THESE

présentée à

L' UNIVERSITE BORDEAUX 1

Ecole Doctorale de Mathématiques et Informatique

par Jean-Yves BOYER

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

spécialité : mathématiques pures

COMPARAISON DE DIFFERENTES APPROCHES DES RESIDUS ET APPLICATIONS

Soutenue le 10 février 1999

Après avis de :

A. DICKENSTEIN, Professeur	Université Buenos Aires (Argentine)
B. TEISSIER, Directeur de Recherche au CNRS	E.N.S. Paris
B. TEISSIER, Directeur de Recherche au CNRS	E.N.S. Paris

Devant la commission d'examen formée de :

M.-F. ROY, Professeur	Université Rennes I	Président
A. YGER, Professeur	Université Bordeaux 1	Rapporteur
F. AMOROSO, Professeur	Université Turin (Italie)	Examinateurs
A. DIMCA, Professeur	Université Bordeaux1	
M. HICKEL, MDC	Université Bordeaux1	
B. TEISSIER, Directeur de Recherche au CNRS	E.N.S. Paris	

Résumé.- Le travail présenté propose dans une première partie de relier et comparer trois approches différentes du résidu : celle définie par les représentations intégrales dans le cas des intersections complètes de dimension zéro sur $\mathbb{C}$, celle induite par la notion de trace sur les algèbres de Gorenstein, définie par G. Scheja et U. Storch, et étendue par la suite par E. Kunz, R. Hübl, R. Waldi, et enfin celle définie par J. Lipman via l'homologie de Hochschild.

Dans une seconde partie, nous montrons comment les représentations intégrales du type Bochner-Martinelli permettent d'obtenir une preuve complète d'une généralisation de la loi de transformation. Nous montrons ensuite comment étendre ce résultat dans le cadre algébrique des résidus définis par J. Lipman. Nous donnons ensuite d'autres généralisations de la loi de transformation.

Dans une troisième partie, nous obtenons une extension algébrique d'une formule analytique classique de A. Weil. La formule obtenue permet de caractériser les homomorphismes finis de $\mathbf{A}[z]$ dans $\mathbf{A}[z]$ lorsque $\mathbf{A}$ est un nœthérien, et donne une preuve purement algébrique de la formule de Weil analytique.

Dans une quatrième partie, nous montrons comment notre formule de Weil permet d'obtenir une bonne borne dans le problème d'appartenance effective à un idéal.

Comparison of differents ways of defining residues and applications.

Abstract.- The first part of this work clarifies the connection between three different types of residues : those defined by the integral (the local residue in multidimensional complex analysis), those defined using the trace on Gorenstein algebra which was introduced by G. Scheja and U. Storch, then generalized by E. Kunz, R. Hübl and R. Waldi, and those defined by Lipman's approach to residues via Hochschild homology.

In part two we use integral representations of Bochner-Martinelli type in a complete proof of an extended transition formula for multidimensional complex residues. Then, without analytic tools, we generalize this result to Lipman's approach to residues. We also give other generalizations of transition formulas.

In part three we show how a classical analytic formula of A. Weil can be extended to residues defined by Lipman's approach. This formula is used to determine whether a homomorphism from $\mathbf{A}[z]$ to $\mathbf{A}[z]$ is finite when $\mathbf{A}$ is a nœtherian ring, and also to give an algebraic proof of the usual analytic Weil's formula.

In part four we show how our form of Weil's formula gives an effective solution for the membership problem with good bounds.

Spécialité. Mathématiques Pures

Laboratoire de Mathématiques Pures
Université de Bordeaux I, 33405 Talence Cedex
e.mail : boyer@math.u-bordeaux.fr

Mots clés. Résidus ; Loi de transformation ; Formule de Weil ; Appartenance effective à un idéal ; Homomorphisme fini ; Gorenstein (algèbre de); Trace ; Hochschild (homologie de) ; Formule d'Euler-Jacobi ; Suites quasi-régulières

REMERCIEMENTS

Voici enfin l'aboutissement d'un long parcours rendu possible grâce aux personnes, nombreuses, qui m'ont guidé.

Ce travail n'aurait pas eu lieu sans la compétence et la disponibilité de Monsieur Michel Hickel qui a dirigé cette thèse. Sa rigueur, sa minutie, sa vision des mathématiques, m'ont permis de progresser et de venir à bout de cette entreprise. Qu'il veuille bien trouver là toute ma reconnaissance et mes remerciements les meilleurs.

Monsieur Alain Yger m'a introduit à la théorie analytique des résidus lors de son cours de D.E.A. du printemps 94. Il a par la suite suivi de très près mon travail, me donnant conseils et idées. Dans les moments de découragement, il a su m'insuffler une nouvelle énergie. Je lui dois la chance d'avoir pu rencontrer des spécialistes du sujet. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

J'ai été très honoré que Madame Alicia Dickenstein et Monsieur Bernard Teissier aient accepté la lourde tâche de rapporteur. Qu'ils reçoivent ici mes remerciements les plus vifs.

Madame Marie-Françoise Roy m'a donné l'occasion, durant ma thèse, de participer à un groupe de travail extrêmement convivial et enrichissant, à Belle-Ile en Juin 97. Elle a de plus accepté de faire partie du Jury de cette thèse et me fait l'honneur de présider. Qu'elle reçoive ici mes remerciements les plus chaleureux.

Je remercie Monsieur Francesco Amoroso et Monsieur Alexandru Dimca d'avoir accepté de participer au Jury de cette thèse.

Mes remerciements vont également à tous les membres du séminaire de géométrie et du groupe de travail sur les résidus. Selon les années, les différentes personnes qui ont participé à ce groupe de travail m'ont permis d'enrichir mes connaissances. Je remercie particulièrement Madame Pierrette Cassou-Noguès, Monsieur Alexandru Dimca, Monsieur Roger Gay et Monsieur Alain Hénaut, d'avoir consacré une partie de leur temps de chercheur à écouter mes exposés puis à me conseiller.

Je suis très reconnaissant à Madame Adelina Fabiano de m'avoir invité à un séminaire, extrêmement sympathique et dynamique, en juin 98, en Calabre. J'espère que ce séminaire continuera à exister et à évoluer.

Que Monsieur Jean Fresnel et Monsieur Jean Esterle, qui lors de la préparation à l'Agrégation, la maîtrise et le D.E.A., n'ont ménagé ni leur temps ni leur peine pour me remettre le pied à l'étrier, veuillent bien ici accepter mes sincères remerciements. Ils ont, depuis, toujours témoigné un intérêt pour mon travail, m'encourageant à persévérer dans cette voie. Leur aide m'a permis d'obtenir un service d'enseignement allégé pour l'année 97-98, afin de terminer cette thèse dans de bonnes conditions.

Je remercie également Madame Mauricette Jaubert qui a assuré avec gentillesse et efficacité le tirage de la thèse.

Je ne voudrais pas oublier tous les amis et parents qui m'ont entouré durant ce long travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de mes plus sincères remerciements.

SOMMAIRE

PRESENTATION DES RESULTATS

Dans son ouvrage “Residues and Duality ”consacré à la théorie de la dualité de Grothendieck, R. Hartshorne définit l'homomorphisme “Residue Symbol ”ainsi que ses principales propriétés ([H] chap. III, §9 ou [Be]). Cet homomorphisme a de nombreuses applications (cf. par exemple [A-C], [A-L], [Li] , [Ton]), mais il est défini initialement dans une théorie globale de la dualité qui le rend difficilement accessible notamment par l'emploi des catégories dérivées. Depuis, plusieurs approches différentes de la notion de résidu sont apparues avec différents degrés de généralité (cf. par exemple [Ho], [L], [S-S_2], [Ku_2], [H-K_1], [H-K_2], [Hu], [Lo], [Pa], [Ye]). Certaines n'utilisent que des techniques d'algèbre commutative et homologique. Elles donnent un accès direct et plus simple, et permettent une généralisation du Symbole Résidu.

D'autre part la théorie analytique des résidus telle qu'exposée dans [G-H], [A-Y], [T], s'est considérablement enrichie et son champ d'application s'est élargi (cf. notamment [T], [B-G-V-Y], [B-Y_1], [B-Y_2]).

Dans le travail présenté ci-après nous nous intéressons à trois approches différentes du résidu dans le cas le plus élémentaire. Plus précisément, nous considérons d'une part la notion de résidu définie, via l'homologie de Hochschild, par J. Lipman qui semble la théorie possédant le plus grand degré de généralité. D'autre part nous étudions la notion de résidu induite par la notion de trace sur les algèbres de Gorenstein définie par G. Scheja et U. Storch ([S-S_1], [S-S_2]), et étendue par la suite par R. Hübl, E. Kunz, R. Waldi ([H], [H-K_1], [H-K_2], [K-W]). Enfin celle définie par les représentations intégrales dans le cas des intersections complètes de dimension zéro sur $\mathbb{C}$. La confrontation de ces trois points de vue est sans doute “bien connue des spécialistes ”mais n'apparaît pas ou peu dans les publications (voir par exemple [H-K_1] p. 59).

Notre but, à travers cette confrontation, est avant tout de généraliser et de mieux comprendre l'aspect algébrique de certaines formules issues de la théorie analytique des résidus qui jouent un rôle important,notamment dans des versions effectives du Nullstellensatz (cf. [B-G-V-Y], [B-Y_1], [B-Y_2], [Te]).

Notre travail est organisé de la manière suivante: le chapitre I présente les trois points de vue considérés, tandis que les chapitres II et III étendent dans la théorie de J. Lipman des formules issues de la théorie analytique des résidus. Le chapitre IV propose deux applications des formules obtenues précédemment.

Présentation du chapitre I

Le but du présent chapitre est essentiellement de donner une présentation succincte des trois notions considérées en établissant leurs liens.

Ainsi le paragraphe 1 rappelle brièvement la notion de résidu intégral dans le cas des intersections complètes de dimension 0. Lorsque $\mathbf{R} = \mathcal{O}_q$ est l'anneau des germes en zéro des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^q$ et $f = (f_1, \ldots, f_q)$ est une suite régulière de $\mathcal{O}_q$, le résidu intégral de $r \in \mathcal{O}_q$ est défini par

$$\mathrm{Res}_{(f,0)}(r) = \frac{1}{(2i\pi)^q} \int_{\Gamma_f} \frac{r(z)dz}{f_1(z)\ldots f_q(z)} \ ,$$

où Γ_f désigne le tube $\Gamma_f = \{\zeta \in B(0,\delta) : |f_i(\zeta)| = \epsilon_i,\ i = 1, \ldots, q\}$, orienté par la condition $d(\arg f_1) \wedge \cdots \wedge d(\arg f_q) > 0$ ([G-H], [T]). On énonce aussi les propriétés de non-dégénérescence (dualité locale) et la loi de transformation.

Le paragraphe 2 considère la situation suivante: $\mathbf{R}$ est une $\mathbf{A}$-algèbre plate commutative unitaire, $f = (f_1, \ldots, f_q)$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ telle que $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini et que le noyau de

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} : \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R} &\to \mathbf{P} \\ p \otimes r &\to p\bar{r} \end{aligned}$$

soit engendré par une suite quasi-régulière $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_q)$. Une généralisation des travaux de G. Scheja et U. Storch ([S-S1],[S-S2]) telle que présentée dans l'appendice de [Ku2], montre que $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$ est un $\mathbf{P}$-module libre de rang 1. De plus, en considérant des $a_{i,j} \in \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}$ tels que:

$$1 \otimes f_i = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}\zeta_j \qquad (1 \leq i \leq q),$$

et $\tilde{\Delta}^f_\zeta = \det(a_{i,j})$ d'image $\Delta^f_\zeta = \sum_{j=1}^{M} \bar{\alpha_j} \otimes \bar{\beta_j}$ dans $\mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}$, il existe une unique forme linéaire $\tau^\zeta_f \in \hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$ telle que:

$$\sum_{j=1}^{M} \bar{\alpha_j}\tau^\zeta_f(\bar{\beta_j}) = 1 \ . \tag{*}$$

τ^ζ_f est une base du $\mathbf{P}$-module $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$ ([Ku$_2$]). On appellera Δ^f_ζ le Bezoutien de f par rapport à ζ. La forme linéaire ainsi obtenue induit une notion de résidu vérifiant les propriétés de non-dégérescence, compatibilité au changement de base, loi de transformation, loi de transitivité.

Lorsque $\mathbf{R} = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_q]$ est l'anneau des polynômes à q variables, on peut choisir pour ζ la suite $(\bar{z_1} \otimes 1 - \bar{1} \otimes z_1, \ldots, \bar{z_q} \otimes 1 - \bar{1} \otimes z_q)$. L'unique élément de $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$ qui vérifie (*) est le résidu intégral global de f considéré comme élément de $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$, ce que permet la non-dégénérescence du résidu global.

Le paragraphe 3 présente la notion de résidu telle que définie par J. Lipman dans “Residues and Traces of Differential forms via Hochschild Homology ”([L]).

Après avoir énoncé les principales définitions et constructions, nous arrivons au cadre central de notre étude qui est le suivant: $\mathbf{R}$ est une $\mathbf{A}$-algèbre commutative unitaire, $f = (f_1, \ldots, f_q)$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ telle que $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, $\sigma : \mathbf{P} \to \mathbf{R}$ une section $\mathbf{A}$-linéaire de la projection canonique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{P}$, et $\hat{\mathbf{R}}$ le complété f-adique de $\mathbf{R}$. Pour $r_i \in \mathbf{R}$, on considère des $\gamma_{i,\alpha} \in \hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})$ tels que dans $\hat{\mathbf{R}}$:

$$\forall p \in \mathbf{P}, \qquad r_i.\sigma(p) = \sum_{\alpha \in (\mathbb{N})^q} \sigma\left(\gamma_{i,\alpha}(p)\right) f^{\alpha} \ .$$

Si $r_0, \ldots, r_q \in \mathbf{R}$, le symbole résidu via l'homologie de Hochschild peut être représenté par

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} r_0 \, \mathrm{d}\, r_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, r_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix} = \operatorname{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}} \left(\gamma_{0,0} \circ \sum_{\tau \in S_q} (-1)^{|\tau|} \gamma_{\tau(1),\varepsilon_1} \circ \cdots \circ \gamma_{\tau(q),\varepsilon_q} \right) \ ,$$

où $\varepsilon_j = (\delta_{1,j}, \ldots, \delta_{q,j}) \in \mathbb{N}^q$ est le q-uplet à composantes toutes nulles sauf la j $^{\text{ième}}$, et $\operatorname{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}$ la trace canonique du $\mathbf{A}$-module $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$. Le symbole résidu ainsi obtenu vérifie les propriétés de compatibilité au changement de base, loi de transformation, loi de transitivité.

Le paragraphe 4, quant à lui, compare les trois approches présentées. On établit en particulier la proposition suivante qui permet d'associer à la forme linéaire τ_f^{ζ} du paragraphe 2, un symbole résidu via l'homologie de Hochschild. Pour cela, on note $\mathbf{S} = \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}$, et $\Omega(\Phi)$ l'application $\mathbf{R}$-linéaire canonique ([B1],chap.III, §10, prop.19):

$$\begin{aligned} \Omega(\Phi) : \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} &\longrightarrow \Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \\ \alpha \, \mathrm{d}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}(r) &\longrightarrow 1 \otimes \alpha \, \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(1 \otimes r) \ . \end{aligned}$$

Proposition.

Soient $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre plate, et* $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *une suite quasi-régulière de* $\mathbf{R}$ *telle que le* $\mathbf{A}$*-module* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *soit projectif de type fini. On suppose que le noyau* J *de* $\tilde{\mu} : \mathbf{S} = \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R} \to \mathbf{P}$ *est engendré par une suite quasi-régulière* $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_q)$*. On note* τ_f^{ζ} *la base du* $\mathbf{P}$*-module* $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$ *associé à* f *et* ζ*. On considère une suite* $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_q)$ *de* $\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ *telle que*

$$\Omega(\Phi)(\omega_j) = \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_j) \ \ (\textit{modulo } J\Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}) \qquad j = 1, \ldots, q \ .$$

Alors

$$\forall r \in \mathbf{R}, \qquad \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} r\, \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix} = \tau_f^{\zeta}(\bar{r}) \ .$$

On obtient ainsi la construction du paragraphe 2 comme cas particulier de la notion de résidu défini par J. Lipman, et ceci peut-être de manière plus élémentaire que celle suggérée dans [H-K$_1$] (§1, remarque 1.8 p. 59). Cette proposition permet d'établir:

Corollaire.
Soit $\Delta_\zeta^f = \sum_{j=1}^M \bar{\alpha_j} \otimes \bar{\beta_j} \in \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}$ *le Bezoutien de* f *par rapport à* ζ*. Pour tout* $h \in \mathbf{R}$ *:*

$$\sum_{j=1}^{M} \alpha_j \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \beta_j h \ \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix} \equiv h \quad (modulo\ f\mathbf{R}) \ .$$

Dans le cas particulier où $\mathbf{A}$=$\mathbb{C}$ et $\mathbf{R}$=$\mathbb{C}[z_1, \ldots z_q]$ (resp. $\mathbf{R}$=$\mathcal{O}_q$), et $\zeta = (\bar{z_1} \otimes 1 - \bar{1} \otimes z_1, \ldots, \bar{z_q} \otimes 1 - \bar{1} \otimes z_q)$, on montrera, indépendamment de la proposition précédente, que la loi de transformation permet d'établir:

$$\begin{aligned} \forall r \in \mathbf{R}, \qquad \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbb{C}} \begin{bmatrix} r(z) \ \mathrm{d}\, z_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, z_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix} &= \tau_f^\zeta(\bar{r}) \\ &= \operatorname{Res}_f(r) \\ (resp. &= \operatorname{Res}_{f,0}(r)) \ . \end{aligned}$$

Présentation du chapitre II

Soient $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre commutative, $f = (f_1, \ldots, f_q)$ et $g = (g_1, \ldots, g_q)$ deux suites de $\mathbf{R}$ quasi-régulières telles que d'une part $g = Af$ où $A \in \mathcal{M}_q(\mathbf{R})$ et d'autre part telle que les $\mathbf{A}$-modules $\dfrac{\mathbf{R}}{(f_1 \ldots f_q)}$ et $\dfrac{\mathbf{R}}{(g_1 \ldots g_q)}$ soient projectifs de type fini. Pour des raisons calculatoires, il est souvent nécessaire d'exprimer le résidu par rapport à $(f_1^{\beta_1+1}, \ldots, f_q^{\beta_q+1})$ où $(\beta_1, \ldots, \beta_q) \in \mathbb{N}^q$, en fonction d'une somme de résidus par rapport à $(g_1^{\alpha_1+1}, \ldots, g_q^{\alpha_q+1})$ où $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \in \mathbb{N}^q$ (cf. [B-Y$_3$], [El], [K]).

Lorsque $\mathbf{R} = \mathcal{O}_q$, l'article "Transformation formula for Grothendieck residues and some of its applications "de A. M. Kytmanov ([K]), propose la formule

$$c_{i_1 \ldots i_m} \int_{\Gamma_f} \frac{h dz}{f_{i_1} \ldots f_{i_m} f^I} = \sum_{j_1, \ldots, j_m = 1}^{q} c_{j_1 \ldots j_m} \int_{\Gamma_g} \frac{h \det A a_{j_1,i_1} \ldots a_{j_m,i_m} dz}{g_{j_1} \cdots g_{j_m} g^I}$$

où $f^I = f_1 \ldots f_q$ et $c_{i_1 \ldots i_m} = \alpha_1! \ldots \alpha_q!$, α_k désignant le nombre de fois où k apparaît dans la liste $(i_1, \ldots, i_m)$. Cette formule, proposée dans le cas général, est uniquement démontrée dans le cas où f et g ont un Jacobien non nul en 0 et donc constituent des systèmes de coordonnées. La preuve est basée sur la formule de dérivation des fonctions composées. En utilisant la formule de représentation intégrale de Leray, on propose dans le chapitre II une preuve complète de cette formule. En fait, on peut étendre cette formule dans le cadre algébrique des résidus définis via l'homologie de Hochschild. On établira:

Théorème. *(Loi de transformation généralisée)*
Soient $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre commutative,* $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *et* $g = (g_1, \ldots, g_q)$ *deux suites de* $\mathbf{R}$ *quasi-régulières telles que d'une part* $g = Af$ *où* $A \in \mathcal{M}_q(\mathbf{R})$ *et d'autre part que les* $\mathbf{A}$*-modules* $\dfrac{\mathbf{R}}{(f_1 \ldots f_q)}$ *et* $\dfrac{\mathbf{R}}{(g_1 \ldots g_q)}$ *soient projectifs de type fini.*

Pour tout entier $\beta_1, \ldots, \beta_q$ et des éléments quelconques $h, X_1, \ldots, X_q$ de $\mathbf{R}$, on a :

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} hdX \\ f_1^{\beta_1+1}, \ldots, f_q^{\beta_q+1} \end{bmatrix} = \sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{q,1}=\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{1,q}+\cdots+\alpha_{q,q}=\beta_q}} \frac{C(\beta,\alpha)}{\beta!} \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} h \det A \prod_{i,j=1}^q a_{i,j}^{\alpha_{i,j}} dX \\ (g_k^{\alpha_{k,1}+\cdots+\alpha_{k,q}+1})_{1\leq k\leq q} \end{bmatrix} .$$

L'outil essentiel de cette preuve algébrique est la loi de transformation. Les résultats du paragraphe 1 de ce chapitre sont publiés, en collaboration avec M. Hickel, sous le titre "Une généralisation de la loi de transformation pour les résidus "au Bulletin de la S.M.F.([B-H$_1$]).

Le paragraphe 2 de ce chapitre, propose d'autres formules de transformation. Dans le formalisme de J. Lipman, on étend la loi de transformation généralisée à certaines localisations de $\mathbf{R}$. Dans la même veine que la loi de transformation on obtient des formules similaires lorsque l'hypothèse $g = Af$ est remplacée par : $g_1, \ldots, g_q$ sont dans la clôture intégrale de l'idéal (f). On donne ensuite une amélioration de la formule des transporteurs issue de l'article *Residue Calculus and Effective Nullstellensatz* de C. A. Berenstein et A. Yger ([B-Y$_3$]) .

Présentation du chapitre III

Soient $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre, et $f = (f_1, \ldots, f_q)$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ telle que le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ soit projectif de type fini. Nous envisageons dans ce paragraphe la question suivante: étant donné un élément $h \in \mathbf{R}$, existe t-il une bonne manière de représenter h par un développement en série selon les puissances de f?

Lorsque $\mathbf{R} = \mathcal{O}_q$ et $f = (f_1, \ldots, f_q)$ est une suite régulière de $\mathcal{O}_q$, la formule de représentation intégrale de Bergman-Weil permet d'obtenir la formule de Weil:

$$\forall h \in \mathcal{O}_q, \qquad h(z) = \sum_{(i_1,\ldots,i_q)\in(N^*)^q} \frac{1}{(2i\pi)^q} \int_{\Gamma_f} \frac{h(\zeta)\Delta(\zeta,z)d\zeta}{f_1(\zeta)^{i_1}\ldots f_q(\zeta)^{i_q}} f_1^{i_1-1}(z)\ldots f_q^{i_q-1}(z) ,$$

où Γ_f désigne le tube $\Gamma_f = \{\zeta \in B(0,\delta) : |f_i(\zeta)| = \epsilon_i,\ i = 1, \ldots, q\}$, orienté par la condition $d(\arg f_1) \wedge \cdots \wedge d(\arg f_q) > 0$ ([W], [A-Y]). La *formule de Weil* généralise donc en un sens la formule de Taylor ou de Cauchy, puisqu'elle permet de développer de manière canonique tout élément h de $\mathcal{O}_q$ suivant les puissances de f. Ce chapitre reprend et complète un article en collaboration avec M. Hickel (à paraître dans Manuscripta Mathematica), qui étend la formule de Weil au résidu algébrique défini via l'homologie de Hochschild.

On note $\hat{\mathbf{R}}$ le complété f-adique de $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^e = \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}$ l'algèbre enveloppante de $\mathbf{R}$, et $\widehat{\mathbf{R}^e}$ son complété pour la topologie $(f \otimes \mathbf{R} + \mathbf{R} \otimes f)$-adique. Le morphisme

$$\mathbf{R}^e \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$a \otimes b \longrightarrow ab$$

de noyau J, induit un morphisme $\widehat{\mathbf{R}^e} \longrightarrow \hat{\mathbf{R}}$ dont on note $\widehat{J}$ le noyau. Enfin pour $r_i \in \mathbf{R}$, on note $R_i = r_i \otimes 1 - 1 \otimes r_i \in \widehat{\mathbf{R}^e}$.

Théorème. *(Formule de Weil)*

Soient $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{R}$ *deux anneaux commutatifs unitaires nœtheriens,* $\mathbf{R}$ *étant muni d'une structure de* $\mathbf{A}$*-algèbre plate sur* $\mathbf{A}$*, et* $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *une suite quasi-régulière de* $\mathbf{R}$ *telle que le* $\mathbf{A}$*-module* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *soit projectif de type fini. On suppose qu'il existe une suite* $(r_1, \ldots, r_q)$ *de* $\mathbf{R}$ *telle que* $(R_1, \ldots, R_q)$ *soit une suite régulière de* $\widehat{\mathbf{R}^e}$ *qui engendre* $\widehat{J}$*.*

Soient alors des éléments $a_{i,j} \in \widehat{\mathbf{R}^e}$ *tels que:*

$$1 \otimes f_i - f_i \otimes 1 = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j} R_j$$

et $\Delta = \det(a_{i,j}) \in \widehat{\mathbf{R}^e}$*.*

Pour tout $h \in \mathbf{R}$*, on a dans* $\hat{\mathbf{R}}$ *l'égalité:*

$$h = \sum_{(i_1,\ldots,i_q)\in(N^*)^q} \mathrm{Res}_{\hat{\mathbf{R}}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta h \, dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \\ f_1^{i_1}, \ldots, f_q^{i_q} \end{bmatrix} f_1^{i_1-1} \ldots f_q^{i_q-1}$$

Cette formule s'applique à de nombreuses situations dont on donnera divers exemples. Dans le cas polynomial, on caractérisera la finitude de la formule de Weil. Plus précisément:

Proposition.

Soient $\mathbf{A}$ *un anneau commutatif nœthérien, et* $f(Z) = (f_1(Z), \ldots, f_q(Z))$ *une suite de polynômes de* $\mathbf{A}[Z_1, \ldots, Z_q]$ *telle que* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{A}[Z]}{(f(Z))}$ *soit un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini. On considère des éléments* $a_{i,j}(Z,T) \in \mathbf{A}[Z,T]$ *tels que*

$$f_i(T) - f_i(Z) = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}(Z,T)(T_j - Z_j) \ ,$$

on note $\Delta(Z,T) = \det(a_{i,j}(Z,T)) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^q} T^\alpha J_\alpha(Z)$*, et* I *la famille finie* $I = \{\alpha \in \mathbb{N}^q \mid J_\alpha(T) \neq 0\}$*.*

Les assertions suivantes sont équivalentes:

i) $\mathbf{A}[Z]$ *est un* $\mathbf{A}[f(Z)]$*-module de type fini.*

ii) Pour tout polynôme $h(Z) \in \mathbf{A}[Z]$*, la formule de Weil est finie: il existe un entier* M_h *tel que:*

$$h(Z) = \sum_{\substack{i=(i_1,\ldots,i_q)\in(N^*)^q \\ |i|\leq M_h}} \mathrm{Res}_{\mathbf{A}[T]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta(Z,T)h(T) \, dT_1 \wedge \cdots \wedge dT_q \\ f_1^{i_1}(T), \ldots, f_q^{i_q}(T) \end{bmatrix} f_1^{i_1-1}(Z) \ldots f_q^{i_q-1}(Z) \ .$$

iii) Pour chaque élément de la famille finie $\{Z_j \ \ (j = 1, \ldots, q); \ J_\alpha(Z)J_\beta(Z) \ \ (\alpha, \beta \in I)\}$*, la formule de Weil est finie.*

Dans le cas des séries convergentes, la proposition suivante jointe au théorème, donne une preuve algébrique de la formule de Weil classique.

