions Matemàtiques, Vol 38 (1994),381-393..

[G] P. GRIFFITHS, J. HARRIS, *Principles of Algebraic Geometrie*, J. Willey & sons, 1978.

[H] G. HOPKINS, *An algebraic approach to Grothendieck's residue symbol* (1983, 511-537), Trans. Amer.Math. Soc.275, 2 , Boston.

[K] A. M. KYTMANOV, *A transformation formula for Grothendieck residues and some of its applications* (1989), Siberian Math. Journal, 495–499.

[Ku 1] E. KUNZ, *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry.*, Birkhäuser, Boston, 1985.

[Ku 2] E. KUNZ, *Kähler Differentials.*, Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 1986.

[Ma] S. MACLANE, *Homologie*, Springler-Verlag, 1975.

[M] H. MATSUMURA, *Commutative algebra (sec.ed.)* (1980), Benjamin, Reading Mass.

[L] J. LIPMAN, *Residues and traces of differentials forms via Hochschild homologie* (1987), American Mathematical Society, Providence.

[T] A. TSIKH, *Multidimensionnal residues and applications*; Translations of Mathematical Monograph, American Mathematical Society, 1992.

[Y] A. YGER, *Courants résidus et applications* (1994), Publications de l' Ecole Doctorale de Mathématiques de Bordeaux.

Jean-Yves Boyer
Laboratoire de Mathématiques Pures
Université Bordeaux Sciences
33405 Talence
boyer @ math.u-bordeaux.fr

Michel Hickel
Laboratoire de Mathématiques Pures
Université Bordeaux Sciences
33405 Talence
hickel @ math.u-bordeaux.fr