Proposition.
Soient les anneaux des séries convergentes $\mathbf{A} = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_m\} = \mathbb{C}\{x\}$, $\mathbf{R} = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_m\, y_1, \dots, y_q\} = \mathbb{C}\{x, y\}$, *et* $f = (f_1(x,y), \dots, f_q(x,y))$ *une suite régulière de* $\mathbb{C}\{x,y\}$ *telle que* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbb{C}\{x,y\}}{f.\mathbb{C}\{x,y\}}$ *soit un* $\mathbb{C}\{x\}$*-module projectif de type fini. On note* $a_{i,j}(x,y,z) \in \mathbb{C}\{x,y,z\}$ *des éléments tels que:*

$$\begin{cases} f_i(x,y) - f_i(x,z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} a_{i,j}(x,y,z)(y_j - z_j) & (i = 1, \dots, q) \\ \Delta(x,y,z) = \det(a_{i,j}(x,y,z)) \ . \end{cases}$$

Alors pour tout $g(x,y) \in \mathbb{C}\{x,y\}$*:*

$$g(x,z) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_q)\in(\mathbb{N}^*)^q} \mathrm{Res}_{\mathbb{C}\{x,y\}/\mathbb{C}\{x\}} \begin{bmatrix} g(x,y)\,\Delta(x,y,z)\ \mathrm{d}\,y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,y_q \\ f_1^{\alpha_1}(x,y), \dots, f_q^{\alpha_q}(x,y) \end{bmatrix} f^{\alpha-\underline{1}}(x,z) \ ,$$

la convergence étant uniforme sur une base de voisinages compacts de l'origine.

Présentation du chapitre IV

Lorsque $\mathbf{A}$ est un anneau nœthérien, et $f = (f_1(Z), \dots, f_q(Z))$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{A}[Z_1, \dots, Z_q]$ telle que $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{A}[Z]}{(f(Z))}$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini et $\mathbf{A}[Z]$ un $\mathbf{A}[f(Z)]$-module de type fini, pour tout $h(Z) \in \mathbf{A}[Z]$ la formule de Weil contient un nombre fini de termes. En particulier lorsque $h(Z) \in f\mathbf{A}[Z]$, elle fournit des polynômes $g_j(Z)$ tels que

$$h(Z) = \sum_{j=1}^{q} g_j(Z) f_j(Z) \ .$$

On donnera une borne sur le degré des polynômes $g_j(Z)$ qui ne dépend que de $k = \deg(h(Z))$, q (nombre de variables), $D = \max_{1\le i\le q}(\deg(f_i(Z))$, et d'un entier M défini en se donnant pour chaque Z_i une relation de dépendance intégrale sur $\mathbf{A}[f]$. On montrera:

Proposition.
Soient $\mathbf{A}$ *un anneau nœthérien, et* $f = (f_1(Z), \dots, f_q(Z))$ *une suite quasi-régulière de* $\mathbf{A}[Z_1, \dots, Z_q]$ *telle que* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{A}[Z]}{(f(Z))}$ *soit un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini et* $\mathbf{A}[Z]$ *un* $\mathbf{A}[f(Z)]$*-module de type fini*

Pour $k \in \mathbb{N}$, *et* $h(Z) \in f(Z)\mathbf{A}[Z]$ *un polynôme de degré au plus* k, *il existe des polynômes* $g_j(Z)$ *tels que*

$$h(Z) = \sum_{j=1}^{q} g_j(Z) f_j(Z) \ ,$$

et

$$\deg(g_j(Z)) \leq D\,(K(f,k)+q-1)-q\ ,$$

où $K(f,k) = M\,(q(DM-1)+k)$.

Lorsque $\mathbf{A}$ *est un anneau nœthérien intègre, la majoration précédente permet d'obtenir*

$$\deg(g_j(Z)) \leq kD^q + qD^{2q}\ .$$

Dans le paragraphe 2, on montre comment la formule de Weil permet d'obtenir une généralisation d'un théorème d'Euler-Jacobi dont une preuve a précédemment été donnée dans [K-K].

Théorème.

Soient $\mathbf{A}$ *un anneau nœthérien,* $\mathbf{R} = \mathbf{A}[Z_1, \ldots, Z_q]$*,* $f(Z) = \{f_1(Z), \ldots, f_q(Z)\}$ *une suite quasi-régulière de polynômes de* $\mathbf{R}$ *de degré* $d_1, \ldots, d_q$ *telle que* $\dfrac{\mathbf{R}}{(f(Z))}$ *soit un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini, et* $k = (k_1, \ldots, k_q) \in (\mathbb{N}^*)^q$*. On note* $h_i(Z)$ *la partie homogène de degré* d_i *de* $f_i(Z)$*. On suppose que* $h(Z) = \{h_1(Z), \ldots, h_q(Z)\}$ *est une suite quasi-régulière de* $\mathbf{R}$*, et que* $\dfrac{\mathbf{R}}{(h(Z))}$ *un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini. Alors:*

i) pour tout polynôme $q(Z)$ *de degré au plus* $\sum_{i=1}^q k_i d_i - q - 1$ *on a*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} q(Z)dZ \\ f_1^{k_1}(Z), \ldots, f_q^{k_q}(Z) \end{bmatrix} = 0\ ,$$

ii) pour tout polynôme $q(Z)$ *de degré* $\sum_{i=1}^q k_i d_i - q$ *on a*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} q(Z)dZ \\ f_1^{k_1}(Z), \ldots, f_q^{k_q}(Z) \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathcal{Q}(Z)dZ \\ h_1^{k_1}(Z), \ldots, h_q^{k_q}(Z) \end{bmatrix}\ ,$$

où $\mathcal{Q}(Z)$ *est la partie homogène de degré* $\sum_{i=1}^q k_i d_i - q$ *de* $q(Z)$*.*

△△△

Les suites quasi-régulières jouant un rôle clé dans l'approche algébrique des résidus, l'appendice de cette thèse est consacré à quelques rappels sur cette notion.

CHAPITRE I

DIFFÉRENTES APPROCHES DU RÉSIDU

Ce chapitre présente et compare deux approches algébriques formelles des résidus, c'est-à-dire indépendantes de la dualité globale introduite par *A. Grothendieck* et développée dans [Ha]. Ces deux approches utilisent uniquement des résultats de la théorie des anneaux, et pour l'une d'entre elles des résultats d'algèbre homologique. Dans les deux cas on considère $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre commutative unitaire, et $f = (f_1, \dots, f_q)$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ tel que $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{(f)}$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini. Cette situation est par exemple réalisée pour le résidu intégral dans le cas des intersections complètes de dimension zéro. Le paragraphe 1 de ce chapitre est consacré à quelques rappels sur le résidu intégral.

L'une de ces approches algébriques, présentée dans le paragraphe 2, est issue de travaux de Scheja et Storch et une présentation en est faite par *E. Kunz* dans [Ku2]. Elle repose sur l'étude du $\mathbf{P}$-module $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$ et elle conduit au Résidu défini via les algèbres de Gorenstein. Elle nécessite que les anneaux qui interviennent soient nœthériens, et que $\mathbf{R}$ soit une $\mathbf{A}$-algèbre plate. Elle satisfait les propriétés usuellement appelées: non-dégénérescence, loi de transformation, changement de base, loi de transitivité.

L'autre, présentée dans le paragraphe 3, a été introduite par *J. Lipman* dans [L]. Elle repose sur l'homologie de *Hochschild* et conduit au Résidu défini via l'homologie de Hochschild. Elle permet d'obtenir des formules explicites qui fournissent les résidus par rapport à toutes les puissances de f. Elle satisfait les propriétés de loi de transformation, changement de base, loi de transitivité.

Dans le paragraphe 4 on montre que ces deux approches permettent d'obtenir le résidu intégral. De plus on montre que le Résidu défini via l'homologie de Hochschild donne le même résultat que le Résidu défini via les algèbres de Gorenstein, lorsque les hypothèses d'existence sont satisfaites.

Les paragraphes 2 et 3 sont des expositions de deux approches algébriques différentes des résidus. Ils ont été rédigés pour cerner au plus près leurs similitudes et leurs différences. Lorsque les preuves des propositions énoncées dans ces paragraphes sont consignées dans des ouvrages, on donne uniquement les références exactes de ces preuves.

§1. Le résidu intégral dans le cas des intersections complètes

Lorsque $h(z) = \dfrac{g(z)}{f(z)}$ est une fonction méromorphe définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ qui admet 0 pour pôle d'ordre $k > 0$, on définit le résidu local de h en 0 par:

$$\mathrm{Res}_{(0)}(h) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B(0;r)} \frac{g(z)}{f(z)} dz \ , \tag{1}$$

où $r > 0$ et tel que $\partial B(0;r) \subset U$, et 0 est le seul pôle de h dans $B(0;r)$.

f étant une fonction holomorphe qui admet 0 pour zéro d'ordre k, on peut écrire, sur un voisinage de 0,

$$f(z) = z^k u(z)$$

où u est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas. L'application:

$$z \longrightarrow (u(z))^{1/k}.z$$

définit un difféomorphisme sur un voisinage $V \subset U$ de 0. Le cycle $\Gamma_{f,\epsilon} = \{z \in V : |f(z)| = \epsilon\}$ orienté par la condition $d(argf) > 0$, et où $\epsilon > 0$ est un réel suffisamment petit pour que $\Gamma_{f,\epsilon} \Subset V$, est homologue à un cycle de support $\partial B(0;r)$. Par conséquent:

$$\mathrm{Res}_{(0)}(h) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{f,\epsilon}} \frac{g(z)}{f(z)} dz \ . \tag{2}$$

Le résidu local défini sur $\mathcal{O}_q$, l'anneau des germes en 0 des fonctions holomorphes définies sur $\mathbb{C}^q$, est une généralisation de la formule 2. Cette notion de résidu local permet de définir le résidu global sur l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_q]$. Dans ce paragraphe, on rappelle ces deux notions et les propriétés de base qui leur sont attachées.

1.1. Le résidu local.

Soit $f = (f_1, \ldots, f_q)$ une suite de fonctions holomorphes définies sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}^q$, et qui admettent sur la boule $\overline{B(0;r)} \subset U$ l'origine comme seul zéro commun. Pour $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_q) \in (\mathbb{R}^{+*})^q$, on pose

$$\Gamma_{f,\epsilon} = \{\zeta \in B(0,r) : |f_i(\zeta)| = \epsilon_i, i = 1, \ldots, q\} \ , \tag{3}$$

où les réels $\epsilon_i > 0$ sont suffisamment petits pour que $\Gamma_{f,\epsilon} \Subset B(0;r)$. D'après le théorème de Sard, l'ensemble des valeurs critiques de l'application

$$(|f_1|^2, \ldots, |f_q|^2) : U \longrightarrow (\mathbb{R}^{+*})^q \tag{4}$$

est de mesure nulle dans $(\mathbb{R}^{+*})^q$. Par conséquent, pour presque tout ϵ, $\Gamma_{f,\epsilon}$ est une variété réelle de dimension q, lisse, compacte; on peut l'orienter par la condition

$d(\arg f_1) \wedge \cdots \wedge d(\arg f_q) > 0$. Soit h une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{B(0;r)}$. La forme différentielle

$$\frac{h(z)dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_q}{f_1(z) \ldots f_q(z)} \tag{5}$$

est fermée sur $B(0;r) \setminus \{z : f_1(z) \ldots f_q(z) = 0\}$. En appliquant le théorème de Stokes et le théorème de Sard, on montre que

$$\int_{\Gamma_f} \frac{h(z)dz}{f_1(z) \ldots f_n(z)} \tag{6}$$

ne dépend pas du choix de $\epsilon \in (\mathbb{R}^{+*})^q$, hors d'un ensemble de mesure nulle.

Ces remarques permettent de donner la définition suivante:

Définition 1.1.1. *(Résidu local.)*
Soient $f = (f_1, \ldots, f_q)$ une suite de $\mathcal{O}_q$ qui admet 0 pour zéro isolé, $h \in \mathcal{O}_q$, et $r > 0$ un réel suffisamment petit de façon que f et h admettent des représentants sur un voisinage de $\overline{B(0;r)}$ que l'on note aussi f et h. On définit le résidu local de h, par rapport au germe de f en 0, par:

$$\mathrm{Res}_{(f,0)}(h) = \frac{1}{(2i\pi)^q} \int_{\Gamma_f} \frac{h(z)dz}{f_1(z) \ldots f_q(z)} \quad . \tag{7}$$

où Γ_f désigne la variété réelle de dimension q, lisse, compacte

$$\Gamma_f = \{\zeta \in B(0,r) : |f_i(\zeta)| = \epsilon_i, i = 1, \ldots, q\}$$

orientée par la condition $d(\arg f_1) \wedge \cdots \wedge d(\arg f_q) > 0$.

Remarque 1.1.2.

De par la définition de l'orientation du cycle Γ_f, la forme linéaire $\mathrm{Res}_{(f,0)}$ est alternée par rapport à $f = (f_1, \ldots, f_q)$. Si δ est une permutation de $\{1, \ldots, q\}$ de signature $|\delta|$, $\mathrm{Res}_{((f_{\delta(1)}, \ldots, f_{\delta(q)}),0)} = (-1)^{|\delta|} \mathrm{Res}_{((f_1, \ldots, f_q),0)}$.

1.2. Le résidu global.

Lorsque $P = (P_1, \ldots, P_q)$ est une suite de polynômes de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_q]$ dont la variété des zéros $V(P)$ est finie et non vide, on peut, pour chaque point $\alpha \in V(P)$, définir la forme linéaire $\mathrm{Res}_{(P,\alpha)}$

Définition 1.2.1. *(Résidu global.)*
Soient $P = (P_1, \ldots, P_q)$ une suite de polynômes de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_q]$ qui définit une variété finie et non vide de $\mathbb{C}^q$, et $Q \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_q]$. On définit le résidu global de Q par rapport à P par:

$$\mathrm{Res}_P(Q) = \sum_{\alpha \in V(P)} \mathrm{Res}_{(P,\alpha)}(Q) \quad . \tag{8}$$

1.3. Propriétés de base du résidu intégral.

La propriété de non-dégénérescence du résidu intégral et la loi de transformation que l'on énonce ci-dessous dans le cas du résidu local, restent valables dans le cas du résidu global.

Proposition 1.3.1. *(non-dégénérescence du résidu.)*
Soient $f = (f_1, \dots, f_q)$ une suite de $\mathcal{O}_q$ qui admet 0 pour zéro isolé, $I(f)$ l'idéal de $\mathcal{O}_q$ qu'elle engendre, $h \in \mathcal{O}_q$.
$h \in I(f)$ si et seulement si:

$$\forall g \in \mathcal{O}_q, \qquad \mathrm{Res}_{(f,0)}(g.h) = 0 \ . \tag{9}$$

Proposition 1.3.2. *(loi de transformation.)*
Soient $f = (f_1, \dots, f_q)$ et $g = (g_1, \dots, g_q)$ deux suites de $\mathcal{O}_q$ qui admettent 0 pour zéro isolé. On suppose qu'il existe une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_q)$ telle que

$$g = Af \ , \tag{10}$$

alors pour tout $h \in \mathcal{O}_q$, on a:

$$\mathrm{Res}_{(f,0)}(h) = \mathrm{Res}_{(g,0)}(\det(a_{i,j})\, g) \ . \tag{11}$$

Exemples 1.3.3.

a) On considère dans $\mathcal{O}_q$, la suite $f = (f_1, \dots, f_q)$ définie par

$$f_i(z) = z_i^{n_i} \qquad (1 \le i \le q \ ; \ n_i > 0)$$

Pour $h(z) = \sum_{\beta=(\beta_1,\dots,\beta_q)\in\mathbb{N}^q} b_\beta z^\beta \in \mathcal{O}_q$ on a:

$$\mathrm{Res}_{(f,0)}(h) = \frac{1}{(2i\pi)^q} \int_{\substack{|z_1|=\epsilon_1 \\ \dots \\ |z_q|=\epsilon_q}} \frac{h(z)dz}{f_1(z)\dots f_q(z)} \quad .$$

D'après la formule de Cauchy, par dérivation, on obtient:

$$\mathrm{Res}_{(f,0)}(h) = b_{n_1-1,\dots,n_q-1} \ . \tag{12}$$

b) On considère dans $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_q]$ la suite $P = (P_1, \dots, P_q)$ définie par:

$$P_i(X) = a_{i,n_i} X_i^{n_i} + a_{i,n_i-1} X_i^{n_i-1} + \dots + a_{i,0} \qquad (1 \le i \le q \,;\, 0 < n_i \,;\, a_{i,n_i} \neq 0) \ .$$

Pour $X^\beta = X_1^{\beta_1} \dots X_q^{\beta_q}$ on a:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_P(X^\beta) &= \frac{1}{(2i\pi)^q} \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots\alpha_q)\in V(P)} \int_{\Gamma_{P,\alpha,\epsilon}} \frac{X_1^{\beta_1}\dots X_q^{\beta_q}}{P_1(X)\dots P_q(X)} \mathrm{d}\, X_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\, X_q \\
&= \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots\alpha_q)\in V(P)} (\prod_{i=1}^q \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{P_i,\alpha_i,\epsilon_i}} \frac{X_i^{\beta_i}}{P_i(X)} \mathrm{d}\, X_i) \\
&= \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots\alpha_q)\in V(P)} (\prod_{i=1}^q \frac{1}{2i\pi} \int_{|X_i-\alpha_i|=\epsilon_i} \frac{X_i^{\beta_i}}{P_i(X)} \mathrm{d}\, X_i) \\
&= \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots\alpha_q)\in V(P)} \frac{1}{(2i\pi)^q} \int_{\substack{|X_1-\alpha_1|=\epsilon_1 \\ \dots \\ |X_q-\alpha_q|=\epsilon_q}} \frac{X_1^{\beta_1}\dots X_q^{\beta_q}}{P_1(X)\dots P_q(X)} \mathrm{d}\, X_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\, X_q
\end{aligned}$$

Pour des réels $R_1, \ldots, R_q$ suffisamment grands, en appliquant le théorème de Stokes on obtient:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_P(X^\beta) &= \frac{1}{(2i\pi)^q} \int_{\substack{|X_1|=R_1 \\ \cdots \\ |X_q|=R_q}} \frac{X_1^{\beta_1} \ldots X_q^{\beta_q}}{P_1(X) \ldots P_q(X)} \,\mathrm{d}\, X_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, X_q \\
&= \frac{1}{(2i\pi)^q} \int_{|X_1|=R_1} \frac{X_1^{\beta_1}}{P_1(X)} \,\mathrm{d}\, X_1 \cdots \int_{|X_q|=R_q} \frac{X_q^{\beta_q}}{P_q(X)} \,\mathrm{d}\, X_q) \\
&= \quad \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \neq (n_1-1, \ldots, n_q-1) \\ \dfrac{1}{a_{1,n_1} \ldots a_{q,n_q}} & \text{si } \beta = (n_1-1, \ldots, n_q-1) \end{cases} .
\end{aligned}$$

Par conséquent si $Q(X) = \sum_{\substack{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_q) \\ 0 \leq \beta_i \leq n_i - 1}} b_\beta X^\beta$, on a:

$$\operatorname{Res}_P(Q) = \frac{b_{n_1-1,\ldots,n_q-1}}{a_{1,n_1} \ldots a_{q,n_q}}. \tag{13}$$

Cet exemple sera repris dans les paragraphes 2 et 3 pour illustrer les approches algébriques des résidus. Ce calcul sera utilisé dans plusieurs applications (chapitres III et IV).

§2. Traces dans les algèbres de Gorenstein et résidus

Ce paragraphe fournit, via des résultats sur les algèbres de Gorenstein, une définition fonctionnelle du résidu que l'on appellera résidu via les algèbres de Gorenstein. Les définitions et théorèmes donnés ci-dessous sont issus de l'appendice [Ku$_2$]. Les propositions 2.2.2 et 2.2.3 sont dues à Scheja et Storch ([S-S]).

Tous les anneaux considérés sont supposés unitaires, commutatifs et nœthériens.

2.1. Algèbres de Gorenstein.

Une généralisation de la notion d'anneau de Gorenstein, que l'on rappelle ci-dessous, est celle d'algèbre de Gorenstein.

Définition 2.1.1. Anneau de Cohen-Macaulay.
Soit $(\mathbf{A}, \mathfrak{m})$ *un anneau local nœthérien.* $\mathbf{A}$ *est un anneau de Cohen-Macaulay si* $dim(\mathbf{A}) = d(\mathbf{A})$ *où* $dim(\mathbf{A})$ *désigne la dimension de Krull de* $\mathbf{A}$ *et* $d(\mathbf{A})$*, la profondeur de* $\mathbf{A}$ *i.e: la longueur maximale d'une suite régulière. Un anneau commutatif nœthérien* $\mathbf{A}$ *est Cohen-Macaulay si pour tout idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{A}_\mathfrak{m}$ *est un anneau local de Cohen-Macaulay.*

Définition 2.1.2. Anneau de Gorenstein.
Soient $(\mathbf{A}, \mathfrak{m})$ *un anneau local de Cohen-Macaulay de profondeur* d*,* $(a_1, \ldots, a_d)$ *une suite régulière de* $\mathbf{A}$ *et* $\mathfrak{q}$ *l'idéal primaire qu'elle engendre.* $\sigma(\mathbf{A}/\mathfrak{q}) = \{\bar{r} \in \mathbf{A}/\mathfrak{q} \; |\mathfrak{m}.\bar{r} = 0\}$ *est un* $\dfrac{\mathbf{A}}{\mathfrak{m}}$ *espace vectoriel de dimension finie* r*.* r *est indépendant de la suite régulière* $(a_1, \ldots, a_d)$ *et s'appelle le type de l'anneau Cohen-Macaulay* $(\mathbf{A}, \mathfrak{m})$*. Si* $r = 1$*,* $(\mathbf{A}, \mathfrak{m})$ *s'appelle un anneau local de Gorenstein. Un anneau nœthérien* $\mathbf{A}$ *est Gorenstein si pour tout idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{A}_\mathfrak{m}$ *est un anneau local de Gorenstein.*

Définition 2.1.3. Algèbre de Gorenstein.
Soient $\mathbf{A}$ *un anneau,* $\mathbf{P}$ *un anneau muni d'une structure de* $\mathbf{A}$*-algèbre plate sur* $\mathbf{A}$*.* $\mathbf{P}$ *est une* $\mathbf{A}$*-algèbre de Gorenstein si pour tout* $\mathfrak{p} \in Spec(\mathbf{P})$ *,* $\dfrac{\mathbf{P}_\mathfrak{p}}{(\mathfrak{p} \cap \mathbf{A})\mathbf{P}_\mathfrak{p}}$ *est un anneau local de Gorenstein.*

Soit $\mathbf{P}$ une $\mathbf{A}$-algèbre. On munit $\hom_\mathbf{A}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$ d'une structure de $\mathbf{A}$-module à gauche en posant pour tout $g \in \hom_\mathbf{A}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$ et $p, x \in \mathbf{P}$:

$$(p.g)(x) = g(px) \ . \tag{1}$$

$\mathbf{P} \otimes_\mathbf{A} \mathbf{P}$ peut être muni de deux structures de $\mathbf{P}$-module: la multiplication par un élément de $\mathbf{P}$ agissant soit par multiplication sur le facteur droit, soit par multiplication sur le facteur gauche des éléments de $\mathbf{P} \otimes_\mathbf{A} \mathbf{P}$. Soit I le noyau de

$$\begin{aligned} \mu : \mathbf{P} \otimes_\mathbf{A} \mathbf{P} &\longrightarrow \mathbf{P} \\ x \otimes y &\longrightarrow xy \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Sur $\mathrm{Ann}_{\mathbf{P} \otimes_\mathbf{A} \mathbf{P}}(I)$, les deux structures de $\mathbf{P}$-module coïncident. On a la proposition suivante:

Proposition 2.1.4.
Soient $\mathbf{A}$ *un anneau et* $\mathbf{P}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre finie, plate sur* $\mathbf{A}$*.*
i) le morphisme $\Psi : \mathbf{P} \otimes_\mathbf{A} \mathbf{P} \longrightarrow \hom_\mathbf{A}(\hom_\mathbf{A}(\mathbf{P}, \mathbf{A}), \mathbf{P})$

$$x \otimes y \longrightarrow \Psi(x \otimes y)$$

où $\Psi(x \otimes y) : \hom_\mathbf{A}(\mathbf{P}, \mathbf{A}) \longrightarrow \mathbf{P}$

$$l^* \longrightarrow l^*(y)x$$

est un isomorphisme de $\mathbf{A}$*-module.*
ii) Ψ *induit un isomorphisme de* $\mathbf{P}$*-module:*

$$\Psi' : \mathrm{Ann}_{\mathbf{P} \otimes_\mathbf{A} \mathbf{P}}(I) \longrightarrow \hom_\mathbf{P}(\hom_\mathbf{A}(\mathbf{P}, \mathbf{A}), \mathbf{P})$$

où I *est le noyau de* $\mu : \mathbf{P} \otimes_\mathbf{A} \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{P}$

Preuve de la proposition 2.1.4. **P** est un **A**-module projectif. En effet, **A** étant nœthérien, tout **A**-module de type fini admet une présentation finie ([B_2] chap.1), et tout module plat qui admet une présentation finie est projectif ([B_2] chap.2). **P** étant un **A**-module projectif, la preuve de i) est donnée dans [B_1] chap.2 §4. La preuve de ii) est donnée dans [Ku_2] F9 p.363. □

Proposition 2.1.5. *(Propriétés caractéristiques des algèbres de Gorenstein)*
Soient $\mathbf{A}$ *un anneau et* $\mathbf{P}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre finie, plate sur* $\mathbf{A}$*. Les assertions suivantes sont équivalentes:*
i) $\mathbf{P}$ *est une* $\mathbf{A}$*-algèbre de Gorenstein.*
ii) $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$ *est un* $\mathbf{P}$*-module projectif de rang 1.*
iii) $\hom_{\mathbf{P}}(\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A}), \mathbf{P})$ *est un* $\mathbf{P}$*-module projectif de rang 1.*
iv)$\mathrm{Ann}_{\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}}(I)$ *est un* $\mathbf{P}$*-module projectif de rang 1.*

Preuve de la proposition 2.1.5.
La preuve de $i) \Leftrightarrow ii)$ est donnée dans [Ku_2] E16 p.352.
$ii) \Leftrightarrow iii)$ car les modules projectifs de type fini sont réflexifs (cf. [B1], II,§2 n^0 7 cor.4).
$iii) \Leftrightarrow iv)$ d'après la proposition 2.1.4, les $\mathbf{P}$-modules $\hom_{\mathbf{P}}(\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A}), \mathbf{P})$ et $\mathrm{Ann}_{\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}}(I)$ sont isomorphes. □

Lorsque, dans la proposition précédente, on remplace **P**-module projectif de rang 1 par **P**-module libre de rang 1, les assertions ii), iii) et iv) sont équivalentes. Ceci conduit à donner la définition suivante:

Définition 2.1.6. <u>Traces dans les algèbres de Gorenstein</u>.
Soit $\mathbf{P}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre de Gorenstein telle que* $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$ *est un* $\mathbf{P}$*-module libre de rang 1. On appelle trace de la* $\mathbf{A}$*-algèbre* $\mathbf{P}$ *toute base* $\{\sigma\}$ *du* $\mathbf{P}$*-module* $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$.
Si σ *est une trace de la* $\mathbf{A}$*-algèbre* $\mathbf{P}$*, on note* Δ_σ *l'unique élément de* $\mathrm{Ann}_{\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}}(I)$ *tel que* $\Psi(\Delta_\sigma)(\sigma) = 1$.

Cette définition est donnée dans [Ku_2], appendice F §b. $\{\Psi(\Delta_\sigma)\}$ est la base du $\mathbf{P}$-module $\hom_{\mathbf{P}}(\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A}), \mathbf{P})$, duale de la base $\{\sigma\}$ du $\mathbf{P}$-module $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$. On a une bijection entre les bases du $\mathbf{P}$-module $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$ et celles du $\mathbf{P}$-module $\mathrm{Ann}_{\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}}(I)$. Si $\{\sigma\}$ est une base de $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$ et $\sigma^* \in \hom_{\mathbf{P}}(\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A}), \mathbf{P})$ sa base duale, $\{\Delta_\sigma\}$ tel que $\Psi(\Delta_\sigma) = \sigma^*$ est une base de $\mathrm{Ann}_{\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}}(I)$.
En particulier, lorsque $\{\Delta\}$ est une base du $\mathbf{P}$-module $\mathrm{Ann}_{\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}}(I)$, il existe un unique élément $\tau \in \hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$ tel que:

$$\Psi(\Delta)(\tau) = 1 \ , \tag{3}$$

et τ est une base du $\mathbf{P}$-module $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$.

La proposition suivante établit le lien entre les traces d'une algèbre de *Gorenstein* et la trace canonique.

Définition 2.1.7. <u>Trace canonique dans une algèbre</u>.
Soient $\mathbf{P}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre finie projective, et* $\mathrm{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}} \in \hom_{\mathbf{A}}(\mathrm{End}(\mathbf{P}), \mathbf{A})$ *l'opérateur trace défini sur End(***P***) ([*B_1*] chap.3 §4). Pour* $s \in \mathbf{P}$*, on note* $m_s \in$*End(***P***) l'endomorphisme multiplication par* s *et* $\sigma_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}(s) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}(m_s)$ *. L'opérateur* $\sigma_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}$ *s'appelle la trace canonique de la* $\mathbf{A}$*-algèbre* $\mathbf{P}$.

Proposition 2.1.8.
Si $\mathbf{P}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre de Gorenstein telle que* $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P},\mathbf{A})$ *est un* $\mathbf{P}$*-module libre de rang 1, et* $\{\sigma\}$ *une trace de la* $\mathbf{A}$*-algèbre* $\mathbf{P}$*, alors:*

$$\sigma_{\mathbf{P}/\mathbf{A}} = \mu(\Delta_\sigma).\sigma \tag{4}$$

où $\mu : \mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{P}$

$\qquad x\otimes y \longrightarrow xy$

La preuve de cette proposition est donnée dans [Ku$_2$] F12 p.365. □

On fera appel, lors de la loi de transitivité du résidu de *Gorenstein*, au résultat suivant (cf. prop. F.17, §F, appendice [Ku2]):

Proposition 2.1.9.
Soient $\mathbf{P}/\mathbf{A}$ *une algèbre finie et plate de Gorenstein qui admet pour trace* $\tau \in \hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P},\mathbf{A})$*, et* $\mathbf{Q}/\mathbf{P}$ *une algèbre finie et plate de Gorenstein qui admet pour trace* $\sigma \in \hom_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q},\mathbf{P})$*. On note* $I = \ker(\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}\to\mathbf{P})$*,* $J = \ker(\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{P}}\mathbf{Q}\to\mathbf{Q})$ $K = \ker(\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{Q}\to\mathbf{Q})$*,* Δ_τ *l'élément de* $\mathrm{Ann}_{\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}}(I)$ *associé à* τ*,* Δ_σ *l'élément de* $\mathrm{Ann}_{\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{P}}\mathbf{Q}}(J)$ *associé à* σ*, et* $\tilde{\Delta}_\sigma \in \mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{Q}$ *un représentant de* Δ_σ*.*
Alors $\mathbf{Q}/\mathbf{A}$ *est une algèbre de Gorenstein, et*
a) $\tau\circ\sigma$ *est une trace de* $\mathbf{Q}/\mathbf{A}$*.*
b) $\Delta_\tau\tilde{\Delta}_\sigma \in \mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{Q}$ *est l'élément associé à* $\tau\circ\sigma$*.*

2.2. Résidu via les algèbres de Gorenstein.

Soient $\mathbf{A}$ un anneau, $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre, et $f = (f_1,\dots,f_q)$ une suite de $\mathbf{R}$ quasi-régulière telle que le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ soit projectif de type fini. On suppose de plus que le noyau de:

$$\tilde{\mu} : \mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{P}$$
$$\bar{x}\otimes y \longrightarrow \bar{x}\bar{y}$$

est engendré par une suite quasi-régulière $\zeta = (\zeta_1,\dots,\zeta_q)$. On note, comme dans la proposition 2.1.4, I le noyau de $\mu : \mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{P}$ et $\Psi' : \mathrm{Ann}_{\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}}(I) \longrightarrow \hom_{\mathbf{P}}(\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P},\mathbf{A}),\mathbf{P})$. Ce paragraphe montre que $\mathrm{Ann}_{\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}}(I)$ est un $\mathbf{P}$-module libre de rang 1. On construit, à partir des suites f et ζ, un élément $\Delta_\zeta^f \in \mathrm{Ann}_{\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}}(I)$, et un élément $\tau_f^\zeta \in \hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P},\mathbf{A})$ tels que:

$$\Psi'(\Delta_\zeta^f)(\tau_f^\zeta) = 1$$

On appellera Δ_ζ^f le Bezoutien de f par rapport à ζ, et pour $h\in\mathbf{R}$, $\tau_f^\zeta(\bar{h})$ le résidu (via les algèbres de Gorenstein) de h par rapport à f et ζ. La démarche repose en partie sur le théorème de Wiebe.

Proposition 2.2.1. *Théorème de Wiebe.*

Soient $\mathbf{S}$ *un anneau,* $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_q)$ *et* $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_q)$ *deux suites quasi-régulières de* $\mathbf{S}$ *telles que, pour* $1 \leq i \leq q$, $\eta_i = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}\zeta_j$. *En notant* $\Delta = \det(a_{i,j})$, $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{S}}{\eta\mathbf{S}}$, *et* $\tilde{\rho}$ *la surjection canonique de* $\mathbf{S}$ *dans* $\mathbf{T}$*, on a:*

a) $\tilde{\rho}(\Delta)$ *est indépendant du choix des coefficients* $a_{i,j}$.

b) $\mathrm{Ann}_{\mathbf{T}}(\tilde{\rho}(\Delta)\mathbf{T}) = \tilde{\rho}(\zeta)\mathbf{T}$

c) $\mathrm{Ann}_{\mathbf{T}}(\tilde{\rho}(\zeta)\mathbf{T}) = \tilde{\rho}(\Delta)\mathbf{T}$

La preuve de cette proposition est donnée dans [Ku$_2$] E19 ,E21 p.356. □

Proposition 2.2.2.

Soient $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{R}$ *deux anneaux,* $\mathbf{R}$ *étant muni d'une structure de* $\mathbf{A}$*-algèbre plate sur* $\mathbf{A}$*, et* $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *une suite de* $\mathbf{R}$ *quasi-régulière telle que le* $\mathbf{A}$*-module* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *soit projectif de type fini. On note* J *le noyau de* $\tilde{\mu} : \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{P}$.

Alors, si l'idéal J *est engendré par une suite quasi-régulière* $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_q)$ *de* $\mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}$*,* $\mathbf{P}$ *est une* $\mathbf{A}$*-algèbre de Gorenstein et* $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$ *est un* $\mathbf{P}$ *module libre de rang 1.*

Preuve.

La suite $\eta = (1 \otimes f_1, \ldots, 1 \otimes f_q)$ est une suite quasi-régulière de $\mathbf{S} = \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}$. En effet, $\mathbf{R}$ étant une $\mathbf{A}$-algèbre plate, $\mathbf{S}$ est une $\mathbf{R}$-algèbre plate. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $\mathbf{S}$ qui contient η, et $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap \mathbf{R}$ l'image réciproque de $\mathfrak{m}$ par l'homomorphisme structural $\mathbf{R} \to \mathbf{S}$. $\mathbf{R}_{\mathfrak{n}}$ est un anneau local dont l'idéal maximal contient la suite régulière $(f_1, \ldots, f_q)$. Par abus de notation, on note de la même façon un élément de $\mathbf{R}$ et son image dans $\mathbf{R}_{\mathfrak{n}}$. Pour $1 \leq k < q$ l'homomorphisme:

$$\frac{\mathbf{R}_{\mathfrak{n}}}{(f_1, \ldots, f_{k-1})} \xrightarrow{\times f_k} \frac{\mathbf{R}_{\mathfrak{n}}}{(f_1, \ldots, f_{k-1})} \tag{5}$$

est injectif. Comme $\mathbf{S}_{\mathfrak{m}}$ est un $\mathbf{R}_{\mathfrak{n}}$-module plat, l'homomorphisme:

$$\mathbf{S}_{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathbf{R}_{\mathfrak{n}}} \frac{\mathbf{R}_{\mathfrak{n}}}{(f_1, \ldots, f_{k-1})} \xrightarrow{\times 1 \otimes f_k} \mathbf{S}_{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathbf{R}_{\mathfrak{n}}} \frac{\mathbf{R}_{\mathfrak{n}}}{(f_1, \ldots, f_{k-1})} \tag{6}$$

est injectif. Or $\mathbf{S}_{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathbf{R}_{\mathfrak{n}}} \dfrac{\mathbf{R}_{\mathfrak{n}}}{(f_1, \ldots, f_{k-1})} \simeq \dfrac{\mathbf{S}_{\mathfrak{m}}}{(1 \otimes f_1, \ldots, 1 \otimes f_{k-1})}$, ceci prouve que l'image de η dans $\mathbf{S}_{\mathfrak{m}}$ est une suite régulière, donc η est une suite quasi-régulière de $\mathbf{S}$.

Soient $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{S}}{\eta\mathbf{S}} = \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}$, et $\tilde{\rho} : \mathbf{S} \to \mathbf{T}$ la surjection canonique de $\mathbf{S}$ dans $\mathbf{T}$. Comme $1 \otimes f_i \in J$, il existe des éléments $a_{i,j} \in \mathbf{S}$ tels que:

$$1 \otimes f_i = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}\zeta_j \ . \tag{7}$$

On note $\tilde{\Delta}^f_\zeta = \det(a_{i,j})$, et $\Delta^f_\zeta = \tilde{\rho}(\tilde{\Delta}^f_\zeta)$. D'après le théorème de Wiebe, Δ^f_ζ ne dépend que des suites ζ et η et l'on a:

$$\mathrm{Ann}_{\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}}(\Delta^f_\zeta \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}) = \tilde{\rho}(\zeta)\mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P} \tag{8}$$

$$\mathrm{Ann}_{\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}}(\tilde{\rho}(\zeta)\mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}) = \Delta^f_\zeta \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P} \ . \tag{9}$$

On a les morphismes d'anneaux:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\mu}: \mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{P} & , & \tilde{\rho}: \mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P} & \text{et,} & \mu: \mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{P} \\ \bar{x}\otimes y \longrightarrow \bar{x}\bar{y} & & \bar{x}\otimes y \longrightarrow \bar{x}\otimes\rho(y) & & \bar{x}\otimes\bar{y} \longrightarrow \bar{x}.\bar{y} \ . \end{array}$$

$\tilde{\mu} = \mu\circ\tilde{\rho}$, comme le noyau J de $\tilde{\mu}$ est engendré par $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_q)$, le noyau I de μ est engendré par $\tilde{\rho}(\zeta)$:

$$\tilde{\rho}(\zeta)\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P} = \ker\mu = I \ . \tag{10}$$

Par conséquent, par (9):

$$\mathrm{Ann}_{\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}}(I) = \Delta_\zeta^f\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P} \ . \tag{11}$$

$\mathrm{Ann}_{\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}}(I)$ est muni d'une structure naturelle de $\mathbf{P}$-module à gauche définie par

$$x.(a\otimes b) = xa\otimes b = a\otimes bx \ .$$

Soit $m = \Delta_\zeta^f(\sum_{i=1}^k x_i\otimes y_i) \in \mathrm{Ann}_{\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}}(I)$. Comme

$$(\sum_{i=1}^k x_i\otimes y_i - \sum_{i=1}^k x_iy_i\otimes 1) \in I$$

on a par (11):

$$\Delta_\zeta^f(\sum_{i=1}^k x_i\otimes y_i - \sum_{i=1}^k x_iy_i\otimes 1) = 0 \ .$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \Delta_\zeta^f(\sum_{i=1}^k x_i\otimes y_i) &= \Delta_\zeta^f(\sum_{i=1}^k x_iy_i\otimes 1) \\ &= (\sum_{i=1}^k x_iy_i).\Delta_\zeta^f \end{aligned} \tag{12}$$

ce qui prouve que Δ_ζ^f est un générateur du $\mathbf{P}$-module $\mathrm{Ann}_{\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}}(I)$. D'autre part, si $x\in\mathbf{P}$

$$\begin{aligned} x.\Delta_\zeta^f = 0 &\Leftrightarrow (x\otimes 1) \in \mathrm{Ann}_{\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}}(\Delta_\zeta^f\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}) \\ &\Leftrightarrow (x\otimes 1)\in I \qquad (\text{ par (8) et (10) }) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

donc $\mathrm{Ann}_{\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}}(I)$ est un $\mathbf{P}$-module libre dont une base est Δ_ζ^f. D'après la proposition 2.1.5, ceci montre, en particulier, que $\mathbf{P}$ est une $\mathbf{A}$-algèbre de Gorenstein, et que $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P},\mathbf{A})$ est un $\mathbf{P}$-module libre de rang 1 . $\square$

Corollaire et définitions 2.2.3. *(Bezoutien, Résidu)*

Soient $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre plate, et* $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *une suite de* $\mathbf{R}$ *quasi-régulière telle que le* $\mathbf{A}$*-module* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *soit projectif de type fini. On suppose que le noyau* J *de* $\tilde{\mu} : \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R} \to \mathbf{P}$ *est engendré par une suite quasi-régulière* $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_q)$*. Soient alors des* $a_{i,j} \in \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}$ *tels que:*

$$1 \otimes f_i = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}\zeta_j \qquad (1 \leq i \leq q).$$

On pose $\tilde{\Delta}_\zeta^f = \det(a_{i,j})$ *et*

$$\Delta_\zeta^f = \tilde{\rho}(\tilde{\Delta}_\zeta^f) \in \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P} \ . \tag{13}$$

où $\tilde{\rho} : \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R} \to \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}$*.*

Δ_ζ^f *est une base du* $\mathbf{P}$*-module* $\mathrm{Ann}_{\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{P}}(I)$*, et ne dépend que des suites* ζ *et* f*. On appellera* Δ_ζ^f *le Bezoutien de* f *par rapport à* ζ*.*

$\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{A})$ *est un* $\mathbf{P}$*-module libre de rang 1 dont l'unique base* τ_f^ζ *telle que:*

$$\Psi(\Delta_\zeta^f)(\tau_f^\zeta) = 1 \ , \tag{14}$$

est appelée la trace de la $\mathbf{A}$*-algèbre* $\mathbf{P}$ *suivant la présentation* $\dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *et la suite* ζ*.*

τ_f^ζ *détermine une unique forme* $\mathbf{A}$*-linéaire de* $\mathbf{R}$ *nulle sur* $f\mathbf{R}$*, que l'on note:* $\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \cdot\, \zeta_1.\zeta_2 \ldots \zeta_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{pmatrix}$*. On appellera cette forme le résidu par rapport à* f *et* ζ*, via les algèbres de Gorenstein. Pour tout* $h \in \mathbf{R}$ *on a:*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{pmatrix} h\, \zeta_1.\zeta_2 \ldots \zeta_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{pmatrix} = \tau_f^\zeta(\bar{h}) \ . \tag{15}$$

Exemple 2.2.4.

On peut illustrer le corollaire 2.2.3 à l'aide de l'exemple suivant; cet exemple permettra de montrer que le résidu intégral est un cas particulier du Résidu défini via les algèbres de Gorenstein.

Soient $\mathbf{A} = \mathbb{K}$ un corps commutatif et $\mathbf{R} = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_q] = \mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes à cœfficients dans $\mathbb{K}$. $\mathbf{R}$ étant un $\mathbb{K}$-module libre, $\mathbf{R}$ est une $\mathbb{K}$ algèbre plate. On considère les polynômes à une variable

$$P_i(X) = a_{i,n_i}X_i^{n_i} + a_{i,n_i-1}X_i^{n_i-1} + \cdots + a_{i,0} \qquad (1 \leq i \leq q\,;\, 0 < n_i\,;\, a_{i,n_i} \neq 0) \ ,$$

et I l'idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par les $P_i(X)$. $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{I}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont une base est $\{\bar{X}^k = \overline{X_1^{k_1} \ldots X_q^{k_q}} \mid 0 \leq k_i \leq n_i - 1, 1 \leq i \leq q\}$.

Par la suite on identifiera $\mathbb{K}[X] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}[X, Y]$, ainsi que $\mathbb{K}[X] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[X]/(1 \otimes P(X))$ et $\mathbb{K}[X, Y]/(P(Y))$. La suite

$$(X - Y, P(Y)) = (X_1 - Y_1, \ldots, X_p - Y_p, P_1(Y), \ldots, P_q(Y))$$

étant régulière dans $\mathbb{K}[X,Y]$, $(X-\bar{Y})$ est une suite quasi-régulière de $\mathbb{K}[X,Y]/(P(Y))$. D'autre part, comme tout polynôme $Q(X,Y)$ peut s'écrire sous la forme $Q(Y,Y)+Q(X,Y)-Q(Y,Y)$, un générateur du noyau de

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} : \mathbb{K}[X,Y]/(P(Y)) &\longrightarrow \mathbb{K}[X]/(P(X)) \\ \text{classe } (Q(X,Y)) &\longrightarrow \text{classe}(Q(X,X)) \end{aligned}$$

est $(X-\bar{Y})$. Les hypothèses de la proposition 2.2.2 sont vérifiées, on note:

$$\zeta = (X_1 - \bar{Y}_1, \ldots, X_q - \bar{Y}_q) \ .$$

On a

$$\begin{aligned} P_i(X) - P_i(Y) &= \sum_{k_i=1}^{n_i} a_{i,k_i}(X_i^{k_i} - Y_i^{k_i}) \\ &= \sum_{k_i=1}^{n_i} a_{i,k_i} \left(\sum_{\alpha_i=0}^{k_i-1} X_i^{\alpha_i}.Y_i^{k_i-1-\alpha_i} \right) (X_i - Y_i) \ , \end{aligned}$$

par conséquent:

$$\begin{aligned} \Delta_\zeta^{P(X)} &= \prod_{i=1}^{q} \left(\sum_{k_i=1}^{n_i} a_{i,k_i} \left(\sum_{\alpha_i=0}^{k_i-1} \bar{X}_i^{\alpha_i}.\bar{Y}_i^{k_i-1-\alpha_i} \right) \right) \\ &= \sum_{\substack{k=(k_1,\ldots,k_q) \\ 1 \le k_i \le n_i}} a_{1,k_1} \ldots a_{q,k_q} \left(\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_q) \\ 0 \le \alpha_i \le k_i - 1}} \bar{X}^\alpha \bar{Y}^{k-\underline{1}-\alpha} \right) \end{aligned}$$

où $k - \underline{1} = (k_1 - 1, \ldots, k_q - 1)$. Par définition de $\tau_{P(X)}^\zeta$:

$$\sum_{\substack{k=(k_1,\ldots,k_q) \\ 1 \le k_i \le n_i}} \left(\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_q) \\ 0 \le \alpha_i \le k_i - 1}} (a_{1,k_1} \ldots a_{q,k_q}) \tau_{P(X)}^\zeta (\bar{Y}^{k-\underline{1}-\alpha}) \bar{X}^\alpha \right) = 1 \ .$$

Comme $\{X^\alpha \mid \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q),\ 0 \le \alpha_i \le n_i - 1\}$ est une base de $\mathbf{P}$, on a, pour chaque $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$, $0 \le \alpha_i \le n_i - 1$:

$$\sum_{\substack{k=(k_1,\ldots,k_q) \\ \alpha_i \le k_i - 1 \le n_i - 1}} (a_{1,k_1} \ldots a_{q,k_q}) \tau_{P(X)}^\zeta (\bar{Y}^{k-\underline{1}-\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases} \ . \tag{16}$$

Lorsque $\alpha = (n_1 - 1, \ldots, n_q - 1)$ la formule (16) donne:

$$\tau_{P(X)}^\zeta (\bar{1}) = 0 \ .$$

Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \neq 0$ où $0 \leq \alpha_i \leq n_i - 1$. On suppose montré, par récurrence descendante sur α, que:

$$(\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_q) \mid 0 \leq \gamma_i \leq n_i - 1 - \alpha_i) \Longrightarrow \left(\tau^{\zeta}_{P(X)}(\bar{Y}^{\gamma}) = 0\right) \ . \tag{17}$$

La formule (17) est vraie lorsque $\alpha = (n_1 - 1, \ldots, n_q - 1)$. Soit $\epsilon_i = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0)$ le q-uplet à composantes nulles exceptée la $i^{\text{ième}}$.

Si $\alpha - \epsilon_i \neq 0$, d'après (16) on a:

$$\sum_{\substack{k = (k_1, \ldots, k_q) \\ \alpha_i - \epsilon_i \leq k_i - 1 \leq n_i - 1}} (a_{1,k_1} \ldots a_{q,k_q}) \tau^{\zeta}_{P(X)}(\bar{Y}^{k - \underline{1} - \alpha + \epsilon_i}) = 0 \ .$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence (17), on obtient:

$$(a_{1,n_1-1} \ldots a_{q,n_q-1}) \tau^{\zeta}_{P(X)}(\bar{Y}^{n - \underline{1} - \alpha + \epsilon_i}) = 0 \ ,$$

par conséquent $\tau^{\zeta}_{P(X)}(\bar{Y}^{n - \underline{1} - \alpha + \epsilon_i}) = 0$.

De la même façon, si $\alpha - \epsilon_i = 0$, d'après (16) et l'hypothèse de récurrence (17), on obtient

$$(a_{1,n_1-1} \ldots a_{q,n_q-1}) \tau^{\zeta}_{P(X)}(\bar{Y}^{n - \underline{1}}) = 1 \ .$$

La forme linéaire $\tau^{\zeta}_{P(X)}$ est donc définie par:

$$\tau^{\zeta}_{P(X)}(\bar{X}^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq (n_1 - 1, \ldots, n_q - 1) \\ 1/a_{1,n_1} \ldots a_{q,n_q} & \text{si } k = (n_1 - 1, \ldots, n_q - 1) \end{cases} . \tag{18}$$

A partir de (18), on obtient pour $Q(X) = \sum_{\substack{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_q) \\ 0 \leq \beta_i \leq n_i - 1}} b_\beta X^\beta$:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{pmatrix} Q(X) \ \ \zeta_1.\zeta_2 \ldots \zeta_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{pmatrix} = \frac{b_{n_1-1, \ldots, n_q-1}}{a_{1,n_1} \ldots a_{q,n_q}}. \tag{19}$$

La formule (19) reste valable lorsque $\mathbf{A}$ est un anneau commutatif, $\mathbf{R} = \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_q]$, et

$$P_i(X) = X_i^{n_i} + a_{i,n_i-1} X_i^{n_i-1} + \cdots + a_{i,0} \qquad (1 \leq i \leq q\,;\, 0 < n_i) \ .$$

En effet, d'une part $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{I}$ est un $\mathbf{A}$-module libre de type fini dont une base est $\{\bar{X}^k = \overline{X_1^{k_1} \ldots X_q^{k_q}} \mid 0 \leq k_i \leq n_i - 1, 1 \leq i \leq q\}$, d'autre part $(P_1(X), \ldots, P_q(X))$ est une suite régulière. Pour montrer ceci il suffit de considérer les $\mathbf{A}$-modules libres $\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}$ et pour $1 \leq i \leq q - 1$

$$\mathbf{B}_i = \frac{\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_i]}{(P_1(X), \ldots, P_i(X))} = \bigoplus_{\substack{0 \leq \alpha_j < n_j \\ j = 1, \ldots, i}} \mathbf{A} X_1^{\alpha_1} \ldots X_i^{\alpha_i} \ .$$

On a pour $0 \leq i \leq q-1$

$$\frac{\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_q]}{(P_1(X), \ldots, P_i(X))} = \mathbf{B}_i[X_{i+1}, \ldots, X_q] \ ,$$

et la multiplication par $P_{i+1}(X)$ dans $\mathbf{B}_i[X_{i+1}, \ldots, X_q]$ est injective, par conséquent la suite $(P_1(X), \ldots, P_q(X))$ est régulière. Comme précédemment la suite

$$\zeta = (X_1 - \bar{Y}_1, \ldots, X_q - \bar{Y}_q)$$

de $\mathbf{A}[X,Y]/(P(Y))$ est quasi-régulière et engendre le noyau de

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} : \mathbf{A}[X,Y]/(P(Y)) &\longrightarrow \mathbf{A}[X]/(P(X)) \\ \text{classe } (Q(X,Y)) &\longrightarrow \text{classe}(Q(X,X)) \end{aligned} .$$

Les hypothèses de la proposition 2.2.2 sont vérifiées et les mêmes calculs que ceux effectués précédemment montrent que pour $Q(X) = \sum_{\substack{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_q) \\ 0 \leq \beta_i \leq n_i - 1}} b_\beta X^\beta$:

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{pmatrix} Q(X) \ \zeta_1 . \zeta_2 \ldots \zeta_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{pmatrix} = b_{n_1 - 1, \ldots, n_q - 1} \ .$$

On peut procéder de même lorsque $\mathbf{A} = \mathbb{C}$, $\mathbf{R} = \mathcal{O}_q = \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_q\}$, et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une suite de $\mathbb{C}\{x\}$ telle que

$$f_i = x_i^{n_i} \qquad\qquad (1 \leq i \leq q \,;\, 0 < n_i) \ .$$

$f = (f_1, \ldots, f_n)$ est une suite régulière de $\mathbb{C}\{x\}$, et $\mathbb{C}\{x\}/(f)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On montre ci-dessous que le noyau de

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} : \frac{\mathbb{C}\{x\}}{(f)} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{y\} &\longrightarrow \frac{\mathbb{C}\{x\}}{(f)} \\ \bar{x}_i &\longrightarrow \bar{x}_i \\ y_i &\longrightarrow \bar{y}_i \end{aligned}$$

est engendré par:

$$\zeta = (\bar{x}_1 - y_1, \ldots \bar{x}_q - y_q).$$

En effet, soit $h(x,y) = \sum_{i=1}^p a_i(x) g_i(y)$ où $a_i(x) \in \mathbb{C}[x]$ et $g_i(y) \in \mathbb{C}\{y\}$. On a:

$$\begin{aligned} h(x,y) &= \sum_{i=1}^p a_i(x)(g_i(y) - g_i(x)) + \sum_{i=1}^p a_i(x) g_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^p a_i(x) (\sum_{j=i}^q (x_j - y_j) b_{i,j}(x,y)) + \sum_{i=1}^p a_i(x) g_i(x) \end{aligned}$$

où $b_{i,j}(x,y) \in \mathbb{C}\{x,y\}$. Comme $\mathbb{C}\{x\}/(f)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, l'image de $b_{i,j}(x,y)$ dans $\mathbb{C}\{x,y\}/(f(x))$ est un élément de $\mathbb{C}\{x\}/(f) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{y\}$; ceci montre que le noyau de $\tilde{\mu}$ est engendré par ζ. On est à partir de là, dans une situation similaire au cas polynomial: ζ est une suite quasi-régulière, $\Delta_\zeta^f = \Delta_\zeta^{P(X)}$, et pour $h(x) = \sum_{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_q)} b_\beta X^\beta$:

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{pmatrix} h(x) \ \zeta_1 . \zeta_2 \ldots \zeta_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{pmatrix} = b_{n_1 - 1, \ldots, n_q - 1}. \qquad \square \qquad (20)$$

Remarque 2.2.5.

La forme linéaire $\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{pmatrix} \cdot\,\zeta_1.\zeta_2\ldots\zeta_q \\ f_1,\ldots,f_q \end{pmatrix}$ est alternée par rapport à f et ζ. En effet

$$1\otimes f_i=\sum_{j=1}^{q}a_{i,j}\zeta_j \qquad \text{et} \qquad \tilde{\Delta}_\zeta^f=\det(a_{i,j})\ ,$$

par conséquent $\tilde{\Delta}_\zeta^f$ est alterné par rapport à f et ζ. Plus précisément, si δ et γ sont deux permutations de $\{1,\ldots,q\}$ de signatures respectives $|\delta|$ et $|\gamma|$, en notant $f_\delta=(f_{\delta(1)},\ldots,f_{\delta(q)})$ et $\zeta_\gamma=(\zeta_{\gamma(1)},\ldots,\zeta_{\gamma(q)})$, on a: $\tilde{\Delta}_{\zeta_\gamma}^{f_\delta}=(-1)^{(|\delta|+|\gamma|)}\tilde{\Delta}_\zeta^f$. Comme $\Delta_{\zeta_\gamma}^{f_\delta}=(-1)^{(|\delta|+|\gamma|)}\tilde{\rho}(\tilde{\Delta}_\zeta^f)$, on obtient:

$$\Psi(\Delta_{\zeta_\gamma}^{f_\delta})((-1)^{(|\delta|+|\gamma|)}\tau_f^\zeta)=1\ .$$

Par unicité de la trace (déf. 2.1.6), on déduit

$$\tau_{f_\delta}^{\zeta_\gamma}=(-1)^{(|\delta|+|\gamma|)}\tau_f^\zeta\ ,$$

par conséquent:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{pmatrix} \cdot\,\zeta_{\gamma(1)}.\zeta_{\gamma(2)}\cdots\zeta_{\gamma(q)} \\ f_{\delta(1)},\ldots,f_{\delta(q)} \end{pmatrix}=(-1)^{(|\delta|+|\gamma|)}\,\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{pmatrix} \cdot\,\zeta_1.\zeta_2\cdots\zeta_q \\ f_1,\ldots,f_q \end{pmatrix}\ . \tag{21}$$

□

Proposition 2. 2. 6. *(Passage au complété.)*

Soient $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre plate, et* $f=(f_1,\ldots,f_q)$ *une suite quasi-régulière de* $\mathbf{R}$ *telle que le* $\mathbf{A}$*-module* $\mathbf{P}=\dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *soit projectif de type fini. On suppose que le noyau* J *de* $\tilde{\mu}:\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{P}$ *est engendré par une suite quasi-régulière* $\zeta=(\zeta_1,\ldots,\zeta_q)$. *On note* $\hat{\mathbf{R}}$ *le complété* f*-adique de* $\mathbf{R}$, $\hat{f}_i$ *l'image de* f_i *dans* $\hat{\mathbf{R}}$, *et* $\hat{\zeta}_i$ *l'image de* ζ_i *par l'application canonique de* $\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{R}}$.*Alors:*

1) $\mathbf{P}/\mathbf{A}$ *admet pour présentation* $\dfrac{\hat{\mathbf{R}}}{(\hat{f})}$, *et pour trace* $\tau_{\hat{f}}^{\hat{\zeta}}$

2) Pour tout $r\in\mathbf{R}$, *d'image* $\hat{r}\in\hat{\mathbf{R}}$ *on a:*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{pmatrix} r\ \ \zeta_1.\zeta_2\ldots\zeta_q \\ f_1,\ldots,f_q \end{pmatrix}=\mathrm{Res}_{\hat{\mathbf{R}}/\mathbf{A}}\begin{pmatrix} \hat{r}\ \ \hat{\zeta}_1.\hat{\zeta}_2\ldots\hat{\zeta}_q \\ \hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_q \end{pmatrix}\ . \tag{22}$$

Preuve.

1) $\mathbf{R}$ étant un anneau nœthérien, $\hat{\mathbf{R}}$ est un $\mathbf{R}$-module plat, il est donc, en particulier, $\mathbf{A}$-plat. f étant une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$, $\hat{f}$ est une suite régulière de $\hat{\mathbf{R}}$, et $\dfrac{\hat{\mathbf{R}}}{\hat{f}\hat{\mathbf{R}}}=\dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}=\mathbf{P}$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini. On montre, ci-dessous, que $\hat{\zeta}$ est une suite quasi-régulière de $\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{R}}$ qui engendre le noyau $\hat{J}$ de:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{R}} &\longrightarrow \mathbf{P} \\ \bar{x}\otimes\hat{y} &\longrightarrow \bar{x}\bar{y}\ . \end{aligned} \tag{23}$$

En effet, comme $\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R}$ est nœthérien et $(1\otimes f)\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R}\subset\zeta\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R}$, on a:

$$((\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R})^{1\otimes f})^{\zeta}\simeq(\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R})^{\zeta}$$

où $(\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R})^{1\otimes f}$, $(\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R})^{\zeta}$ sont les complétés $1\otimes f$ et ζ adiques de $\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R}$, et $((\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R})^{1\otimes f})^{\zeta}$ le complété ζ-adique de $(\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R})^{1\otimes f}$.

ζ étant une suite quasi-régulière de $\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R}$, son image dans $(\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R})^{\zeta}$ est une suite régulière. Par conséquent ζ est une suite quasi-régulière de $(\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R})^{1\otimes f}$. Or

$$(\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R})^{1\otimes f}=\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{R}}\ ,$$

donc $\hat{\zeta}$ est une suite quasi-régulière de $\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{R}}$.

$\hat{\zeta}$ engendre $\hat{J}$. En effet, tout élément de $\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{R}}$ peut s'écrire sous la forme

$$u=\sum_{i=1}^{k}p_i\otimes r_i+v\ , \tag{24}$$

où $p_i\in\mathbf{P}, r_i\in\mathbf{R}$ et $v\in(1\otimes f)\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{R}}\subset\hat{J}$. Par conséquent, $u\in\hat{J}$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{k}p_i\otimes r_i\in J$. Comme J est engendré par ζ, cela prouve que $\hat{J}$ est engendré par $\hat{\zeta}$. D'après le corollaire 2.2.3, on peut définir $\tau_{\hat{f}}^{\hat{\zeta}}\in\hom_{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{R}},\mathbf{A})$, qui est la trace de la $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{P}$ suivant la présentation $\dfrac{\mathbf{R}}{(\hat{f})}$ et la suite $\hat{\zeta}$.

2) Les triplets $(\mathbf{R},f,\zeta)$ et $(\hat{\mathbf{R}},\hat{f},\hat{\zeta})$ vérifient les hypothèses du corollaire 2.2.3 et fournissent deux présentations de $\mathbf{P}$. Par construction $\Delta_{\zeta}^{f}=\Delta_{\hat{\zeta}}^{\hat{f}}$, donc, d'après l'unicité de la trace, $\tau_{\hat{f}}^{\hat{\zeta}}=\tau_{f}^{\zeta}$. $\square$

2.3. Propriétés fonctorielles du résidu défini via les algèbres de Gorenstein.

On présente dans ce paragraphe les propriétés essentielles du résidu défini via les algèbres de Gorenstein. C'est-à-dire, la non-dégénérescence, la loi de transformation, l'action d'un changement de base, et la loi de transitivité.

Proposition 2.3.1. *(non dégénérescence.)*
Soient $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre plate, et $f=(f_1,\dots,f_q)$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ telle que le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{P}=\dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ soit projectif de type fini. On suppose que le noyau J de $\tilde{\mu}:\mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{P}$ est engendré par une suite quasi-régulière $\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_q)$.
Soit $h\in\mathbf{R}$. On a $h\in(f_1,\dots,f_q)$ si et seulement si:

$$\forall r\in\mathbf{R}\,,\qquad \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{pmatrix}h.r\ \ \zeta_1.\zeta_2\dots\zeta_q\\ f_1,\dots,f_q\end{pmatrix}=0\ .$$

Preuve.

On note $\bar{h}$, $\bar{r}$ les images de h, r dans $\mathbf{P}$. Comme τ_f^ζ est une base du $\mathbf{P}$-module $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P},\mathbf{A})$ on a:

$$\bar{h} = 0 \Longleftrightarrow \bar{h}.\tau_f^\zeta = 0 \ .$$

Par définition de la structure de $\mathbf{P}$-module de $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P},\mathbf{A})$ ceci équivaut à:

$$\forall r \in \mathbf{R}, \qquad \bar{h}.\tau_f^\zeta(\bar{r}) = \tau_f^\zeta(\bar{h}\bar{r}) = 0 \ . \quad \square$$

Proposition 2.3.2. *(loi de transformation.)*

Soient $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre plate, $f = (f_1,\ldots,f_q)$ et $g = (g_1,\ldots,g_q)$ deux suites quasi-régulières de $\mathbf{R}$ telles que les $\mathbf{A}$-modules $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ et $\mathbf{P}' = \dfrac{\mathbf{R}}{g\mathbf{R}}$ soient projectifs de type fini. On suppose que

$$g_i = \sum_{j=1}^{q} \alpha_{i,j} f_j \qquad (i = 1,\ldots,q; a_{i,j} \in \mathbf{R}) \tag{25}$$

et que le noyau J' de $\tilde{\mu}' : \mathbf{P}' \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{P}'$ est engendré par une suite quasi-régulière $\zeta' = (\zeta'_1,\ldots,\zeta'_q)$. Notons $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_q)$ l'image de ζ' dans $\mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}$; ζ est une suite quasi-régulière de $\mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}$ qui engendre le noyau J de $\tilde{\mu} : \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{P}$. Pour tout $h \in \mathbf{R}$ on a:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{pmatrix} h \ \ \zeta_1.\zeta_2\ldots\zeta_q \\ f_1,\ldots,f_q \end{pmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{pmatrix} h\det(\alpha_{i,j}) \ \ \zeta'_1.\zeta'_2\ldots\zeta'_q \\ g_1,\ldots,g_q \end{pmatrix} \ . \tag{26}$$

Cette propriété est la formulation, dans les notations introduites précédemment, de la proposition F.26, §F de l'appendice [Ku 2]. $\square$

Soient $\mathbf{A} \xrightarrow{\Psi} \mathbf{A}'$ une $\mathbf{A}$-algèbre, et M un $\mathbf{A}$-module. $M' = \mathbf{A}' \otimes_{\mathbf{A}} M$ est un $\mathbf{A}'$-module, et si $m \in M$ on notera $m' = 1 \otimes m \in M'$.

Proposition 2.3.3. *(compatibilité au changement de base.)*

Soient $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre plate, et $f = (f_1,\ldots,f_q)$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ telle que le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ soit projectif de type fini. On suppose que le noyau J de $\tilde{\mu} : \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{P}$ est engendré par une suite quasi-régulière $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_q)$.

Soit $\mathbf{A} \xrightarrow{\Psi} \mathbf{A}'$ une $\mathbf{A}$-algèbre telle que $\mathbf{R}'$=$\mathbf{A}' \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}$ soit nœthérien.

Alors $f' = (1\otimes f_1,\ldots 1\otimes f_q)$ est une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}'$, et $\mathbf{P}' = \dfrac{\mathbf{R}'}{(f')}$ est un $\mathbf{A}'$-module projectif de type fini. ζ' est une suite quasi-régulière de $\mathbf{P}' \otimes_{\mathbf{A}'} \mathbf{R}' \simeq \mathbf{P}' \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}$, et engendre le noyau J' de $\tilde{\mu}' : \mathbf{P}' \otimes_{\mathbf{A}'} \mathbf{R}' \longrightarrow \mathbf{P}'$. Ainsi $\mathbf{P}' = \dfrac{\mathbf{R}'}{(f')}$ est une $\mathbf{A}'$-algèbre de Gorenstein, et on a:

$$\forall h \in \mathbf{R} \ , \qquad \mathrm{Res}_{\mathbf{R}'/\mathbf{A}'} \begin{pmatrix} h' \ \ \zeta'_1.\zeta'_2\ldots\zeta'_q \\ f'_1,\ldots,f'_q \end{pmatrix} = \Psi(\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{pmatrix} h \ \ \zeta_1.\zeta_2\ldots\zeta_q \\ f_1,\ldots,f_q \end{pmatrix}) \ . \tag{27}$$

Cette propriété est la formulation, dans les notations introduites précédemment, de la proposition F.27, §F de l'appendice [Ku 2]. $\square$

Le résidu, défini via les algèbres de Gorenstein, vérifie la loi de transitivité. Comme précédemment, on note $\mathbf{P}/\mathbf{A}$ une algèbre de Gorenstein de présentation $\dfrac{\mathbf{R}}{(f_1,\dots,f_q)}$, et qui admet pour trace:

$$\tau_f^\zeta : \mathbf{P} \to \mathbf{A}\ .$$

Soit $\mathbf{S}$ une $\mathbf{R}$-algèbre plate telle que $\mathbf{S}' = \dfrac{\mathbf{S}}{(f_1,\dots,f_q)}$ soit une $\mathbf{P}$-algèbre plate. On considère $g' = (g'_1,\dots,g'_l)$, une suite quasi-régulière de $\mathbf{S}'$ telle que $\mathbf{Q} = \dfrac{\mathbf{S}'}{g'\mathbf{S}'}$ soit un $\mathbf{P}$-module projectif de type fini. On suppose que le noyau de $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{P}}\mathbf{S}' \to \mathbf{Q}$ est engendré par une suite quasi-régulière $\eta' = (\eta'_1,\dots\eta'_l)$. Par suite $\mathbf{Q}/\mathbf{P}$ est une algèbre de Gorenstein qui admet pour trace:

$$\tau_{g'}^{\eta'} : \mathbf{Q} \to \mathbf{P}\ .$$

D'après la proposition 2.1.9, $\mathbf{Q}/\mathbf{A}$ est une algèbre de *Gorenstein* et admet pour trace:

$$\tau_f^\zeta \circ \tau_{g'}^{\eta'} : \mathbf{Q} \to \mathbf{A}$$

Soit $g = (g_1,\dots,g_l) \subset \mathbf{S}$ et $\eta'' = (\eta''_1,\dots\eta''_l) \subset \mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{S}$ des antécédents de g' et η'. (f,g) est une suite quasi-régulière de $\mathbf{S}$. En effet, le même argument que celui utilisé dans la preuve de la quasi-régularité de la suite $1\otimes f$ dans la proposition 2.2.2, montre que la suite f est une suite quasi-régulière de $\mathbf{S}$, de plus l'image de la suite (f,g) dans un localisé de $\mathbf{S}$ par un idéal maximal contenant (f,g) est régulière. De même la suite (ζ,η'') est une suite quasi-régulière de $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{S}$ ([Ku2], appendice F, prop. F.28). (ζ,η'') engendre le noyau de $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{A}}\ \mathbf{S}\to\mathbf{Q}$ et

$$\tau_{f,g}^{\zeta,\eta''} : \mathbf{Q} \to \mathbf{A}\ ,$$

est une trace de $\mathbf{Q}/\mathbf{A}$. On a ([Ku2], appendice F, prop. F.28):

$$\tau_{f,g}^{\zeta,\eta''} = \tau_f^\zeta \circ \tau_{g'}^{\eta'}\ . \tag{28}$$

Traduit dans les notations introduites dans 2.2.4, on obtient:

Proposition 2.3.4.

Soient $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre plate, et* $f = (f_1,\dots,f_q)$ *une suite quasi-régulière de* $\mathbf{R}$ *telle que le* $\mathbf{A}$*-module* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *soit projectif de type fini. On suppose que le noyau* J *de* $\tilde\mu : \mathbf{P}\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{P}$ *est engendré par une suite quasi-régulière* $\zeta = (\zeta_1,\dots,\zeta_q)$.

Soient $\mathbf{S}$ *une* $\mathbf{R}$*-algèbre plate telle que* $\mathbf{S}' = \dfrac{\mathbf{S}}{(f_1,\dots,f_q)}$ *soit une* $\mathbf{P}$*-algèbre plate, et* $g' = (g'_1,\dots,g'_l)$ *une suite quasi-régulière de* $\mathbf{S}'$ *telle que* $\mathbf{Q} = \dfrac{\mathbf{S}'}{g'\mathbf{S}'}$ *soit un*

$\mathbf{P}$*-module projectif de type fini. On suppose que le noyau de* $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{P}} \mathbf{S}' \longrightarrow \mathbf{Q}$ *est engendré par une suite quasi-régulière* $\eta' = (\eta'_1, \dots \eta'_l)$. *On note* $g \subset \mathbf{S}$ *et* $\eta'' \subset \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{S}$ *des antécédents de* g' *et* η'.

Alors pour tout $s \in \mathbf{S}$ *on a:*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{A}} \begin{pmatrix} s \ \zeta_1.\zeta_2 \dots \zeta_q.\eta''_1 \dots \eta''_l \\ f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_l \end{pmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \sigma(\mathrm{Res}_{\mathbf{S}'/\mathbf{P}} \begin{pmatrix} s' & \eta'_1.\eta'_2 \dots \eta'_l \\ & g'_1, \dots, g'_l \end{pmatrix}) \ \zeta_1.\zeta_2 \dots \zeta_q \\ f_1, \dots, f_q \end{pmatrix} \tag{29}$$

où $s' \in \mathbf{S}'$ *est l'image de* s, *et* $\sigma(\mathrm{Res}_{\mathbf{S}'/\mathbf{P}} \begin{pmatrix} s' & \eta'_1.\eta'_2 \dots \eta'_l \\ & g'_1, \dots, g'_l \end{pmatrix}) \in \mathbf{R}$ *un antécédent de* $\mathrm{Res}_{\mathbf{S}'/\mathbf{P}} \begin{pmatrix} s' & \eta'_1.\eta'_2 \dots \eta'_l \\ & g'_1, \dots, g'_l \end{pmatrix} \in \mathbf{P}$.

Cette proposition permet d'obtenir:

Proposition 2.3.5. *(Loi de transitivité.)*

Soient $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre plate, et* $f = (f_1, \dots, f_q)$ *une suite quasi-régulière de* $\mathbf{R}$ *telle que le* $\mathbf{A}$*-module* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *soit projectif de type fini. On suppose que le noyau* J *de* $\tilde{\mu} : \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{P}$ *est engendré par une suite quasi-régulière* $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_q)$.

Soient $\mathbf{S}$ *une* $\mathbf{R}$*-algèbre plate , et* $g = (g_1, \dots, g_l)$ *une suite quasi-régulière de* $\mathbf{S}$ *telle que* $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{S}}{g\mathbf{S}}$ *soit un* $\mathbf{R}$*-module projectif de type fini. On suppose que le noyau de* $\mathbf{T} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{T}$ *est engendré par une suite quasi-régulière* $\eta = (\eta_1, \dots \eta_l)$.

On note $\mathbf{S}' = \dfrac{\mathbf{S}}{(f)}$, g' *l'image de* g *dans* $\mathbf{S}'$, $\mathbf{Q} = \dfrac{\mathbf{S}'}{g'\mathbf{S}'}$, $\eta' = (1 \otimes \eta_1, \dots 1 \otimes \eta_l) \subset \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{R}} (\mathbf{T} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{S}) \simeq \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{S}$, *et* $\eta'' \subset \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{S}$ *un antécédent de* η'.

Alors pour tout $s \in \mathbf{S}$ *on a:*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{A}} \begin{pmatrix} s \ \zeta_1.\zeta_2 \dots \zeta_q.\eta''_1 \dots \eta''_l \\ f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_l \end{pmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathrm{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{R}} \begin{pmatrix} s & \eta_1.\eta_2 \dots \eta_l \\ & g_1, \dots, g_l \end{pmatrix} \ \zeta_1.\zeta_2 \dots \zeta_q \\ f_1, \dots, f_q \end{pmatrix} \tag{30}$$

Preuve.

En utilisant un changement de base, on montre que les conditions de la proposition précédente sont satisfaites. Soient $\mathbf{R} \xrightarrow{\Psi} \mathbf{R}' = \mathbf{R}/(f) = \mathbf{P}$ la surjection canonique, et $\mathbf{S}' = \mathbf{R}' \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{S} = \dfrac{\mathbf{S}}{(f)}$. $\mathbf{S}$ étant une $\mathbf{R}$-algèbre plate, $\mathbf{S}'$ est une $\mathbf{R}'$-algèbre plate, de plus $\mathbf{S}'$ est nœthérien en tant que quotient d'un anneau nœthérien. D'après la proposition 2.3.3, $g' = (1 \otimes g_1, \dots, 1 \otimes g_l)$ est une suite quasi-régulière de $\mathbf{S}'$, $\mathbf{Q} = \dfrac{\mathbf{S}'}{(g')}$ est un $\mathbf{R}'$-module projectif de type fini, et $\eta' = (1 \otimes \eta_1, \dots, 1 \otimes \eta_l) \subset \mathbf{R}' \otimes_{\mathbf{R}} (\mathbf{T} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{S})$ est une suite quasi-régulière qui engendre le noyau du morphisme $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{P}} \mathbf{S}' \to \mathbf{Q}$. On peut par conséquent appliquer la proposition 2.3.4. D'autre part, d'après la proposition 2.3.3, on a:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{S}'/\mathbf{P}} \begin{pmatrix} s' & \eta'_1.\eta'_2 \dots \eta'_l \\ & g'_1, \dots, g'_l \end{pmatrix} = \Psi(\mathrm{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{R}} \begin{pmatrix} s & \eta_1.\eta_2 \dots \eta_l \\ & g_1, \dots, g_l \end{pmatrix})$$

Appliqué à (29), ce résultat fournit (30). □

§3. Construction du symbole résidu via l'homologie de Hochschild

On rappelle dans ce paragraphe la construction du symbole résidu via l'homologie de Hochschild. Cette construction est due à *J. Lipman* ([L]).

On considère $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre unitaire et commutative d'homomorphisme structural $h : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$, $\mathbf{R}/\mathbf{A} = \operatorname{coker} h$, et $\mathbf{R}^e = \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}$ l'algèbre enveloppante de $\mathbf{R}$. Le $\mathbf{R}^e$-homomorphisme:

$$\begin{aligned} \epsilon : \mathbf{R}^e &\longrightarrow \mathbf{R} \\ a \otimes b &\longrightarrow ab \end{aligned}$$

munit $\mathbf{R}$ d'une structure de $\mathbf{R}^e$-module.

3.1. Modules d'homologie de Hochschild à cœfficients dans un bimodule.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note B_n les $\mathbf{R}^e$-modules:

$$B_n = \mathbf{R}^e \otimes_{\mathbf{A}} (\mathbf{R}/\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} \cdots \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}/\mathbf{A}) \qquad \text{(n fois le facteur } \mathbf{R}/\mathbf{A})$$

et on considère le complexe de $\mathbf{R}^e$-module ([ML] chap.X §2):

$$\dots B_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} B_1 \xrightarrow{\partial_1} B_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{R} \tag{1}$$

défini par:

$$\begin{aligned}\partial_n(x[r_1|\dots|r_n]y) =& xr_1[r_2|\dots|r_n]y \\ &+ \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^i x[r_1|\dots|r_i r_{i+1}|\dots|r_n]y \\ &+ (-1)^n x[r_1|\dots|r_{n-1}]r_n y\end{aligned}$$

où $x[r_1|\dots|r_n]y$ est une écriture de $x \otimes y \otimes (r_1^* \otimes \cdots \otimes r_n^*) \in B_n$, r_i^* étant l'image canonique de $r_i \in \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}/\mathbf{A}$.

$\epsilon : B.(h) \longrightarrow \mathbf{R}$ est une résolution du $\mathbf{R}^e$-module $\mathbf{R}$ ([ML] chap.X thm. 2.1).

Si $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{R}^e$-module, les $\mathbf{A}$-modules de l'homologie (resp. cohomologie) de *Hochschild* de la $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{R}$ à cœfficients dans le $\mathbf{R}^e$-module $\mathbf{M}$ sont définis via la résolution (1) par:

$$H_n(\mathbf{R}, \mathbf{M}) = H_n(\mathbf{M} \otimes_{\mathbf{R}^e} B.(h)) \tag{2}$$

$$\text{(resp. } H^n(\mathbf{R}, \mathbf{M}) = H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}^e}(B.(h), \mathbf{M})\ ). \tag{3}$$

(cf. [ML] chap.X §3 , 4). En particulier on a:

$$\begin{aligned}H_0(\mathbf{R}, \mathbf{M}) &= \frac{\mathbf{M} \otimes_{\mathbf{R}^e} B_0}{\mathrm{im}(1 \otimes \partial_1)} \\ &= \frac{\mathbf{M}}{\{(r \otimes 1)m - (1 \otimes r)m \,|\, r \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{M}\}} \\ &= \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{R}^e} \mathbf{M}\end{aligned} \tag{4}$$

$$\text{(resp. } H^0(\mathbf{R}, \mathbf{M}) = \{m \in \mathbf{M} \,|\, (r \otimes 1)m = (1 \otimes r)m \text{ pour tout } r \in \mathbf{R}\}\ ). \tag{5}$$

$\mathbf{R}$ étant commutatif, pour tout $r \in \mathbf{R}$ la multiplication par $r \otimes 1$ dans B_n (resp. $\mathbf{R}$) est un $\mathbf{R}^e$-endomorphime. On peut par conséquent munir $H_n(\mathbf{R}, \mathbf{M})$ et $H^n(\mathbf{R}, \mathbf{M})$ d'une structure de $\mathbf{R}$-module.

3.2. Le morphisme résidu.

Pour $q \in \mathbb{N}$, on considère le $\mathbf{R}$-homomorphisme:

$$\rho^q_{\mathbf{M}} : H^q(\mathbf{R}, \mathbf{M}) \otimes_{\mathbf{R}} H_q(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \longrightarrow H_0(\mathbf{R}, \mathbf{M}) \tag{6}$$

défini de la façon suivante:

si $\zeta \in H^q(\mathbf{R}, \mathbf{M})$ est la classe de cohomologie du q-cocycle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}^e}(B_q, \mathbf{M})$, et $\eta \in H_q(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est la classe d'homologie du q-cycle $\bar{x} = 1 \otimes x \in \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{R}^e} B_q$, alors $\rho^q_{\mathbf{M}}(\zeta \otimes \eta)$ est la classe d'homologie du 0-cycle $\gamma = 1 \otimes f(x) \in \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{R}^e} \mathbf{M} = H_0(\mathbf{R}, \mathbf{M})$.

Le morphisme résidu est défini à partir de $\rho^q_{\mathbf{M}}$ en spécialisant $\mathbf{M}$. Soit I un idéal de $\mathbf{R}$ tel que $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{I}$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini et $\mathbf{M} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})$. On munit $\mathbf{P}$ de sa structure naturelle de $\mathbf{R}$-module, et $\mathbf{M}$ d'une structure de $\mathbf{R}^e$-module en posant pour $g \in \mathbf{M}$, $r_1 \otimes r_2 \in \mathbf{R}^e$, et $p \in \mathbf{P}$:

$$((r_1 \otimes r_2)g)(p) = r_1 g(r_2 p);$$

on note:

$$(r_1 \otimes r_2)g = r_1 g r_2 \tag{7}$$

D'après (4) on a:

$$H_0(\mathbf{R}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})) = \frac{\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})}{\{rg - gr \,|\, r \in \mathbf{P}\,, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})\}}. \tag{8}$$

$\mathbf{P}$ étant un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, on a sur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})$ une forme linéaire canonique qui à tout endomorphisme u associe sa trace que l'on note $\mathrm{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}(u)$ ([B$_1$] Chap. II,§4.3). Cette application induit sur $H_0(\mathbf{R}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P}))$ une application $\mathbf{A}$-linéaire que l'on note aussi $\mathrm{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}$.

Définition (3.2.1). *([L] (1.5.1)) Pour $q \in \mathbb{N}$, l'homomorphisme résidu* Res^q *est la composée des applications $\mathbf{A}$-linéaires:*

$$H^q(\mathbf{R}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})) \otimes_{\mathbf{R}} H_q(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \xrightarrow{\rho^q_{\mathbf{M}}} H_0(\mathbf{R}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}} \mathbf{A} \tag{9}$$

3.3. Le résidu via l'homologie de Hochschild.

Comme précédemment, $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{I}$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, et $\mathbf{M} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})$.

a) *Ecriture explicite de* Res^0.

D'après (4) et (5), on a:

$$H^0(\mathbf{R}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})$$
$$H_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \mathbf{R}.$$

Par conséquent:

$$\mathrm{Res}^0 : \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}, \mathbf{P}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}}} \mathbf{A} \tag{10}$$

b) *Le symbole résidu défini par* Res^1.

$\mathbf{P} = \mathbf{R}/I$ étant un $\mathbf{A}$-module projectif, on considère:

$$\rho : \frac{\mathbf{R}}{I} \longrightarrow \frac{\mathbf{R}}{I^2}$$

une section $\mathbf{A}$-linéaire de la surjection canonique $\pi : \mathbf{R}/I^2 \longrightarrow \mathbf{R}/I$.

$\mathbf{R}/I$ et $\mathbf{R}/I^2$ étant munis de leur structure naturelle de $\mathbf{R}$-module, on pose, pour tout $p \in \mathbf{P}$ et $r \in \mathbf{R}$:

$$(r \otimes 1 - 1 \otimes r)\rho(p) = r\rho(p) - \rho(rp) \in \frac{\mathbf{R}}{I^2} \ ;$$

par suite $(r\rho(p) - \rho(rp)) \in I/I^2$ car $\pi(r\rho(p) - \rho(rp)) = 0$, et pour tout $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}}(\frac{I}{I^2}, \mathbf{P})$ on peut définir:

$$D_\alpha(r) = \alpha \circ (r \otimes 1 - 1 \otimes r)\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P}). \tag{11}$$

On note $\mathrm{Der}_{\mathbf{A}}(\mathbf{R}, \mathbf{M})$ les $\mathbf{A}$-dérivations de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{M}$, c'est-à-dire les $\mathbf{A}$-homomorphismes D de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{M}$ tels que $D(1) = 0$ et $D(r_1 r_2) = D(r_1)r_2 + r_1 D(r_2)$ pour tout $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$. On appelle dérivation intérieure toute dérivation d_m, où $m \in \mathbf{M}$, définie par $d_m(r) = mr - rm$. On peut identifier ([L] §1 (1.3.3)):

$$H^1(\mathbf{R}, \mathbf{M}) = \frac{\mathrm{Der}_{\mathbf{A}}(\mathbf{R}, \mathbf{M})}{\{\text{dérivations intérieures}\}}.$$

On a, d'une part, un $\mathbf{R}$-isomorphisme ([L] §1 exemples 1.4 et 1.7):

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}}(\frac{I}{I^2}, \mathbf{P}) &\longrightarrow \frac{\mathrm{Der}_{\mathbf{A}}(\mathbf{R}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P}))}{\{\text{ dérivations intérieures}\}} = H^1(\mathbf{R}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})) \\ \alpha &\longrightarrow [D_\alpha] \end{aligned} \tag{12}$$

où $D_\alpha \in \mathrm{Der}_{\mathbf{A}}(\mathbf{R}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P}))$ est défini par (11), et $[D_\alpha]$ est la classe de D_α. En fait, $[D_\alpha]$ est la classe de cohomologie du 1-cocycle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{R}/\mathbf{A}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P}))$:

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}/\mathbf{A} &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P}) \\ [r] &\longrightarrow D_\alpha(r) = \alpha \circ (r \otimes 1 - 1 \otimes r)\rho. \end{aligned}$$

On a, d'autre part, un **R**-isomorphisme ([L] §1 exemple 1.3):

$$\begin{aligned} \theta_1 : \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} &\longrightarrow H_1(\mathbf{R},\mathbf{R}) \\ dr &\longrightarrow \text{classe d'homologie du 1-cycle } 1 \otimes [r] \in \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}/\mathbf{A} \end{aligned} \tag{13}$$

où $\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ est le **R**-module des différentielles de la **A**-algèbre **R**, et $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{R}^e} \mathbf{B}_1$ est identifié à $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}/\mathbf{A}$.

Pour $\omega \in \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ et $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}}(\frac{I}{I^2}, \mathbf{P})$, on définit le symbole résidu par :

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{A},\mathbf{R},\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \omega \\ \alpha \end{bmatrix} = \mathrm{Res}^1([D_\alpha] \otimes \theta_1(\omega)). \tag{14}$$

En particulier si $\omega = rdr_1$, on a:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{\mathbf{A},\mathbf{R},\mathbf{P}} \begin{bmatrix} rdr_1 \\ \alpha \end{bmatrix} &= \mathrm{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}} \left(r_{\mathbf{P}} \circ \alpha \circ (r_1 \otimes 1 - 1 \otimes r_1)\rho \right) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}} \left(r_{\mathbf{P}} \circ \alpha \circ (r_1.\rho - \rho.r_1) \right) \end{aligned} \tag{15}$$

où $r_{\mathbf{P}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P},\mathbf{P})$ est la multiplication par r.

c) *Le symbole résidu défini par* Res^q *lorsque* $q > 1$.

On a, d'une part, un **R**-homomorphisme ([L] §1 (1.8.3)):

$$\begin{aligned} \otimes^q_{\mathbf{R}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}}(\frac{I}{I^2}, \mathbf{P}) &\longrightarrow H^q(\mathbf{R}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P},\mathbf{P})) \\ \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q &\longrightarrow [D_{\alpha_1} \ldots D_{\alpha_q}] \ . \end{aligned} \tag{16}$$

$[D_{\alpha_1} \ldots D_{\alpha_q}]$ étant la classe de cohomologie du q-cocycle $1 \otimes f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}^e}(B_q, \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P},\mathbf{P}))$, où $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\otimes^q_{\mathbf{A}} \mathbf{R}/\mathbf{A}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P},\mathbf{P}))$ est défini par:

$$\begin{aligned} f : \otimes^q_{\mathbf{A}} \mathbf{R}/\mathbf{A} &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P},\mathbf{P}) \\ [r_1|\ldots|r_q] &\longrightarrow D_{\alpha_1}(r_1) \circ \cdots \circ D_{\alpha_q}(r_q). \end{aligned}$$

On a, d'autre part, un **R**-homomorphisme ([L] §1 (1.10.2)):

$$\theta_q : \wedge^q \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \longrightarrow H_q(\mathbf{R},\mathbf{R}) \tag{17}$$

qui à $dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q$ associe la classe d'homologie du q-cycle

$$\sum_{\tau \in \mathcal{S}_q} (-1)^{|\tau|} [r_{\tau(1)}|\ldots|r_{\tau(q)}] \in \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{R}^e} B_q,$$

où $|\tau|$ désigne la signature de τ.

Définition 3.3.1. *(La formule du déterminant pour les résidus.) ([L] §1 prop. (1.10.5)).*

Pour $\omega \in \wedge^q \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ *et* $(\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in (\mathrm{Hom}_{\mathbf{P}}(\frac{I}{I^2}, \mathbf{P}))^q$, *on définit le symbole résidu par :*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{A},\mathbf{R},\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \omega \\ \alpha_1, \dots, \alpha_q \end{bmatrix} = \mathrm{Res}^q([D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_q}] \otimes \theta_q(\omega)) \tag{18}$$

où $[D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_q}]$ *est défini par (16) et* $\theta_q(\omega)$ *par (17).*

En particulier, si $\omega = rdr_1 \wedge \dots \wedge dr_q$, *on a:*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{A},\mathbf{R},\mathbf{P}} \begin{bmatrix} rdr_1 \wedge \dots \wedge dr_q \\ \alpha_1, \dots, \alpha_q \end{bmatrix}$$
$$= \mathrm{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}} \left(r_{\mathbf{P}} \circ \sum_{\tau \in \mathcal{S}_q} (-1)^{|\tau|} \alpha_1(r_{\tau(1)}.\rho - \rho.r_{\tau(1)}) \circ \dots \circ \alpha_q(r_{\tau(q)}.\rho - \rho.r_{\tau(q)}) \right). \tag{19}$$

Lorsque I est engendré par une suite quasi-régulière $(f_1, \dots, f_q)$, $\frac{I}{I^2}$ est un $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{R}}{I}$ module libre de rang q dont une base est $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_q)$; $\tilde{f}_i$ désignant l'image de f_i dans I/I^2. En choisissant pour $(\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in (\mathrm{Hom}_{\mathbf{P}}(\frac{I}{I^2}, \mathbf{P}))^q$ la base duale de $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_q)$, le symbole résidu défini dans la proposition 3.3.1 s'appellera résidu par rapport à f, via l'homologie de Hochschild.

Définition 3.3.2.

Soient $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre, et* $f = (f_1, \dots, f_q)$ *une suite quasi-régulière de* $\mathbf{R}$ *telle que le* $\mathbf{A}$*-module* $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *soit projectif de type fini. On note* $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_q)$ *la base du* $\mathbf{P}$*-module* I/I^2 *et* $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ *la base duale. Pour* $\omega \in \wedge^q \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ *on pose:*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \omega \\ f_1, \dots, f_q \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{A},\mathbf{R},\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \omega \\ \alpha_1, \dots, \alpha_q \end{bmatrix}. \tag{20}$$

On appellera $\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \omega \\ f_1, \dots, f_q \end{bmatrix}$, *le résidu de* ω *par rapport à* f, *via l'homologie de Hochschild.*

Exemple 3.3.3.

On peut illustrer la définition 3.3.2 à l'aide de l'exemple suivant; cet exemple jouera un rôle essentiel pour montrer que le résidu intégral, défini dans le paragraphe 1, n'est qu'un cas particulier du résidu de Hochschild. Cet exemple sera aussi utilisé dans des preuves de propositions des chapitres III et IV.

Soient $\mathbf{A} = \mathbb{K}$ un corps commutatif infini et $\mathbf{R} = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_q]$ l'anneau des polynômes à cœfficients dans $\mathbb{K}$. On considère les polynômes à une variable

$$P_i(X) = a_{i,n_i} X_i^{n_i} + a_{i,n_i-1} X_i^{n_i-1} + \dots + a_{i,0} \qquad (1 \le i \le q\,;\, 0 < n_i\,;\, a_{i,n_i} \ne 0)\ ,$$

et I l'idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par les $P_i(X)$. $\mathbf{P} = \mathbf{R}/I$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont une base est $\{\bar{X}^k = \overline{X_1^{k_1} \dots X_q^{k_q}} \mid 0 \leq k_i \leq n_i - 1, 1 \leq i \leq q\}$. On peut choisir

$$\begin{aligned} \rho : \mathbf{R}/I &\longrightarrow \mathbf{R}/I^2 \\ \bar{X}^k &\longrightarrow \tilde{X}^k \end{aligned}$$

comme section $\mathbb{K}$-linéaire de la projection canonique de $\mathbf{R}/I^2$ dans $\mathbf{R}/I$.

$\mathbf{R}/I$ étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $(P_1(X), \dots, P_q(X))$ est une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ (cf.appendice §3, prop.3.1). Pour $Q(X) \in \mathbf{R}$, on a:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbb{K}} \begin{bmatrix} Q(X) dX_1 \wedge \dots \wedge X_q \\ P_1(X), \dots, P_q(X) \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbb{K}} \left(Q(X)_{\mathbf{P}} \circ \sum_{\tau \in \mathcal{S}_q} (-1)^{|\tau|} \alpha_1(X_{\tau(1)}.\rho - \rho.X_{\tau(1)}) \circ \dots \circ \alpha_q(X_{\tau(q)}.\rho - \rho.X_{\tau(q)}) \right) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} (X_i.\rho - \rho.X_i) : \mathbf{R}/I &\longrightarrow I/I^2 \\ \bar{X}^k &\longrightarrow \tilde{X}_i \tilde{X}^k - \rho(\bar{X}_i \bar{X}^k)\ . \end{aligned}$$

Soit $\bar{X}^k = \bar{X}_1^{k_1} \dots \bar{X}_q^{k_q} \qquad (0 \leq k_j \leq n_i - 1\,,\ j = 1, \dots, q)$.

Si $0 \leq k_i < n_i - 1$ on a:

$$(X_i.\rho - \rho.X_i)(\bar{X}^k) = 0\ .$$

Si $k_i = n_i - 1$ on a:

$$\begin{aligned} (X_i.\rho - \rho.X_i)(\bar{X}^k) &= \tilde{X}_i \tilde{X}^k - \rho(\bar{X}_i \bar{X}^k) \\ &= \tilde{X}^k \tilde{X}_i + \tilde{X}_1^{k_1} \dots \tilde{X}_{i-1}^{k_{i-1}} \left(\frac{a_{i,n_i-1} \tilde{X}_i^{n_i-1} + \dots + a_{i,0}}{a_{i,n_i}}\right) \tilde{X}_{i+1}^{k_{i+1}} \dots \tilde{X}_q^{k_q} \\ &= \frac{\tilde{X}_1^{k_1} \dots \tilde{X}_{i-1}^{k_{i-1}} \tilde{X}_{i+1}^{k_{i+1}} \dots \tilde{X}_q^{k_q}}{a_{i,n_i}} P_i(\tilde{X})\ . \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $\bar{X}^k = \bar{X}_1^{k_1} \dots \bar{X}_q^{k_q}$ on a:

$$\alpha_i \left((X_i.\rho - \rho.X_i)(\bar{X}^k) \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq k_i < n_i - 1 \\ \dfrac{\bar{X}_1^{k_1} \dots \bar{X}_{i-1}^{k_{i-1}} \bar{X}_{i+1}^{k_{i+1}} \dots \bar{X}_q^{n_q}}{a_{i,n_i}} & \text{si } k_i = n_i - 1 \end{cases}$$

$$\alpha_j \left((X_i.\rho - \rho.X_i)(\bar{X}^k) \right) = 0 \qquad \text{si} \qquad i \neq j\ .$$

Ce calcul permet d'obtenir

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{\tau \in \mathcal{S}_q} (-1)^{|\tau|} \alpha_1(X_{\tau(1)}.\rho - \rho.X_{\tau(1)}) \circ \dots \circ \alpha_q(X_{\tau(q)}.\rho - \rho.X_{\tau(q)}) \right) (\bar{X}^k) \\ &\qquad = \left(\alpha_1(X_1.\rho - \rho.X_1) \circ \dots \circ \alpha_q(X_q.\rho - \rho.X_q) \right) (\bar{X}^k). \\ &\qquad = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq (n_1 - 1, \dots, n_q - 1) \\ \dfrac{1}{a_{1,n_1} \dots a_{q,n_q}} & \text{si } k = (n_1 - 1, \dots, n_q - 1) \end{cases} \end{aligned}$$

Si $Q(X) = \sum_{\substack{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_q) \\ 0 \leq \beta_i \leq n_i - 1}} b_\beta X^\beta$, on a

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbb{K}} \left(Q(X)_{\mathbf{P}} \circ \sum_{\tau \in \mathcal{S}_q} (-1)^{|\tau|} \alpha_1(X_{\tau(1)}.\rho - \rho.X_{\tau(1)}) \circ \cdots \circ \alpha_q(X_{\tau(q)}.\rho - \rho.X_{\tau(q)}) \right)$$
$$= \frac{b_{n_1-1,\ldots,n_q-1}}{a_{1,n_1} \ldots a_{q,n_q}} \ ,$$

et donc:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbb{K}} \begin{bmatrix} Q(X) dX_1 \wedge \cdots \wedge X_q \\ P_1(X), \ldots, P_q(X) \end{bmatrix} = \frac{b_{n_1-1,\ldots,n_q-1}}{a_{1,n_1} \ldots a_{q,n_q}} \ . \tag{21}$$

Comme dans l'exemple 2.2.4, la formule (21) reste valable lorsque $\mathbf{A}$ est un anneau commutatif, $\mathbf{R} = \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_q]$, et

$$P_i(X) = X_i^{n_i} + a_{i,n_i-1} X_i^{n_i-1} + \cdots + a_{i,0} \qquad (1 \leq i \leq q \,; 0 < n_i) \ .$$

En effet, comme on l'a montré dans l'exemple 2.2.4, $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{(P(X))}$ est un $\mathbf{A}$-module libre de type fini dont une base est $\{\bar{X}^k = \overline{X_1^{k_1} \ldots X_q^{k_q}} \mid 0 \leq k_i \leq n_i - 1, 1 \leq i \leq q\}$, et $(P_1(X), \ldots, P_q(X))$ est une suite régulière. Les mêmes calculs que ceux effectués précédemment montrent que pour $Q(X) = \sum_{\substack{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_q) \\ 0 \leq \beta_i \leq n_i - 1}} b_\beta X^\beta$:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q(X) dX_1 \wedge \cdots \wedge X_q \\ P_1(X), \ldots, P_q(X) \end{bmatrix} = b_{n_1-1,\ldots,n_q-1} \ .$$

De la même façon, lorsque $\mathbf{A} = \mathbb{C}$, $\mathbf{R} = \mathcal{O}_q$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une suite de $\mathcal{O}_q$ telle que

$$f_i = X_i^{n_i} \qquad (1 \leq i \leq q \,; 0 < n_i) \ ,$$

pour $g = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^q} b_\beta X^\beta$ on a:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbb{K}} \begin{bmatrix} g \, dX_1 \wedge \cdots \wedge X_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix} = b_{n_1-1,\ldots,n_q-1} \ . \tag{22}$$

3.4. Une écriture explicite du résidu, via l'homologie de Hochschild, dans le cas des suites quasi-régulières.

Les résultats de ce paragraphe sont issus de [L] §3.

On considère $f = (f_1, \ldots, f_q)$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$, I l'idéal qu'elle engendre, et $\hat{\mathbf{R}}$ le complété I-adique de $\mathbf{R}$. On suppose que $\mathbf{P} = \mathbf{R}/I$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, et l'on note:

$$\sigma : \frac{\mathbf{R}}{I} \longrightarrow \mathbf{R} \tag{23}$$

une section $\mathbf{A}$-linéaire de la projection canonique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}/I$. Tout élément $r \in \mathbf{R}$ admet dans $\hat{\mathbf{R}}$ une écriture unique de la forme (cf appendice):

$$r = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q} \sigma(r_\alpha) f^\alpha \tag{24}$$

où $r_\alpha \in \mathbf{P}$. Par conséquent, il existe des $\gamma_\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})$ uniques tels que:

$$\forall p \in \mathbf{P} \qquad r\sigma(p) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q} \sigma(\gamma_\alpha(p)) f^\alpha. \tag{25}$$

On définit l'élément $r^\# \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})[[f]]$ par:

$$r^\# = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q} \gamma_\alpha f^\alpha. \tag{26}$$

$\mathbf{R}/I^2$ étant muni de sa structure de $\mathbf{R}$-module, par (24) tout élément de $\mathbf{R}/I^2$ admet une écriture unique de la forme $\sigma(e_0).\bar{1} + \sum_{i=1}^q \sigma(e_i)\bar{f}_i$ où $e_i \in \mathbf{P}$. Ceci nous permet de choisir:

$$\begin{aligned} \rho : \mathbf{P} = \frac{\mathbf{R}}{I} &\longrightarrow \frac{\mathbf{R}}{I^2} \\ e_0 &\longrightarrow \sigma(e_0).\bar{1} \end{aligned}$$

comme section $\mathbf{A}$-linéaire de la projection canonique de $\mathbf{R}/I^2$ dans $\mathbf{R}/I$.

Pour $\omega = r dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q$, en notant:

$$r^\# = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q} \gamma_\alpha f^\alpha \quad , \quad r_j^\# = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q} \gamma_{j,\alpha} f^\alpha \tag{27}$$

et ε_i le q-uplet à composantes toutes nulles sauf la i^{eme} qui vaut 1, on obtient:

$$(r_j \rho - \rho r_j)(p) = \sum_{i=1}^q \sigma(\gamma_{j,\varepsilon_i}(p)) f_i \in \frac{I}{I^2}.$$

Par conséquent, I/I^2 étant muni de sa structure de $\mathbf{P}$ module, on a:

$$\alpha_i(r_j \rho - \rho r_j)(p) = \gamma_{j,\varepsilon_i}(p)$$

et:

$$
\begin{aligned}
&r_{\mathbf{P}} \circ (\sum_{\tau \in S_q} (-1)^{|\tau|} \alpha_1 (r_{\tau(1)}\rho - \rho r_{\tau(1)}) \circ \cdots \circ \alpha_q (r_{\tau(q)}\rho - \rho r_{\tau(q)}))(p) \\
&= \gamma_0 \circ \sum_{\tau \in S_q} (-1)^{|\tau|} \gamma_{\tau(1),\varepsilon_1} \circ \cdots \circ \gamma_{\tau(q),\varepsilon_q}(p).
\end{aligned} \tag{28}
$$

En suivant la définition 2.3.2 on obtient:

$$
\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} r dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix} = \operatorname{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}} \{ \gamma_0 \circ \sum_{\tau \in S_q} (-1)^{|\tau|} \gamma_{\tau(1),\varepsilon_1} \circ \cdots \circ \gamma_{\tau(q),\varepsilon_q} \}. \tag{29}
$$

En fait on peut, en utilisant les formules (27), obtenir les résidus par rapport aux puissances de f. On définit dans $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})[[f]]$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial f_i}(r_j^{\#}) &= \sum_{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \in \mathbb{N}^q} \alpha_i \gamma_{j,\alpha} f^{\alpha - \varepsilon_i} \\
\det(\frac{\partial}{\partial f_i}(r_j^{\#})) &= \sum_{\tau \in S_q} (-1)^{|\tau|} \frac{\partial}{\partial f_1}(r_{\tau(1)}^{\#}) \circ \cdots \circ \frac{\partial}{\partial f_q}(r_{\tau(q)}^{\#}).
\end{aligned} \tag{30}
$$

On obtient la formule suivante qui généralise (29):

Théorème 3.4.1. *([L] §3 corollaire (3.7).)*

Soient $f = (f_1, \ldots, f_q)$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ telle que $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, $\omega = r dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \in \wedge^q \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$, $m_1, \ldots, m_q$ une suite d'entiers strictement positifs, et:

$$
r^{\#} \det(\frac{\partial}{\partial f_i}(r_j^{\#})) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q} \delta_\alpha f^\alpha \in \hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}, \mathbf{P})[[f]].
$$

On a:

$$
\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} r dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \\ f_1^{m_1}, \ldots, f_q^{m_q} \end{bmatrix} = \operatorname{Tr}_{\mathbf{P}/\mathbf{A}} (\delta_{m_1 - 1, \ldots, m_q - 1}) \tag{31}
$$

3.5. Propriétés fonctorielles du résidu.

Dans ce paragraphe on rappelle le comportement du résidu lors d'un changement de bases (3.5.2) et lors du passage au complété (3.5.3), la loi de transformation (3.5.4), la loi de transitivité (3.5.5). Changement de base et passage au complété sont des corollaires d'une propriété que l'on présente ci-dessous.

On considère le diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{R} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{R}' \\
{\scriptstyle h}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle h'} \\
\mathbf{A} & \xrightarrow[\Psi]{} & \mathbf{A}'
\end{array} \tag{32}
$$

où $\mathbf{A}$,$\mathbf{A}'$,$\mathbf{R}$,$\mathbf{R}'$ sont des anneaux commutatifs unitaires.

On note $\Omega(\Phi)$ l'application $\mathbf{R}$-linéaire canonique (cf. [B1] chap. III, §10, prop.19)

$$\begin{aligned}\Omega(\Phi) : \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} &\longrightarrow \Omega_{\mathbf{R}'/\mathbf{A}'}\\ d_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}(r) &\longrightarrow d_{\mathbf{R}'/\mathbf{A}'}(\Phi(r))\end{aligned}$$

qui induit un $\mathbf{R}$-homomorphisme canonique:

$$\Omega_q(\Phi) : \wedge^q\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \longrightarrow \wedge^q\Omega_{\mathbf{R}'/\mathbf{A}'} \ .$$

Proposition 3.5.1. *Soient* $\mathbf{A}$,$\mathbf{A}'$,$\mathbf{R}$,$\mathbf{R}'$ *des anneaux commutatifs unitaires et les homomorphismes* h, h', Φ, Ψ *définis dans le diagramme (32). On considère* $I \subset \mathbf{R}$, $I' \subset \mathbf{R}'$ *des idéaux de* $\mathbf{R}$ *et* $\mathbf{R}'$ *tels que* $\Phi(I) \subset I'$. *On note* $\mathbf{P} = \mathbf{R}/I$, $\mathbf{P}' = \mathbf{R}'/I'$, *et* $\chi : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ *le morphisme induit par* Φ . *On suppose que* $\mathbf{P}$ *est un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini, et que l'application canonique*

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}' &\to \mathbf{P}'\\ p \otimes a' &\to \chi(p)a'\end{aligned} \tag{33}$$

induite par Ψ *et* Φ *est bijective.*

Soit $\omega \in \wedge^q\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$. *Pour* $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \hom_{\mathbf{P}}(I/I^2, \mathbf{P})$ *et* $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_q \in \hom_{\mathbf{P}'}(I'/{I'}^2, \mathbf{P}')$ *tel que, pour tout* i, *le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{I}{I^2} & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & \dfrac{I'}{{I'}^2} \\ {\scriptstyle\alpha_i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\alpha'_i} \\ \mathbf{P} & \xrightarrow{\chi} & \mathbf{P}' \end{array} \tag{34}$$

où $\bar{\Phi}$ *est induit par* Φ, *soit commutatif on a:*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{A}',\mathbf{R}',\mathbf{P}'}\begin{bmatrix}\Omega_q(\Phi)(\omega)\\ \alpha'_1, \ldots, \alpha'_q\end{bmatrix} = \Psi(\mathrm{Res}_{\mathbf{A},\mathbf{R},\mathbf{P}}\begin{bmatrix}\omega\\ \alpha_1, \ldots, \alpha_q\end{bmatrix}). \tag{35}$$

La preuve de cette propriété est donnée dans [L] §2 , prop. (2.3).

En particulier, lorsque $\mathbf{R}' = \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}'$, Φ l'application canonique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}'$, et I' l'idéal engendré par $\Phi(I)$, alors les applications canoniques:

$$\begin{gathered}\mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}' \longrightarrow \mathbf{P}'\\ I/I^2 \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}' \longrightarrow I'/{I'}^2\end{gathered}$$

sont bijectives ([L] §2, cor. (2.4)). En identifiant $I/I^2 \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}'$ et $I'/{I'}^2$, on note pour $\alpha_i \in \hom_{\mathbf{P}}(I/I^2, \mathbf{P})$:

$$\alpha'_i = \alpha_i \otimes 1 \in \hom_{\mathbf{P}'}(I'/{I'}^2, \mathbf{P}'). \tag{36}$$

Les hypothèses de la proposition 3.5.1 sont alors vérifiées, et l'on obtient:

Corollaire 3.5.2. *(compatibilité au changement de base)*

On considère $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre commutative d'homomorphisme structural* h*,* I *un idéal de* $\mathbf{R}$ *tel que* $\mathbf{P} = \mathbf{R}/I$ *soit un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini, et* $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \hom_{\mathbf{P}}(I/I^2, \mathbf{P})$*. Soit* $\mathbf{A}'$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre commutative d'homomorphisme structural* Ψ*,* $\mathbf{R}' = \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}'$*, et* $I' = I\mathbf{R}'$*. Pour* $\omega \in \wedge^q \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$*, on a:*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{A}',\mathbf{R}',\mathbf{P}'} \begin{bmatrix} \Omega_q(\Phi)(\omega) \\ \alpha_1', \ldots, \alpha_q' \end{bmatrix} = \Psi(\mathrm{Res}_{\mathbf{A},\mathbf{R},\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \omega \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_q \end{bmatrix}) \tag{37}$$

où $\alpha_i' = \alpha_i \otimes 1$.

Lorsque I est engendré par une suite quasi-régulière, on obtient:

Corollaire 3.5.3.

Soient $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre plate,* $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *une suite quasi-régulière de* $\mathbf{R}$ *telle que* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *soit un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini, et* $\mathbf{A}'$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre commutative d'homomorphisme structural* Ψ*. On note* $\mathbf{R}' = \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}'$*, et* $I' = I\mathbf{R}'$*. Pour* $\omega \in \wedge^q \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$*, on a:*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}'/\mathbf{A}'} \begin{bmatrix} \Omega_q(\Phi)(\omega) \\ f_1', \ldots, f_q' \end{bmatrix} = \Psi(\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \omega \\ f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix}) \tag{38}$$

où $f_i' = f_i \otimes 1$.

Soit I un idéal de $\mathbf{R}$ engendré par une suite quasi-régulière $f_1, \ldots, f_q$ et $\hat{\mathbf{R}}$ le complété I-adique de $\mathbf{R}$. On note $\hat{f}_i$ l'image de f_i dans $\hat{\mathbf{R}}$, $\hat{I} = I\hat{\mathbf{R}}$, et $\hat{\omega}$ l'image de $\omega \in \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ dans $\Omega_{\hat{\mathbf{R}}/\mathbf{A}}$. On a $\dfrac{\mathbf{R}}{I} = \dfrac{\hat{\mathbf{R}}}{\hat{I}}$. Lorsque $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$, $\mathbf{R}' = \hat{\mathbf{R}}$, $I' = \hat{I}$, et Φ est l'injection canonique de $\mathbf{R}$ dans $\hat{\mathbf{R}}$, la proposition 3.5.1 donne:

Corollaire 3.5.4.

Soient $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *une suite quasi-régulière de* $\mathbf{R}$ *telle que* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *soit un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini, et* $\hat{\mathbf{R}}$ *le complété* I*-adique de* $\mathbf{R}$*.*

Pour tout $\omega \in \wedge^q \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$*:*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \omega \\ f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\hat{\mathbf{R}}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_q \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Proposition 3.5.5. *(Loi de transformation.)*

Soient $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *et* $g = (g_1, \ldots, g_q)$ *deux suites quasi-régulières de* $\mathbf{R}$ *telles que les* $\mathbf{A}$*-modules* $\dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *et* $\dfrac{\mathbf{R}}{g\mathbf{R}}$ *soient projectifs de type fini. On suppose de plus qu'il existe des* $a_{i,j} \in \mathbf{R}$ *tels que:*

$$g_i = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j} f_j \qquad 1 \leq i \leq q.$$

Alors pour tout $\omega \in \wedge^q \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$, *on a:*

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \omega \\ f_1, \dots, f_q \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \det(a_{i,j})\,\omega \\ g_1, \dots, g_q \end{bmatrix} \tag{40}$$

La preuve de cette propriété est donnée dans [L] §2 , cor. (2.8), lorsque les complexes de Koszul $\mathbf{K}(f_i)$ et $\mathbf{K}(g_i)$ sont exacts sauf au degré zéro.

Dans le cas particulier où les suites f et g sont régulières, les complexes de Koszul $\mathbf{K}(f_i)$ et $\mathbf{K}(g_i)$ sont exacts sauf au degré zéro (cf.[B1] chap.10, §9, th.1). Par [L] la proposition est, dans ce cas, vérifiée.

Dans le cas général où les suites f et g sont quasi-régulières, on considère $\hat{\mathbf{R}}$ le complété g-adique de $\mathbf{R}$. Pour $r \in \mathbf{R}$ on note $\hat{r}$ son image dans $\hat{\mathbf{R}}$. D'une part, d'après le corollaire (3.5.4) on a:

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \omega \\ g_1, \dots, g_q \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\hat{\mathbf{R}}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_q \end{bmatrix}$$

D'autre part, d'après la proposition (3.5.1):

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \omega \\ f_1, \dots, f_q \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\hat{\mathbf{R}}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_q \end{bmatrix}.$$

Les suites $\hat{f}$ et $\hat{g}$ étant régulières dans $\hat{\mathbf{R}}$ on a:

$$\operatorname{Res}_{\hat{\mathbf{R}}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_q \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\hat{\mathbf{R}}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \det(\hat{a}_{i,j})\,\hat{\omega} \\ \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_q \end{bmatrix},$$

et par conséquent:

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \omega \\ f_1, \dots, f_q \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \det(a_{i,j})\,\omega \\ g_1, \dots, g_q \end{bmatrix}. \quad \square$$

Les anneaux intervenant dans *la loi de transitivité* sont supposés unitaires, commutatifs, nœthériens. Soit $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre, et $\mathbf{S}$ une $\mathbf{R}$-algèbre. Les homomorphismes structuraux fournissent les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{S} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{A} & \xrightarrow[\mathrm{Id}_{\mathbf{A}}]{} & \mathbf{A} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{S} & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathbf{S}}} & \mathbf{S} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{A} & \longrightarrow & \mathbf{R} \end{array}$$

qui induisent les homomorphismes canoniques:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \longrightarrow \Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{A}} & \qquad & \Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{A}} \longrightarrow \Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{R}} \\ \omega_1 \longrightarrow \omega_1' & & \omega_2 \longrightarrow \omega_2'' \end{array} \quad . \tag{41}$$

On rappelle ci-dessous la définition d'un anneau localement en intersection complète. ([Ku2] appendice C)

Définition 3.5.6.

Un anneau local $(\mathbf{A}, m)$ *est en intersection complète, si il est nœthérien, et si son complété* m*-adique* $\hat{\mathbf{A}}$ *est isomorphe à un anneau* $\dfrac{\mathbf{B}}{\mathfrak{a}}$*, où* $\mathbf{B}$ *est un anneau local régulier et* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* $\mathbf{B}$ *engendré par une suite régulière.*

Un anneau $\mathbf{A}$ *est localement en intersection complète si* $\mathbf{A}_P$ *est en intersection complète pour tout* $P \in \operatorname{Spec}(\mathbf{A})$.

Proposition 3.5.7. *(Loi de transitivité.)*

Soient $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *une suite quasi-régulière de* $\mathbf{R}$ *telle que* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *soit un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini, et* $g = (g_1, \ldots, g_l)$ *une suite quasi-régulière de la* $\mathbf{R}$*-algèbre* $\mathbf{S}$ *telle que* $\mathbf{Q} = \dfrac{\mathbf{S}}{g\mathbf{S}}$ *soit un* $\mathbf{R}$*-module projectif de type fini. On suppose que* $(g_1, \ldots, g_l, f_1, \ldots, f_q)$ *est une suite quasi-régulière de* $\mathbf{S}$*, et que* $\mathbf{Q} = \dfrac{\mathbf{S}}{g\mathbf{S}}$ *est localement en intersection complète.*

Alors pour $\omega_1 \in \wedge^q \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ *et* $\omega_2 \in \wedge^l \Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{A}}$ *on a:*

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \omega_1' \wedge \omega_2 \\ f_1, \ldots, f_q, g_1, \ldots, g_l \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \omega_1 \operatorname{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{R}} \begin{bmatrix} \omega_2'' \\ g_1, \ldots, g_l \end{bmatrix} \\ f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix} \tag{42}$$

où $\omega_1' \in \wedge^l \Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{A}}$ *et* $\omega_2'' \in \wedge^l \Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{R}}$ *sont les images de* ω_1 *,* ω_2 *par les homomorphismes canoniques.*

Pour justifier l'écriture $\operatorname{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \omega_1' \wedge \omega_2 \\ f_1, \ldots, f_q, g_1, \ldots, g_l \end{bmatrix}$, il suffit de vérifier que $\dfrac{\mathbf{S}}{(f,g)}$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini. On a $\dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{R}} \dfrac{\mathbf{S}}{g\mathbf{S}} \simeq \dfrac{\mathbf{S}}{(f,g)\mathbf{S}}$. Comme $\dfrac{\mathbf{S}}{g\mathbf{S}}$ est un $\mathbf{R}$-module projectif de type fini, $\dfrac{\mathbf{S}}{(f,g)}$ est un $\mathbf{P}$-module projectif de type fini, donc plat. $\mathbf{P}$ étant un $\mathbf{A}$-module plat, car projectif, on a que $\dfrac{\mathbf{S}}{(f,g)\mathbf{S}}$ est un $\mathbf{A}$-module plat ([M2] 3,§7 p.46). $\mathbf{P}$ étant un $\mathbf{A}$-module de type fini, on a que $\dfrac{\mathbf{S}}{(f,g)\mathbf{S}}$ est un $\mathbf{A}$-module plat de type fini, par conséquent projectif ([B2] chap.II, §5, n^0 2, cor.2).

La preuve de l'égalité (42) est donnée dans [Hu] §7, th.7.8. On peut remplacer, dans la proposition, la condition $\mathbf{Q} = \mathbf{S}/g\mathbf{S}$ est localement en intersection complète par: $\mathbf{A}$ est réduit et $\mathbf{A}$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, ou encore $\mathbf{A}$ est réduit , 2 n'est pas un diviseur de zéro de $\mathbf{R}$, et $\wedge^1 \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ est un $\mathbf{R}$-module projectif de type fini. $\square$

§4. Comparaison des différentes approches

On montre dans ce paragraphe que lorsque les hypothèses pour l'existence du résidu défini via les algèbres de Gorenstein sont satisfaites, le résidu défini via l'homologie de Hochschild permet d'obtenir le résidu via les algèbres de Gorenstein. Indépendamment de ce résultat, on montre, par des méthodes plus élémentaires, que ces deux résidus fournissent le résidu intégral.

4.1. Le résidu via les algèbres de Gorenstein comme cas particulier du résidu via l'homologie de Hochschild.

Soient $\mathbf{A}$ un anneau , $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre plate d'homomorphisme structural h, et $f = (f_1, \ldots, f_q)$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ telle que le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{(f)}$ soit projectif de type fini. On suppose que le noyau J de $\tilde{\mu} : \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R} \to \mathbf{P}$ est engendré par une suite quasi-régulière $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_q)$. On note $\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ le module des différentielles de la $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{R}$. On peut définir d'une part la forme linéaire $\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \cdot\, \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix}$, et d'autre part pour tout $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_q) \in \Omega^q_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ la forme linéaire $\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \cdot\, \zeta_1.\zeta_2 \ldots \zeta_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{pmatrix}$. Soit $\Delta^f_\zeta \in \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}$ le Bezoutien de f par rapport à ζ, et $\delta^f_\zeta = \sum_{j=1}^M \alpha_j \otimes \beta_j \in \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}$ un représentant de Δ^f_ζ. On montrera dans ce paragraphe qu'il existe une suite $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_q) \in \Omega^q_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ telle que:

$$\forall h \in \mathbf{R}, \qquad \sum_{j=1}^M \alpha_j \,\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \beta_j\, \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix} \equiv h \quad (\text{modulo } f\mathbf{R}).$$

Il en résultera, d'après le corollaire 2.2.3, que les formes linéaires, nulles sur $f\mathbf{R}$, $\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \cdot\, \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix}$ et $\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \cdot\, \zeta_1.\zeta_2 \ldots \zeta_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{pmatrix}$ sont égales.

On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{\Psi} & \mathbf{P} \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta} \\ \mathbf{R} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{S} = \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R} \end{array} \tag{1}$$

où Ψ est l'application canonique de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{P}$ déduite du morphisme structural h, $\eta(\bar{x}) = \bar{x} \otimes 1$, et $\Phi(r) = 1 \otimes r$. Ce diagramme induit une application $\mathbf{R}$-linéaire canonique ([B1],chap.III, §10, prop.19):

$$\begin{aligned} \Omega(\Phi) : \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} &\longrightarrow \Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \\ \alpha\, \mathrm{d}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}(r) &\longrightarrow 1 \otimes \alpha\, \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(1 \otimes r) \ . \end{aligned} \tag{2}$$

$\Omega(\Phi)$ induit un isomorphisme $\mathbf{S}$-linéaire canonique ([B1],chap.III, §10, prop.20):

$$\begin{aligned} \Omega_0(\Phi) : \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{S} &\longrightarrow \Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \\ \mathrm{d}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}(r) \otimes s &\longrightarrow s\, \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(1 \otimes r) \ . \end{aligned} \tag{3}$$

$\mathbf{P}$ étant muni de sa structure de $\mathbf{S}$-algèbre via le morphisme $\tilde{\mu}$, l'isomorphisme $\Omega_0(\Phi)$ permet d'obtenir:

$$\Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \otimes_{\mathbf{S}} \mathbf{P} \simeq \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{P} \simeq \frac{\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}}{f\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}} \ . \tag{4}$$

Lemme 4.1.1.
Pour tout élément $\zeta \in J$, il existe $\omega \in \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ tel que:

$$\Omega(\Phi)(\omega) = \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta) \ \ (\textit{modulo } J\Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}) \ . \tag{5}$$

Preuve.
On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \mathbf{A} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \Psi \\ \mathbf{S} = \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R} & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \mathbf{P} \end{array} \tag{6}$$

$\tilde{\mu}$ étant surjective, l'application $\mathbf{S}$-linéaire composée ([B1],chap.III, §10, N^0 12):

$$\begin{aligned} \mathrm{d}' : J &\xrightarrow{\mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}} \Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \longrightarrow \Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \otimes_{\mathbf{S}} \mathbf{P} \\ \zeta &\longrightarrow \mathrm{d}(\zeta) \longrightarrow \mathrm{d}(\zeta) \otimes 1 \end{aligned} \tag{7}$$

induit, par passage au quotient, une application $\mathbf{P}$-linéaire:

$$\bar{\mathrm{d}} : \frac{J}{J^2} \longrightarrow \Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \otimes_{\mathbf{S}} \mathbf{P} \qquad . \tag{8}$$

D'après (4), $\Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \otimes_{\mathbf{S}} \mathbf{P} \simeq \dfrac{\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}}{f\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}}$, d'où l'application:

$$\Theta : \frac{J}{J^2} \longrightarrow \frac{\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}}{f\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}} \qquad . \tag{9}$$

déduite de $\bar{\mathrm{d}}$. Θ est un isomorphisme de $\mathbf{P}$-module ([Ho] lemme 1.1).

Soit $\zeta \in J$ d'image $\bar{\zeta}$ dans J/J^2, et $\omega \in \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ un représentant de $\Theta(\bar{\zeta})$. D'après les constructions précédentes, on a dans $\Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \otimes_{\mathbf{S}} \mathbf{P}$ l'égalité

$$\Omega(\Phi)(\omega) \otimes 1 = \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta) \otimes 1 \qquad , \tag{10}$$

et par conséquent:

$$\Omega(\Phi)(\omega) = \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta) \ \ (\text{modulo } J\Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}) \ . \quad \square$$

Proposition 4.1.2. *(Egalité des résidus)*

Soient $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre plate, et* $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *une suite quasi-régulière de* $\mathbf{R}$ *telle que le* $\mathbf{A}$*-module* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *soit projectif de type fini. On suppose que le noyau* J *de* $\tilde{\mu} : \mathbf{S} = \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R} \to \mathbf{P}$ *est engendré par une suite quasi-régulière* $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_q)$*. On note* $\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \cdot\ \zeta_1.\zeta_2 \ldots \zeta_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{pmatrix}$ *le résidu par rapport à* f *et* ζ *défini via la* $\mathbf{A}$*-algèbre de Gorenstein* $\mathbf{P}$*. On considère une suite* $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_q)$ *de* $\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ *telle que*

$$\Omega(\Phi)(\omega_j) = \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_j) \ \ (\textit{modulo } J\Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}) \qquad j = 1, \ldots, q\ .$$

Alors

$$\forall r \in \mathbf{R}, \qquad \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} r\,\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{pmatrix} r\,\zeta_1.\zeta_2 \ldots \zeta_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{pmatrix}\ . \tag{11}$$

Preuve.

On considère sur $\mathbf{S}$, muni de sa structure de $\mathbf{P}$-module d'homomorphisme structural $\eta : p \to p \otimes 1$, les suites quasi-régulières $(1 \otimes f_1, \ldots, 1 \otimes f_q)$, et $(\zeta_1, \ldots, \zeta_q)$. Chacune de ces suites permet de définir, via l'homologie de Hochschild, un résidu sur $\mathbf{S}$.

En effet, on a d'une part $\dfrac{\mathbf{S}}{(1 \otimes f)\mathbf{S}} \simeq \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}$. $\mathbf{P}$ étant un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, $\mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}$ est un $\mathbf{P}$-module projectif ([B1],chap. II, §5, prop. 4) de type fini. On peut par conséquent définir sur $\mathbf{S}$, la forme linéaire:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \cdot\ \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_q) \\ 1 \otimes f_1, \ldots, 1 \otimes f_q \end{bmatrix}\ .$$

On a d'autre part, ζ engendrant le noyau J de $\tilde{\mu}$, $\dfrac{\mathbf{S}}{\zeta\mathbf{S}} \simeq \mathbf{P}$. Par conséquent $\dfrac{\mathbf{S}}{\zeta\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{S}}$ est un $\mathbf{P}$-module libre de rang 1, et on peut considérer sur $\mathbf{S}$ la forme linéaire:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \cdot\ \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_q) \\ \zeta_1, \ldots, \zeta_q \end{bmatrix}\ .$$

En notant $\sigma_{\tilde{\mathbf{S}}/\mathbf{P}}$ la trace canonique de la $\mathbf{P}$-algèbre $\tilde{\mathbf{S}}$ (déf. 2.1.7), on a, comme conséquence directe du théorème 3.4.1

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \cdot\ \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_q) \\ \zeta_1, \ldots, \zeta_q \end{bmatrix} = \sigma_{\tilde{\mathbf{S}}/\mathbf{P}} \circ \tilde{\mu}\ .$$

Par conséquent, $\dfrac{\mathbf{S}}{\zeta\mathbf{S}}$ étant un $\mathbf{P}$-module libre de rang 1, on a pour tout $\bar{h} \in \tilde{\mathbf{S}}$, $\sigma_{\tilde{\mathbf{S}}/\mathbf{P}}(\bar{h}) = \bar{h}$ et:

$$\forall h \in \mathbf{R}, \qquad \mathrm{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \bar{h} \otimes 1\ \ \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_q) \\ \zeta_1, \ldots, \zeta_q \end{bmatrix} = \bar{h}\ .$$

Comme $(\bar{h} \otimes 1 - 1 \otimes h) \in J$,

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \bar{h} \otimes 1 \;\; \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_q) \\ \zeta_1, \ldots, \zeta_q \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \begin{bmatrix} 1 \otimes h \;\; \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_q) \\ \zeta_1, \ldots, \zeta_q \end{bmatrix} ,$$

par conséquent:

$$\forall h \in \mathbf{R}, \qquad \mathrm{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \begin{bmatrix} 1 \otimes h \;\; \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_q) \\ \zeta_1, \ldots, \zeta_q \end{bmatrix} = \bar{h} \,. \tag{12}$$

Comme

$$\begin{cases} 1 \otimes f_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} \zeta_j & (i = 1, \ldots, q) \\ \Delta_f^\zeta = \det(a_{i,j}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{M} \bar{\alpha_j} \otimes \beta_j \ , \end{cases}$$

la loi de transformation donne:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \begin{bmatrix} 1 \otimes h \; \Delta_\zeta^f \;\; \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_q) \\ 1 \otimes f_1, \ldots, 1 \otimes f_q \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \begin{bmatrix} 1 \otimes h \;\; \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_q) \\ \zeta_1, \ldots, \zeta_q \end{bmatrix} . \tag{13}$$

On a

$$\Omega(\Phi)(\omega_j) = \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_j) \;\; (\text{modulo } J\Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}) \qquad j = 1, \ldots, q \ ,$$

par conséquent, d'après la règle de Cramer,

$$\Delta_\zeta^f \wedge_{j=1}^q \Omega(\Phi)(\omega_j) = \Delta_\zeta^f \wedge_{j=1}^q \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_j) \;\; (\text{modulo } (1 \otimes f) \wedge^q \Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{P}})$$

ce qui permet d'obtenir l'égalité:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \begin{bmatrix} 1 \otimes h \; \Delta_\zeta^f \;\; \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_q) \\ 1 \otimes f_1, \ldots, 1 \otimes f_q \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \begin{bmatrix} 1 \otimes h \; \Delta_\zeta^f \; \Omega(\Phi)(\omega_1) \wedge \cdots \wedge \Omega(\Phi)(\omega_q) \\ 1 \otimes f_1, \ldots, 1 \otimes f_q \end{bmatrix} . \tag{14}$$

A partir des formules (12), (13), (14) on obtient:

$$\sum_{j=1}^{M} \bar{\alpha_j} \, \mathrm{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \begin{bmatrix} 1 \otimes \beta_j h \; \Omega(\Phi)(\omega_1) \wedge \cdots \wedge \Omega(\Phi)(\omega_q) \\ 1 \otimes f_1, \ldots, 1 \otimes f_q \end{bmatrix} = \bar{h} \ . \tag{15}$$

D'après la formule de compatibilité du résidu au changement de base (corollaire 3.5.3)

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \begin{bmatrix} 1 \otimes \beta_j h \; \Omega(\Phi)(\omega_1) \wedge \cdots \wedge \Omega(\Phi)(\omega_q) \\ 1 \otimes f_1, \ldots, 1 \otimes f_q \end{bmatrix} = \Psi \left(\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \beta_j h \; \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix} \right) \ ,$$

par conséquent:

$$\sum_{j=1}^{M} \alpha_j \, \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \beta_j h \; \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix} \equiv h \quad (\text{modulo } f\mathbf{R}) \ . \tag{16}$$

P étant une **A**-algèbre de Gorenstein, il existe suivant le corollaire 2.2.3, une seule forme linéaire sur **R**, nulle sur $f\mathbf{R}$, qui vérifie (16), on obtient par conséquent

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \cdot \, \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \cdot \, \zeta_1 . \zeta_2 \ldots \zeta_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{pmatrix} . \quad \square$$

On a en outre obtenu

Corollaire 4.1.3.
Pour tout $h \in \mathbf{R}$ *:*

$$\sum_{j=1}^{M} \alpha_j \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \beta_j h\ \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix} \equiv h \quad (\textit{modulo } f\mathbf{R}) \ .$$

4.2. Le résidu intégral comme cas particulier du résidu via les algèbres de Gorenstein et du résidu via l'homologie de Hochschild.

Indépendamment du résultat obtenu dans la proposition 4.1.2 (égalité des résidus), on montre dans ce paragraphe que les constructions algébriques précédentes des résidus recouvrent la définition analytique du résidu intégral.

Soit $P = (P_1, \ldots, P_q)$ une suite d'éléments de $\mathbf{R} = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_q]$ (resp. $\mathbb{C}\{X_1, \ldots, X_q\}$) qui définit une variété non vide finie de $\mathbb{C}^q$ (resp. définit l'origine comme zéro isolé). On peut définir (§1) pour tout $h \in \mathbb{C}[X]$ (resp. $\mathbb{C}\{X\}$) le résidu intégral global

$$\operatorname{Res}_P(h) \tag{17}$$

(resp. local $\operatorname{Res}_{P,0}(h)$). On notera par la suite le résidu intégral local et global par $\operatorname{Res}_P(h)$.

P définissant une variété non vide finie de $\mathbb{C}^q$ (resp. définit l'origine comme zéro isolé), P est une suite quasi-régulière de $\mathbb{C}[X]$ (cf. appendice A) (resp. une suite régulière de $\mathbb{C}\{X\}$ (cf. [G])). De plus $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{(P)}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On peut par conséquent définir le résidu, via l'homologie de Hochschild,

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbb{C}} \begin{bmatrix} .\, dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_q \\ P_1, \ldots, P_q \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Comme on l'a montré dans l'exemple 2.2.4, le noyau de

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} : \frac{\mathbb{C} < X >}{(f)} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} < Y > &\longrightarrow \frac{\mathbb{C} < X >}{(f)} \\ \bar{X}_i &\longrightarrow \bar{X}_i \\ Y_i &\longrightarrow \bar{Y}_i \end{aligned}$$

où $\mathbb{C} < X >$ désigne $\mathbb{C}[X]$ ou $\mathbb{C}\{X\}$, est engendré par la suite quasi-régulière $\zeta = (\bar{X}_1 - Y_1, \ldots \bar{X}_q - Y_q)$. On peut par conséquent définir le résidu, via les algèbres de Gorenstein

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbb{C}} \begin{pmatrix} .\, \zeta_1 \ldots \zeta_q \\ P_1, \ldots, P_q \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Sans faire appel à la proposition (4.1.2), on montre, ci-dessous, que les résidus définis par (17),(18) et (19) sont égaux.

Lorsque les éléments P_i ne dépendent que de X_i, les exemples 1.3.3, 2.2.4 et 3.3.3, prouvent que les résidus définis en (17),(18) et (19) sont égaux. On montre ci-dessous que dans le cas général, la loi de transformation, qui est une propriété vérifiée pour ces trois résidus, permet de se ramener à ce cas particulier.

Lorsque $P \subset \mathbb{C}[X]$ (resp. $\mathbb{C}\{X\}$) on note $\{a_1, \ldots, a_m\}$ où $a_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,q}) \in \mathbb{C}^q$, les zéros de la variété (resp. l'origine est un zéro isolé). On considère

$$S_j(X) = (X_j - a_{1,j}) \ldots (X_j - a_{m,j}) \qquad (j = 1, \ldots, q) \ . \tag{20}$$

$$(\text{ resp. } S_j(X) = X_j \qquad (j = 1, \ldots, q) \ .)$$

D'après le Nullstellensatz, il existe des entiers $n_j > 0$ tels que

$$R_j(X) := (S_j(X))^{n_j} \in I \tag{21}$$

$$(resp. \quad R_j(X) := X_j^{n_j} \in I \quad) \tag{22}$$

il existe donc des $a_{i,j}(X) \in \mathbf{R}$ tels que:

$$R_j(X) = \sum_{1 \leq i \leq q} a_{i,j}(X) P_i(X) \tag{23}$$

en posant $A(X) = (a_{i,j}(X))_{1 \leq i,j \leq q} \in \mathcal{M}_q(\mathbf{R})$ on a:

$$R(X) = A(X) F(X) \ . \tag{24}$$

Le résidu intégral vérifiant la loi de transformation, pour $Q(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ (resp. $\mathbb{C}\{X\}$) on a:

$$\mathrm{Res}_P(Q(X)) = \mathrm{Res}_R(\det(A(X)) Q(X)) \ . \tag{25}$$

D'autre part les résidus, via l'homologie de Hochschild et via les algèbres de Gorenstein, vérifient la loi de transformation. Par conséquent:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbb{C}} \begin{bmatrix} Q(X) dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_q \\ P_1(X), \ldots, P_q(X) \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbb{C}} \begin{bmatrix} Q(X) \det A(X) dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_q \\ R_1(X), \ldots, R_q(X) \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbb{C}} \begin{pmatrix} Q(X)\, \zeta_1 \ldots \zeta_q \\ P_1(X), \ldots, P_q(X) \end{pmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbb{C}} \begin{pmatrix} Q(X) \det A(X)\, \zeta_1 \ldots \zeta_q \\ R_1(X), \ldots, R_q(X) \end{pmatrix} \tag{27}$$

Par construction $R(X) \in \mathbb{C} < X_i >$, donc d'après les exemples 1.3.3, 2.2.4 et 3.3.3, on a:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_R(\det(A(X)) Q(X)) &= \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbb{C}} \begin{bmatrix} Q(X) \det A(X) dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_q \\ R_1(X), \ldots, R_q(X) \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbb{C}} \begin{pmatrix} Q(X) \det A(X)\, \zeta_1 \ldots \zeta_q \\ R_1(X), \ldots, R_q(X) \end{pmatrix} \ , \end{aligned} \tag{28}$$

par conséquent d'après (25) , (26) ,(27):

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_P(Q(X)) &= \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbb{C}} \begin{bmatrix} Q(X) dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_q \\ P_1(X), \ldots, P_q(X) \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbb{C}} \begin{pmatrix} Q(X)\, \zeta_1 \ldots \zeta_q \\ P_1(X), \ldots, P_q(X) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{29}$$

ce qui prouve que le résidu, via l'homologie de Hochschild, et le résidu, via les algèbres de Gorenstein, fournissent le résidu intégral.

.

CHAPITRE II

CERTAINES LOIS DE TRANSFORMATION

§1. Une généralisation de la loi de transformation pour les résidus

1.1. Introduction.

Soient $\mathbf{A}$ un anneau commutatif unitaire, $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre commutative, $f = (f_1, \dots, f_q)$ et $g = (g_1, \dots, g_q)$ deux suites quasi-régulières de $\mathbf{R}$, telles que les $\mathbf{A}$-modules $\dfrac{\mathbf{R}}{(f_1 \dots f_q)}$ et $\dfrac{\mathbf{R}}{(g_1 \dots g_q)}$ soient projectifs de type fini. On suppose qu'il existe une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq q} \in \mathcal{M}_q(\mathbf{R})$ telle que:

$$g = Af \; . \tag{1}$$

D'après la loi de transformation (chap. I; prop. 3.5.5), pour tout $\omega \in \wedge^q \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$, on a:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \omega \\ f_1, \dots, f_q \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \det(A)\omega \\ g_1, \dots, g_q \end{bmatrix} \; . \tag{2}$$

L'utilité d'une telle "loi" est bien connue, cependant certaines démonstrations, comme celle proposée dans la preuve d'un Nullstellensatz effectif sur un corps de caractéristique quelconque dans [B-Y$_3$], ou encore, dans le cadre analytique les calculs effectués dans [El] ou [K], nécessitent d'exprimer le résidu par rapport à $(f_1^{\beta_1+1}, \dots, f_q^{\beta_q+1})$ où $(\beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{N}^q$, en fonction d'une somme de résidus par rapport à $(g_1^{\alpha_1+1}, \dots, g_q^{\alpha_q+1})$ où $(\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in \mathbb{N}^q$, ce que permet seulement la loi de transformation lorsque $\beta_i = 0$ pour tout i.

Lorsque $\mathbf{R} = \mathcal{O}_q$, l'article [K] d'une part, le livre [T] d'autre part proposent la formule:

$$c_{i_1 \dots i_m} \int_{\Gamma_f} \frac{h dz}{f_{i_1} \dots f_{i_m} f^I} = \sum_{j_1, \dots, j_m = 1}^{q} c_{j_1 \dots j_m} \int_{\Gamma_g} \frac{h \det A a_{j_1, i_1} \dots a_{j_m, i_m} dz}{g_{j_1} \dots g_{j_m} g^I} \tag{3}$$

où $f^I = f_1 \dots f_q$ et $c_{i_1 \dots i_m} = \alpha_1! \dots \alpha_q!$, α_k désignant le nombre de fois où k apparaît dans la liste $(i_1, \dots, i_m)$. Cette formule, proposée dans le cas général, est uniquement démontrée dans le cas où f et g ont un Jacobien non nul en 0.

Il est présenté ci-dessous une preuve analytique complète de (3). En fait cette formule peut prendre sa place dans la théorie algébrique des résidus développée via

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

l'homologie de Hochschild. Une démonstration en est donnée dans le paragraphe 1.4.

La preuve analytique, présentée dans le paragraphe 1.2, utilise des formules de représentations intégrales de type Bochner-Martinelli (cf. [A-Y], [C], ou [Y]). L'idée de cette preuve est due à A. Yger, elle contient par ailleurs une méthode de démonstration originale de la loi de transformation (cf. [Y]). On se place dans le cadre de $\mathcal{O}_q$ et des suites $f = (f_1, \ldots, f_q)$ et $g = (g_1, \ldots, g_q)$ régulières, mais la preuve est aussi valable dans le cadre de $\mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_q]$ et des suites $f = (f_1, \ldots, f_q)$ et $g = (g_1, \ldots, g_q)$ de $\mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_q]$ qui définissent une variété discrète non vide de $\mathbb{C}^q$. On peut montrer que de telles suites sont quasi-régulières (cf appendice). On fera appel dans ce paragraphe à une formule de représentation intégrale de Leray que l'on rappelle ci-dessous ([A-Y] chap. I, §3, cor. 3.6; ou [C] chap. III, §10, th. 2):

théorème 1.1.1. *(Leray)*

Soient $D \subset \mathbb{C}^q$ un domaine borné à bord différentiable par morceaux, W un voisinage de ∂D et $s = (s_1, \ldots, s_q) : W \to \mathbb{C}^q$ une fonction vectorielle différentiable sur ∂D telle que:

$$\forall z \in D, \ \forall \zeta \in \partial D, \qquad \langle s(\zeta), \zeta - z \rangle \neq 0 \ .$$

où $\langle s(\zeta), \zeta - z\rangle = \sum_{i=1}^q s_i(\zeta)(\zeta_i - z_i)$.

Alors pour toute fonction h, holomorphe sur D et continue sur ∂D, on a sur D la formule de Leray

$$h(z) = \frac{(q-1)!}{(2i\pi)^q} \int_{\partial D} h(\zeta) \frac{\sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} s_k \, \mathrm{d}\, s_{[k]} \wedge \mathrm{d}\,\zeta}{\langle s(\zeta), \zeta - z\rangle^q} \ , \tag{4}$$

où $\mathrm{d}\, s_{[k]} = \wedge_{j \neq k} \mathrm{d}\, s_j$.

Pour la preuve algébrique, présentée dans le paragraphe 1.4, on se place dans le cadre général d'une **A**-algèbre commutative **R** où **A** est un anneau commutatif, et l'on utilise la définition du résidu obtenu via l'homologie de Hochschild. Dans le cas particulier où l'on choisit $\mathbf{R} = \mathcal{O}_q$ ou bien $\mathbf{R} = \mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_q]$ et pour éléments de **R**, $X_1 = Z_1, \ldots, X_q = Z_q$, le théorème 1.4.3 fournit le théorème 1.2.1 du paragraphe 1.2.

Les résultats de ce paragraphe ont fait l'objet d'une publication au bulletin de la S.M.F. ([B-H$_1$]).

1.2. Une preuve analytique de la loi de transformation généralisée.

Théorème 1.2.1. *Soient $f = (f_1, \ldots, f_q)$ et $g = (g_1, \ldots, g_q)$ deux suites régulières de $\mathcal{O}_q$ telles que $g = Af$ où $A \in \mathcal{M}_q(\mathcal{O}_q)$. Pour $(\beta_1, \ldots, \beta_q) \in \mathbb{N}^q$ et $h \in \mathcal{O}_q$ on a:*

$$\mathrm{Res}_{(f_1^{\beta_1+1}, \ldots, f_q^{\beta_q+1}, 0)}(h) = \sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{q,1}=\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{1,q}+\cdots+\alpha_{q,q}=\beta_q}} \frac{C(\beta,\alpha)}{\beta!} \mathrm{Res}_{((g_k^{\alpha_{k,1}+\cdots+\alpha_{k,q}+1})_{1\le k\le q}, 0)} \left(h \det A \prod_{i,j=1}^q a_{i,j}^{\alpha_{i,j}} \right) \tag{5}$$

où $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_q)$, $\alpha = (\alpha_{i,j})_{1\leq i,j\leq q}$, *et* $C(\beta,\alpha)$ *est le coefficient binomial:*
$\binom{\beta_1}{\alpha_{1,1};\ldots;\alpha_{q,1}} \ldots \binom{\beta_q}{\alpha_{1,q};\ldots;\alpha_{q,q}}(\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{1,q})!\ldots(\alpha_{q,1}+\cdots+\alpha_{q,q})!$
avec: $\binom{\beta_k}{\alpha_{1,k};\ldots;\alpha_{q,k}} = \frac{\beta_k!}{\alpha_{1,k}!\ldots\alpha_{q,k}!}$

Preuve de 1.2.1.

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^q$, contenant 0, sur lequel on peut choisir des représentants des germes des fonctions holomorphes en jeu dans le théorème. On notera de la même manière les représentants et les germes, et quitte à réduire U, on peut supposer que f et g admettent l'origine pour seul zéro. Le théorème est une conséquence de la proposition suivante, qui peut avoir un intérêt pour elle même:

Proposition 1.2.2.

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^q$ contenant $B(0,\rho)$, W un voisinage de $\partial B(0,\rho)$ inclus dans U, $f = (f_1, \ldots, f_q)$ des fonctions holomorphes sur U qui admettent pour seul zéro l'origine et s une fonction de classe C^1 sur W qui vérifie:

$$\langle s(\zeta), f(\zeta)\rangle = \sum_{k=1}^{q} s_k(\zeta) f_k(\zeta) \neq 0$$

pour $\zeta \in W$. Pour toute fonction h holomorphe sur U et tout $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_q) \in \mathbb{N}^q$ on a:

$$\operatorname{Res}_{(f_1^{\beta_1+1},\ldots,f_q^{\beta_q+1},0)}(h) = \frac{(q-1+|\beta|)!(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}}{\beta!(2i\pi)^q} \int_{|\zeta|=\rho} h \prod_{j=1}^{q} s_j^{\beta_j} \frac{\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k-1} s_k ds_{[k]} \bigwedge d\zeta}{\langle s(\zeta), f(\zeta)\rangle^{q+|\beta|}} \tag{6}$$

où $ds_{[k]} = \bigwedge_{j\neq k} ds_j$

Le théorème est une conséquence facile de cette proposition. En effet, on choisit s défini par $s_k = \sum_{j=1}^{q} a_{j,k}\overline{g_j}$ pour $1 \leq k \leq q$ et $\rho > 0$ tel que $B(0,\rho) \subset U$. Pour $\zeta \in \partial B(0,\rho)$ on a:

$$\begin{aligned} \langle s(\zeta), f(\zeta)\rangle &= \langle {}^t A(\zeta)\bar{g}(\zeta), f(\zeta)\rangle \\ &= \langle \bar{g}(\zeta), A(\zeta) f(\zeta)\rangle \\ &= ||g(\zeta)||^2 \end{aligned} \tag{7}$$

En notant $K(q,\beta) = \dfrac{(q-1+|\beta|)!(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}}{(2i\pi)^q}$ la proposition 1.2.2 donne:

$$\begin{aligned} &\beta! \operatorname{Res}_{(f_1^{\beta_1+1},\ldots,f_q^{\beta_q+1},0)}(h) \\ &= K(q,\beta) \int_{|\zeta|=\rho} h \prod_{k=1}^{q} (\sum_{j=1}^{q} a_{j,k}\overline{g_j})^{\beta_k} \frac{\det A \sum_{k=1}^{q}(-1)^{k-1}\overline{g_k} d\overline{g}_{[k]} \bigwedge d\zeta}{\langle s(\zeta), f(\zeta)\rangle^{q+|\beta|}} \\ &= K(q,\beta) \int_{|\zeta|=\rho} h \prod_{k=1}^{q} (\sum_{j=1}^{q} a_{j,k}\overline{g_j})^{\beta_k} \frac{\det A \sum_{k=1}^{q}(-1)^{k-1}\overline{g_k} d\overline{g}_{[k]} \bigwedge d\zeta}{||g||^{2(q+|\beta|)}} . \end{aligned} \tag{8}$$

En développant, le second membre de (8) s'écrit:

$$K(q,\beta)\int_{|\zeta|=\rho} h\prod_{k=1}^{q}\left(\sum_{\alpha_{1,k}+\cdots+\alpha_{q,k}=\beta_k}\binom{\beta_k}{\alpha_{1,k};\ldots;\alpha_{q,k}}\prod_{j=1}^{q}a_{j,k}^{\alpha_{j,k}}\overline{g}_j^{\alpha_{j,k}}\right)\frac{\det A\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k-1}\overline{g_k}d\overline{g}_{[k]}\bigwedge d\zeta}{\|g\|^{2(q+|\beta|)}}$$

$$= K(q,\beta)\int_{|\zeta|=\rho}\sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{q,1}=\beta_1\\ \vdots \\ \alpha_{1,q}+\cdots+\alpha_{q,q}=\beta_q}}\frac{C(\beta,\alpha)}{\prod_{k=1}^{q}(\alpha_{k,1}+\cdots+\alpha_{k,q})!}(h\det A\prod_{i,j=1}^{q}a_{i,j}^{\alpha_{i,j}})\prod_{k=1}^{q}\overline{g}_k^{(\alpha_{k,1}+\cdots+\alpha_{k,q})}\frac{\Omega_g}{\|g\|^{2(q+|\beta|)}} \qquad (9)$$

où $\Omega_g=\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k-1}\overline{g_k}d\overline{g}_{[k]}\bigwedge d\zeta$.

On peut appliquer à chaque terme de (9) la proposition 1.2.2 où f est remplacé par g et s par $\overline{g}$, on obtient:

$$\sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{q,1}=\beta_1\\ \vdots \\ \alpha_{1,q}+\cdots+\alpha_{q,q}=\beta_q}} C(\beta,\alpha)\operatorname{Res}_{((g_k^{\alpha_{k,1}+\cdots+\alpha_{k,q}+1})_{1\le k\le q},0)}\left(h\det A\prod_{i,j=1}^{q}a_{i,j}^{\alpha_{i,j}}\right)$$

ce qui termine la preuve du théorème. $\square$

Remarque 1.2.3 Les formulations proposées en (3) et (5) sont différentes mais elles contiennent les mêmes informations. En effet dans (3) on peut supposer que $1\le i_1\le\cdots\le i_m$, on note β_k le nombre de fois qu'apparait k dans la liste $(i_1,\ldots,i_m)$ et l'on choisit $(j_1,\ldots,j_m)\in(\mathbb{N}^*)^q$ où $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}-\{0\}$. On peut écrire:

$$\frac{a_{j_1,i_1}\ldots a_{j_m,i_m}}{g_{j_1}\cdots g_{j_m}}=\prod_{\substack{1\le j\le\beta_k\\1\le k\le q\\ \beta_k\neq 0}}\frac{a_{\sigma_k(j),k}}{g_{\sigma_k(j)}} \qquad (10)$$

où σ_k est une application de $[[1,\beta_k]]$ dans $[[1,q]]$. En notant $\alpha_{s,k}$ le nombre de fois que l'application α_k prend la valeur s, (10) s'écrit: $\prod_{\substack{1\le k,s\le q\\ \beta_k\neq 0}}\frac{a_{s,k}^{\alpha_{s,k}}}{g_s^{\alpha_{s,k}}}$.

Or pour $\beta_k\neq 0$ il existe $\binom{\beta_k}{\alpha_{1,k};\ldots;\alpha_{q,k}}$ applications de $[[1,\beta_k]]$ dans $[[1,q]]$ qui prennent $\alpha_{s,k}$ fois la valeur s, et donc dans (3) on a $\binom{\beta_1}{\alpha_{1,1};\ldots;\alpha_{q,1}}\ldots\binom{\beta_q}{\alpha_{1,q};\ldots;\alpha_{q,q}}$ termes identiques à $\int_{\Gamma_g}\frac{h\det A a_{j_1,i_1}\ldots a_{j_m,i_m}dz}{g_{j_1}\cdots g_{j_m}g^I}$. D'autre part $c_{j_1\ldots\, j_m}=(\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{1,q})!\ldots(\alpha_{q,1}+\cdots+\alpha_{q,q})!$ et $c_{i_1\ldots\, i_m}=\beta!$ ce qui prouve que (3) peut s'écrire comme (5).

Preuve de la proposition 1.2.2.

Dans un premier temps on prouve que (6) ne dépend pas de la section s choisie, puis la preuve est faite lorsque f a un Jacobien qui ne s'annule pas sur U et enfin pour f quelconque.

Soit $0 < \rho_1 < \rho$ tel que $\partial B(0, \rho) \subset W$ et $\mathcal{X}$ une fonction de classe C^1 sur U qui prend la valeur 0 sur un voisinage de $\partial B(0, \rho_1)$ et 1 sur un voisinage de $\partial B(0, \rho)$, on pose pour $\zeta \in U - \{0\}$:

$$\tilde{s}(\zeta) = \mathcal{X}(\zeta)\frac{s(\zeta)}{\langle s(\zeta), f(\zeta)\rangle} + (1 - \mathcal{X}(\zeta))\frac{\overline{f}(\zeta)}{\langle \overline{f}(\zeta), f(\zeta)\rangle} \tag{11}$$

où $\langle s(\zeta), f(\zeta)\rangle = \sum_{k=1}^{q} s_k(\zeta) f_k(\zeta)$

On a: $\langle \tilde{s}(\zeta), f(\zeta)\rangle = 1$ donc $\overline{\partial}\tilde{s} = \bigwedge_{k=1}^{q} \overline{\partial}\tilde{s}_k = 0$.

En particulier on obtient

$$d\left(\prod_{j=1}^{q} \tilde{s}_j^{\beta_j} \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \tilde{s}_k^{\beta_k} d\tilde{s}_{[k]} \bigwedge d\zeta\right) = \overline{\partial}\left(\sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} (\prod_{j\neq k} \tilde{s}_j^{\beta_j}) \tilde{s}_k^{\beta_k+1} d\tilde{s}_{[k]} \bigwedge d\zeta\right) = 0 \ ,$$

ce qui prouve que la forme:

$$h\Omega_{\tilde{s}} := h\prod_{j=1}^{q} \tilde{s}_j^{\beta_j} \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \tilde{s}_k^{\beta_k} d\tilde{s}_{[k]} \bigwedge d\zeta$$

est fermée sur $U - \{0\}$. En utilisant le théorème de Stokes on a

$$\int_{|\zeta|=\rho} h\Omega_{\tilde{s}} = \int_{|\zeta|=\rho_1} h\Omega_{\tilde{s}} \ ,$$

c'est-à-dire:

$$\int_{|\zeta|=\rho} h \prod_{j=1}^{q} s_j^{\beta_j} \frac{\sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} s_k ds_{[k]} \bigwedge d\zeta}{\langle s(\zeta), f(\zeta)\rangle^{q+|\beta|}} = \int_{|\zeta|=\rho_1} h \prod_{j=1}^{q} \overline{f}_j^{\beta_j} \frac{\sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \overline{f}_k d\overline{f}_{[k]} \bigwedge d\zeta}{\langle \overline{f}(\zeta), f(\zeta)\rangle^{q+|\beta|}} \ .$$

Ceci prouve que la valeur de l'intégrale (6) ne dépend pas de la section s.

Pour démontrer la proposition dans le cas où f a un Jacobien qui ne s'annule pas sur U, on considère f comme un système de coordonnées sur U.

D'une part, d'après la formule de Cauchy, on a:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{(f_1^{\beta_1+1}, \ldots, f_q^{\beta_q+1}, 0)}(h) &= \frac{1}{(2i\pi)^q} \int_{\Gamma f} \frac{h(\zeta) d\zeta}{f_1^{\beta_1+1} \ldots f_q^{\beta_q+1}} \\
&= \frac{1}{(2i\pi)^q} \int_{\Gamma f} \frac{\left(\dfrac{h}{det\frac{\partial f}{\partial \zeta}}\right)}{f_1^{\beta_1+1} \ldots f_q^{\beta_q+1}} df = \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|}\left(\dfrac{h}{det\frac{\partial f}{\partial \zeta}}\right)}{\partial f^{\beta}}(0)
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après la formule de Leray (prop. 1.1.1), pour $f_0 \in \mathbb{C}^q$ proche de 0, on a:

$$\left(\frac{h}{det\frac{\partial f}{\partial \zeta}}\right)(f_0) = \frac{(q-1)!(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}}{(2i\pi)^q} \int_{|\zeta|=\rho} \left(\frac{h}{det\frac{\partial f}{\partial \zeta}}\right) \frac{\sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} s_k ds_{[k]} \bigwedge df}{\langle s(\zeta), f(\zeta) - f_0\rangle^q} .$$

En dérivant par rapport à f_0 l'intégrale ci-dessus on obtient

$$\frac{\partial^{|\beta|}\left(\frac{h}{det\frac{\partial f}{\partial \zeta}}\right)}{\partial f^\beta}(0) = K(q,\beta) \int_{|\zeta|=\rho} \left(\frac{h}{det\frac{\partial f}{\partial \zeta}}\right) \prod_{j=1}^q s_j^{\beta_j} \frac{\sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} s_k ds_{[k]} \bigwedge df}{\langle s(\zeta), f(\zeta)\rangle^{q+|\beta|}} ,$$

ce qui, dans ce cas, prouve la proposition.

Dans le cas où f est quelconque, pour ϵ générique, $f_\epsilon = f - \epsilon$ n'a que des zéros simples dans U, et il existe $\alpha > 0$ tel que pour ϵ assez petit $|f_\epsilon(\zeta)| > \alpha$ sur $\partial B(0,\rho)$. En prenant pour section $\overline{f}$, on a:

$$\begin{aligned} K(q,\beta) \int_{|\zeta|=\rho} h \prod_{j=1}^q s_j^{\beta_j} & \frac{\sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} s_k ds_{[k]} \bigwedge d\zeta}{\langle s(\zeta), f(\zeta)\rangle^{q+|\beta|}} \\ &= K(q,\beta) \int_{|\zeta|=\rho} h \prod_{j=1}^q \overline{f}_j^{\beta_j} \frac{\sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} \overline{f}_k d\overline{f}_{[k]} \bigwedge d\zeta}{\langle \overline{f}(\zeta), f(\zeta)\rangle^{q+|\beta|}} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} K(q,\beta) \int_{|\zeta|=\rho} h \prod_{j=1}^q \overline{f}_{\epsilon,j}^{\beta_j} \frac{\sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} \overline{f}_{\epsilon,k} d\overline{f}_{\epsilon,[k]} \bigwedge d\zeta}{\langle \overline{f}_\epsilon(\zeta), f_\epsilon(\zeta)\rangle^{q+|\beta|}} . \end{aligned}$$

En remplaçant dans (11) $\overline{f}$ par $\overline{f}_\epsilon$, le même calcul qui a permis de prouver que $\Omega_{\tilde{s}}$ est fermé sur $U - \{0\}$, prouve que la forme $h \prod_{j=1}^q \overline{f}_{\epsilon,j}^{\beta_j} \frac{\sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} \overline{f}_{\epsilon,k} d\overline{f}_{\epsilon,[k]} \bigwedge d\zeta}{\langle \overline{f}_\epsilon(\zeta), f_\epsilon(\zeta)\rangle^{q+|\beta|}}$ est fermée dans $U - V(f_\epsilon)$. En notant P_ϵ les zéros de f_ϵ, le théorème de Stokes permet de remplacer

$$K(q,\beta) \int_{|\zeta|=\rho} h \prod_{j=1}^q \overline{f}_{\epsilon,j}^{\beta_j} \frac{\sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} \overline{f}_{\epsilon,k} d\overline{f}_{\epsilon,[k]} \bigwedge d\zeta}{\langle \overline{f}_\epsilon(\zeta), f_\epsilon(\zeta)\rangle^{q+|\beta|}}$$

$$\text{par} \sum_{P_\epsilon \in V(f_\epsilon)} K(q,\beta) \int_{|P_\epsilon + \zeta|=\tau} h \prod_{j=1}^q \overline{f}_{\epsilon,j}^{\beta_j} \frac{\sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} \overline{f}_{\epsilon,k} d\overline{f}_{\epsilon,[k]} \bigwedge d\zeta}{\langle \overline{f}_\epsilon(\zeta), f_\epsilon(\zeta)\rangle^{q+|\beta|}} \tag{12}$$

Les zéros de f_ϵ étant simples, on est pour chaque terme de (12) dans le cas précédant et (12) peut s'écrire:

$$\sum_{P_\epsilon \in V(f_\epsilon)} \operatorname{Res}_{(f_1^{\beta_1+1},\ldots,f_q^{\beta_q+1},P_\epsilon)}(h)$$

D'autre part, d'après le "principe de continuité" (cf. [G] p.657) on a:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sum_{P_\epsilon \in V(f_\epsilon)} \mathrm{Res}_{(f_1^{\beta_1+1},\ldots,f_q^{\beta_q+1},P_\epsilon)}(h) = \mathrm{Res}_{(f_1^{\beta_1+1},\ldots,f_q^{\beta_q+1},0)}(h)$$

ce qui termine la preuve de la proposition. □

1.3. Une application des techniques utilisées.

Dans la preuve de la loi de transformation, comme celle écrite dans [G], on prouve par un argument algébrique immédiat que si:

$g = Af, f(P) \neq 0$ et $g(P) = 0$, P étant un zéro isolé de g alors:

$$\forall h \in \mathcal{O}_P, \qquad \frac{1}{(2i\pi)^q} \int_{\Gamma_{g_P}} \frac{h \det A dz}{g_1 \ldots g_q} = 0 \tag{13}$$

où, r et ϵ_i étant des réels strictement positifs suffisamment petits, $\Gamma_{g_P} = \{\zeta \in B(P,r) : |g_i(\zeta)| = \epsilon_i, i = 1, \ldots, n\}$ orienté par la condition $d(\arg g_1) \wedge \cdots \wedge d(\arg g_q) > 0$, et $\mathcal{O}_P$ est l'anneau des germes en P des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^q$.

Des exemples simples montrent par contre, que dans les mêmes conditions il est possible d'obtenir

$$\int_{\Gamma_{g_P}} \frac{h \det A a_{j_1,i_1} \ldots a_{j_m,i_m} dz}{g_{j_1} \cdots g_{j_m} g^I} \neq 0$$

Un argument analytique mis en œuvre dans la preuve de la proposition 1.2.2 permet d'obtenir la proposition suivante qui généralise (13):

Proposition 1.3.1.

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^q$, $f = (f_1, \ldots, f_q)$ et $g = (g_1, \ldots, g_q)$ des fonctions holomorphes sur U telles que $g = Af$, où $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq q}$ est une matrice à coefficients dans $\mathcal{O}(U)$. On suppose que g admet un zéro isolé P qui n'est pas un zéro de f alors:

$$\forall h \in \mathcal{O}(U), \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{q} c_{j_1 \ldots j_m} \int_{\Gamma_{g_P}} \frac{h \det A a_{j_1,i_1} \ldots a_{j_m,i_m} dz}{g_{j_1} \cdots g_{j_m} g^I} = 0 \,. \tag{14}$$

Preuve. Comme dans la preuve de la proposition 1.2.2 on choisit W un voisinage de $\partial B(P,r)$, s une fonction de classe C^1 sur W qui vérifie: $\langle s(\zeta), f(\zeta) \rangle \neq 0$ pour $\zeta \in W$. Soit $\tilde{U}$ un voisinage de $B(P,r)$, $\mathcal{X}$ une fonction de classe C^1 sur $\tilde{U}$ qui prend la valeur 1 sur un voisinage de $\partial B(P,r)$, et zéro sur un voisinage de P. On pose pour $\zeta \in \tilde{U}$:

$$\tilde{s}(\zeta) = \mathcal{X}(\zeta) \frac{s(\zeta)}{\langle s(\zeta), f(\zeta) \rangle} + (1 - \mathcal{X}(\zeta)) \frac{\overline{f}(\zeta)}{\langle \overline{f}(\zeta), f(\zeta) \rangle} \,.$$

Le calcul fait dans la preuve de la proposition 1.2.2 montre que la forme

$$h\prod_{j=1}^{q}\tilde{s}_j^{\beta_j}\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k-1}\tilde{s}_k^{\beta_k}\,d\tilde{s}_{[k]}\bigwedge d\zeta$$

est fermée sur $\tilde{U}$, ce qui prouve que:

$$\int_{|\zeta+P|=r} h\prod_{j=1}^{q}s_j^{\beta_j}\,\frac{\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k-1}s_k ds_{[k]}\bigwedge d\zeta}{\langle s(\zeta), f(\zeta)\rangle^{q+|\beta|}} = 0\ . \tag{15}$$

On choisit s défini par: $s_k = \sum_{j=1}^{q} a_{j,k}\overline{g}_k$, (15) s'écrit en utilisant le calcul fait dans la preuve du théorème 1.2.1:

$$\sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{q,1}=\beta_1\\ \vdots \\ \alpha_{1,q}+\cdots+\alpha_{q,q}=\beta_q}} C(\beta,\alpha)\,\mathrm{Res}_{((g_k^{\alpha_{k,1}+\cdots+\alpha_{k,q}+1})_{1\le k\le q},P)}\left(h\det A\prod_{i,j=1}^{q}a_{i,j}^{\alpha_{i,j}}\right) = 0\ ,$$

soit encore:

$$\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{q} c_{j_1\ldots j_m}\int_{\Gamma_{g_P}}\frac{h\det A a_{j_1,i_1}\ldots a_{j_m,i_m}dz}{g_{j_1}\cdots g_{j_m}g^I} = 0\ .\quad\square \tag{16}$$

1.4. Une preuve algébrique de la loi de transformation généralisée.

Avant d'énoncer l'équivalant dans un cadre algébrique du théorème 1.2.1, on établit les lemmes suivants:

Lemme 1.4.1.
Soient $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre commutative,* $g = (f_1, \ldots, f_q)$ *une suite de* $\mathbf{R}$ *quasi-régulière,* $A \in \mathcal{M}_q(\mathbf{R})$ *une matrice,* $U_1, \ldots, U_q$ *des variables algébriquement indépendantes sur* $\mathbf{R}$ *et* $V = AU$*, alors la suite* $(U_1, \ldots, U_q, f_1 - V_1, \ldots, f_q - V_q)$ *de* $\mathbf{R}[U]$ *est quasi-régulière.*

Preuve de 1.4.1.
Soient $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}) \in \mathbf{R}$, $I = (U_1, \ldots, U_q, f_1 - a_{i_1}U_{i_1}, \ldots, f_q - a_{i_q}U_{i_q})\mathbf{R}[U]$, $k \in \mathbb{N}^*$ et

$$\Big(\sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^q, \beta' \in \mathbb{N}^q \\ |\beta| + |\beta'| = k}} a_{\beta,\beta'} U^\beta (f - aU)^{\beta'} \Big) \in I^{k+1} , \tag{17}$$

où $a_{\beta,\beta'} \in \mathbf{R}[U]$ et $(f - aU) = (f_1 - a_{i_1}U_{i_1}, \ldots, f_q - a_{i_q}U_{i_q})$.

Pour montrer que la suite $(U_1, \ldots, U_q, f_1 - a_{i_1}U_{i_1}, \ldots, f_q - a_{i_q}U_{i_q})$ est quasi-régulière, il suffit de traiter le cas où $a_{\beta,\beta'} \in \mathbf{R}$ ce que l'on suppose maintenant. On montre par récurrence sur $|\beta|$ que $a_{\beta,\beta'} \in I$.

En notant P_0 l'opérateur qui à (17), considéré comme un polynôme en U, associe son terme constant, on a:

$$P_0 \left(\sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^q, \beta' \in \mathbb{N}^q \\ |\beta| + |\beta'| = k}} a_{\beta,\beta'} U^\beta (f - aU)^{\beta'} \right) = \sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{N}^q \\ |\beta'| = k}} a_{0,\beta'} f^{\beta'} .$$

Les éléments de I^{k+1} s'écrivent

$$\sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^q, \beta' \in \mathbb{N}^q \\ |\beta| + |\beta'| \geq k+1}} c_{\beta,\beta'} U^\beta f^{\beta'} , \tag{18}$$

où $c_{\beta,\beta'} \in \mathbf{R}$. En particulier leur terme constant est de la forme $\sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{N}^q \\ |\beta'| = k+1}} c_{0,\beta'} f^{\beta'}$, par conséquent:

$$\sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{N}^q \\ |\beta'| = k}} a_{0,\beta'} f^{\beta'} = \sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{N}^q \\ |\beta'| = k+1}} c_{0,\beta'} f^{\beta'} .$$

Cette égalité prouve que $\sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{N}^q \\ |\beta'| = k}} a_{0,\beta'} f^{\beta'} \in J^{k+1}$, où $J = (f_1, \ldots, f_q)\mathbf{R}$. La suite $(f_1, \ldots, f_q)$ de $\mathbf{R}$ étant quasi-régulière, on a $a_{0,\beta'} \in J$, en particulier $a_{0,\beta'} \in I$ pour tout β' tel que $|\beta'| = k$.

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^q$ tel que $|\alpha| \geq 1$. On suppose prouvé par récurrence sur $|\alpha|$ que $a_{\beta,\beta'} \in I$ pour tout $(\beta, \beta') \in \mathbb{N}^{2q}$ tel que $|\beta| < |\alpha|$ et $|\beta| + |\beta'| = k$.

En notant P_α l'opérateur qui à (17), considéré comme un polynôme en U, associe le cœfficient de son terme en U^α, on a:

$$
\begin{aligned}
&P_\alpha\left(\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^q,\beta'\in\mathbb{N}^q\\|\beta|+|\beta'|=k}} a_{\beta,\beta'}U^\beta(f-aU)^{\beta'}\right)\\
&=\sum_{\substack{\beta'\in\mathbb{N}^q\\|\alpha|+|\beta'|=k}} a_{\alpha,\beta'}U^\alpha f^{\beta'}+P_\alpha\left(\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^q,\beta'\in\mathbb{N}^q\\|\beta|<|\alpha|\\|\beta|+|\beta'|=k}} a_{\beta,\beta'}U^\beta(f-aU)^{\beta'}\right).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

D'après (18), les variables $U_1,\ldots,U_q$ étant algébriquement indépendantes sur $\mathbf{R}$, il existe des $c_{\alpha,\beta'}\in\mathbf{R}$ tels que:

$$
P_\alpha\left(\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^q,\beta'\in\mathbb{N}^q\\|\beta|+|\beta'|=k}} a_{\beta,\beta'}U^\beta(f-aU)^{\beta'}\right)=\sum_{\substack{\beta'\in\mathbb{N}^q\\|\alpha|+|\beta'|=k+1}} c_{\alpha,\beta'}U^\alpha f^{\beta'}\ .
$$

D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence sur (β,β') on a :

$$
P_\alpha\left(\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^q,\beta'\in\mathbb{N}^q\\|\beta|<|\alpha|\\|\beta|+|\beta'|=k}} a_{\beta,\beta'}U^\beta(f-aU)^{\beta'}\right)\in I^{k+1}\ ,
$$

par conséquent l'égalité (19) montre que $\sum_{\substack{\beta'\in\mathbb{N}^q\\|\alpha|+|\beta'|=k}} a_{\alpha,\beta'}U^\alpha f^{\beta'}\in I^{k+1}$. D'après (18), les variables $U_1,\ldots,U_q$ étant algébriquement indépendantes, on en déduit:

$$
\left(\sum_{\substack{\beta'\in\mathbb{N}^q\\|\alpha|+|\beta'|=k}} a_{\alpha,\beta'}f^{\beta'}\right)\in J^{k+1-|\alpha|}\ .
$$

La suite $(f_1,\ldots,f_q)$ de $\mathbf{R}$ étant quasi-régulière, on a que $a_{\alpha,\beta'}\in J$ donc dans I, pour tout β'. Par récurrence $a_{\beta,\beta'}\in I$ pour tout (β,β'), ce qui prouve que la suite $(U_1,\ldots,U_q,f_1-a_{i_1}U_{i_1},\ldots,f_q-a_{i_q}U_{i_q})$ est $\mathbf{R}[U]$ quasi-régulière.

En réitérant ce procédé on obtient que la suite $(U_1,\ldots,U_q,g_1-\sum_{i=1}^q a_{1,i}U_i,\ldots,g_q-\sum_{i=1}^q a_{n,i}U_i)$ de $\mathbf{R}[U]$ est quasi-régulière. □

Lemme 1.4.2.

Soient $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre commutative,* $(f_1,\ldots,f_q)$ *une suite de* $\mathbf{R}$ *quasi-régulière telle que* $\dfrac{\mathbf{R}}{(f_1\cdots f_q)}$ *soit un* $\mathbf{A}$ *module projectif de type fini,* $X_1,\ldots,X_q$ *des éléments* *quelconques de* $\mathbf{R}$, $U_1, \ldots, U_q$ *des variables algébriquement indépendantes sur* $\mathbf{R}$, $m_1, \ldots, m_q, m_1', \ldots m_q'$ *des entiers et* $h = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q} a_\alpha U^\alpha \in \mathbf{R}[U]$. *Alors*

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \sum a_\alpha U^\alpha dU \wedge dX \\ U_1^{m_1+1}, \ldots, U_q^{m_q+1}, f_1^{m_1'+1}, \ldots, f_q^{m_q'+1} \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_{m_1,\ldots,m_q} dX \\ f_1^{m_1'+1}, \ldots, f_q^{m_q'+1} \end{bmatrix} , \tag{20}$$

si $m_i > 0$ *et* $r \in \mathbf{R}$

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} r f_i dX \\ f_1^{m_1+1}, \ldots, f_i^{m_i+1}, \ldots, f_q^{m_q+1} \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} r dX \\ f_1^{m_1+1}, \ldots, f_i^{m_i}, \ldots, f_q^{m_q+1} \end{bmatrix} , \tag{21}$$

et pour tout $r \in \mathbf{R}$

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} r dU \wedge dX \\ U_1^{m_1+1}, \ldots, U_q^{m_q+1}, f_1 - U_1, \ldots, f_q - U_q \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} r dX \\ f_1^{m_1+1}, \ldots, f_q^{m_q+1} \end{bmatrix} . \tag{22}$$

Preuve de 1.4.2.

Soient $\hat{\mathbf{R}}$ le complété I-adique de $\mathbf{R}$ où I est l'idéal de $\mathbf{R}$ engendré par $f_1, \ldots, f_q$, $\mathbf{P} = \dfrac{\hat{\mathbf{R}}}{\widehat{I}} = \dfrac{\mathbf{R}}{I}$ et $\sigma : \mathbf{P} \to \hat{\mathbf{R}}$ une section de la projection canonique $\pi : \hat{\mathbf{R}} \to \mathbf{P}$.

Soient $\mathbf{R}' = \mathbf{R}[U_1, \ldots, U_q]$, $I' = (U_1, \ldots, U_q, f_1, \ldots, f_q)\,\mathbf{R}'$, $\hat{\mathbf{R}}'$ le complété I'-adique de $\mathbf{R}'$, $\mathbf{P}' = \dfrac{\hat{\mathbf{R}}'}{\widehat{I'}} = \dfrac{\mathbf{R}'}{I'} = \dfrac{\mathbf{R}}{I} = \mathbf{P}$ et $\sigma' : \mathbf{P} \longrightarrow \hat{\mathbf{R}}'$ une section de la projection canonique $\pi' : \hat{\mathbf{R}}' \longrightarrow \mathbf{P}$.

D'après la propriété universelle du séparé complété, l'injection canonique i de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}'$ induit une application injective $\bar{\imath}$ de $\hat{\mathbf{R}}$ dans $\hat{\mathbf{R}}'$ et par conséquent on peut choisir $\sigma' = \bar{\imath} \circ \sigma$.

Pour $r \in \mathbf{R}$ identifié par l'injection canonique à un élément de $\hat{\mathbf{R}}$, on note

$$r^\# = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q} r_\alpha f^\alpha$$

l'élément de $\operatorname{Hom}_A(\mathbf{P}, \mathbf{P})[[f]]$ qui vérifie pour tout $p \in \mathbf{P}$: $\sigma(p) r = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q} \sigma(r_\alpha(p)) f^\alpha$. On a alors $\bar{\imath} \circ \sigma(p) r = \bar{\imath} \circ \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q} \sigma(r_\alpha(p)) f^\alpha\right)$, et par conséquent: $\sigma'(p) r = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q} \sigma'(r_\alpha(p)) f^\alpha$. Ceci nous permet d'identifier les écritures de $r^\#$ et $\bar{\imath}(r)^\#$. D'autre part, si l'on note $r^\# \det((\dfrac{\partial}{\partial f_i} X_j^\#)) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q} \delta_\alpha f^\alpha$, on a:

$$\operatorname{Res} \begin{bmatrix} r dX \\ f_1^{m_1'+1}, \ldots, f_q^{m_q'+1} \end{bmatrix} = \operatorname{Tr}_{P/A}(\delta_{m_1', \ldots, m_q'}) .$$

Soit $\beta \in \mathbb{N}^q$, pour tout $p \in \mathbf{P}$, on a $\sigma(p) r U^\beta = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q} \sigma(r_\alpha(p) f^\alpha U^\beta$, donc:

$$(rU^\beta)^\# = U^\beta r^\# ,$$

$$(rU^\beta)^\# \det((\frac{\partial}{\partial f_i} X_j^\#)) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q} \delta_\alpha U^\beta f^\alpha .$$

Par conséquent

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\left[\begin{matrix} rdX \\ f_1^{m'_1+1},\ldots,f_q^{m'_q+1}\end{matrix}\right] = \mathrm{Tr}_{P/A}(\delta_{m'_1,\ldots,m'_q})$$

$$= \mathrm{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}}\left[\begin{matrix} rU^{\beta}dU\wedge dX \\ U_1^{\beta_1+1},\ldots,U_q^{\beta_q+1},f_1^{m'_1+1},\ldots,f_q^{m'_q+1}\end{matrix}\right] ,$$

et si $\beta \neq (\beta'_1,\ldots,\beta'_q)$:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}}\left[\begin{matrix} rU^{\beta}dU\wedge dX \\ U_1^{\beta'_1+1},\ldots,U_q^{\beta'_q+1},f_1^{m'_1+1},\ldots,f_q^{m'_q+1}\end{matrix}\right] = 0$$

ce qui montre l'égalité (20):

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}}\left[\begin{matrix} \sum a_{\alpha}U^{\alpha}dU\wedge dX \\ U_1^{m_1+1},\ldots,U_q^{m_q+1},f_1^{m'_1+1},\ldots,f_q^{m'_q+1}\end{matrix}\right] = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\left[\begin{matrix} a_{m_1,\ldots,m_q}dX \\ f_1^{m'_1+1},\ldots,f_q^{m'_q+1}\end{matrix}\right]$$

Pour montrer l'égalité (21), on a $(rf_i)^{\#}\det((\dfrac{\partial}{\partial f_i}X_j^{\#})) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^q}\delta_{\alpha}f^{\alpha}f_i$, d'où:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\left[\begin{matrix} rf_idX \\ f_1^{m_1+1},\ldots,f_q^{m_q+1}\end{matrix}\right] = \mathrm{Tr}_{P/A}(\delta_{m_1,\ldots,m_i-1,\ldots,m_q})$$

$$= \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\left[\begin{matrix} rdX \\ f_1^{m_1+1},\ldots,f_i^{m_i},\ldots,f_q^{m_q+1}\end{matrix}\right] .$$

Pour montrer (22), on utilise l'égalité:

$$f_i^{m_i+1} = U_i^{m_i+1} + (f_i - U_i)\sum_{k=0}^{m_i} U_i^k f_i^{m_i-k} .$$

En notant

$$B = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{m_1} U_1^k f_1^{m_1-k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{m_q} U_q^k f_q^{m_q-k}\end{pmatrix} ,$$

on a

$$\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ I_q & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1^{m_1+1} \\ \vdots \\ U_q^{m_q+1} \\ f_1-U_1 \\ \vdots \\ f_q-U_q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^{m_1+1} \\ \vdots \\ U_q^{m_q+1} \\ f_1^{m_1+1} \\ \vdots \\ f_q^{m_q+1}\end{pmatrix} .$$

En appliquant la loi de transformation on obtient:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}}\left[\begin{matrix} rdU\wedge dX \\ U_1^{m_1+1},\ldots,U_q^{m_q+1},f_1-U_1,\ldots,f_q-U_q\end{matrix}\right]$$

$$= \mathrm{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}}\left[\begin{matrix} r(\prod_{i=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_i}U_i^kf_i^{m_i-k})dU\wedge dX \\ U_1^{m_1+1},\ldots,U_q^{m_q+1},f_1^{m_1+1},\ldots,f_q^{m_q+1}\end{matrix}\right] .$$

L'égalité (20) appliquée au membre de droite donne:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}}\left[\begin{matrix} rdU\wedge dX \\ U_1^{m_1+1},\ldots,U_q^{m_q+1},f_1-U_1,\ldots,f_q-U_q\end{matrix}\right] = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\left[\begin{matrix} rdX \\ f_1^{m_1+1},\ldots,f_q^{m_q+1}\end{matrix}\right] ,$$

ce qui termine la preuve du lemme 1.4.2. □

Théorème 1.4.3. *(Loi de transformation généralisée)*

Soient $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre commutative,* $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *et* $g = (g_1, \ldots, g_q)$ *deux suites de* $\mathbf{R}$ *quasi-régulières telles que d'une part* $g = Af$ *où* $A \in \mathcal{M}_q(\mathbf{R})$ *et d'autre part que les* $\mathbf{A}$*-modules* $\dfrac{\mathbf{R}}{(f_1 \ldots f_q)}$ *et* $\dfrac{\mathbf{R}}{(g_1 \ldots g_q)}$ *soient projectifs de type fini.*

Pour tout entier $\beta_1, \ldots, \beta_q$ *et des éléments quelconques* $h, X_1, \ldots, X_q$ *de* $\mathbf{R}$ *on a :*

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} hdX \\ f_1^{\beta_1+1}, \ldots, f_q^{\beta_q+1} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{q,1}=\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{1,q}+\cdots+\alpha_{q,q}=\beta_q}} \frac{C(\beta,\alpha)}{\beta!} \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} h \det A \prod_{i,j=1}^{q} a_{i,j}^{\alpha_{i,j}} dX \\ (g_k^{\alpha_{k,1}+\cdots+\alpha_{k,q}+1})_{1\le k\le q} \end{bmatrix} .
\end{aligned} \tag{23}$$

Preuve du théorème 1.4.3.

Soient $U_1, \ldots, U_q$ des variables algébriquement indépendantes sur $\mathbf{R}$ et $V = AU$, d'après le lemme 1.4.1 les suites de $\mathbf{R}[U]$:

$$(U_1, \ldots, U_q, f_1 - U_1, \ldots, f_q - U_q) \text{ et } (U_1, \ldots, U_q, g_1 - V_1, \ldots, g_q - V_q)$$

sont quasi-régulières. Comme $\dfrac{\mathbf{R}[U]}{(U, f-U)}$ et $\dfrac{\mathbf{R}[U]}{(U, g-V)}$ sont des $\mathbf{A}$-modules projectifs de type fini, les suites:

$$(U_1^{\beta_1+1}, \ldots, U_q^{\beta_q+1}, f_1 - U_1, \ldots, f_q - U_q) \text{ et } (U_1^{\beta_1+1}, \ldots, U_q^{\beta_q+1}, g_1 - V_1, \ldots, g_q - V_q)$$

sont aussi quasi-régulières (appendice §2, cor. 2.5). D'autre part, en appliquant la proposition 2.1 de l'appendice (§2), les modules:

$$\frac{\mathbf{R}[U]}{(U_1^{\beta_1+1}, \ldots, U_q^{\beta_q+1}, f_1 - U_1, \ldots, f_q - U_q)}, \frac{\mathbf{R}[U]}{(U_1^{\beta_1+1}, \ldots, U_q^{\beta_q+1}, g_1 - V_1, \ldots, g_q - V_q)}$$

sont des $\mathbf{A}$-modules projectifs de type fini.

Soit $\tilde{A} = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2q}(\mathbf{R}[U])$, on a $\tilde{A} \begin{pmatrix} U_1^{\beta_1+1} \\ \vdots \\ U_q^{\beta_q+1} \\ f_1 - U_1 \\ \vdots \\ f_q - U_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^{\beta_1+1} \\ \vdots \\ U_q^{\beta_q+1} \\ g_1 - V_1 \\ \vdots \\ g_q - V_q \end{pmatrix}$ donc d'après la loi de transformation (chap. I, prop. 3.5.5):

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} hdU \wedge dX \\ U_1^{\beta_1+1}, \ldots, U_q^{\beta_q+1}, f_1 - U_1, \ldots, f_q - U_q \end{bmatrix} \\
&= \operatorname{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} h \det A dU \wedge dX \\ U_1^{\beta_1+1}, \ldots, U_q^{\beta_q+1}, g_1 - V_1, \ldots, g_q - V_q \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{24}$$

On va donner une autre écriture de chaque membre de cette égalité.

Le lemme 1.4.2 appliqué au membre de gauche donne:

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} hdU\wedge dX \\ U_1^{\beta_1+1},\dots,U_q^{\beta_q+1},f_1-U_1,\dots,f_q-U_q\end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} hdX \\ f_1^{\beta_1+1},\dots,f_q^{\beta_q+1}\end{bmatrix} \ . \tag{25}$$

Concernant le second membre de (24) on remarque que

$$g_i^{|\beta|+q} = V_i^{|\beta|+q} + (g_i - V_i)\sum_{k=0}^{|\beta|+q-1} V_i^k g_i^{|\beta|+q-k-1} \ ,$$

et

$$\begin{aligned} V_i^{|\beta|+q} &= (\sum_{j=1}^{q} a_{i,j}U_j)^{|\beta|+q} \\ &= \sum_{\alpha_{i_1}+\dots+\alpha_{i_q}=|\beta|+q}\binom{|\beta|+q}{\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_q}} a_{i,1}^{\alpha_{i,1}}\dots a_{i,q}^{\alpha_{i,q}}U_1^{\alpha_{i,1}}\dots U_q^{\alpha_{i,q}} \end{aligned} \tag{26}$$

On a $|\beta| = \beta_1+\dots+\beta_q$. Donc pour chaque terme de (26) il existe un entier k tel que $\alpha_{i,k}\geq \beta_k+1$, on peut par conséquent trouver des éléments $c_{i,j}\in \mathbf{R}[U]$ tels que:

$$V_i^{|\beta|+q} = \sum_{j=1}^{q} c_{i,j}U_j^{\beta_j+1} \ .$$

On pose:

$$C = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_q(\mathbf{R}[U]) \ ,$$

$$\text{et } \ D = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{|\beta|+q-1} V_1^k g_1^{|\beta|+q-k-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{|\beta|+q-1} V_q^k g_q^{|\beta|+q-k-1}\end{pmatrix} \ .$$

On a

$$\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1^{\beta_1+1} \\ \vdots \\ U_q^{\beta_q+1} \\ g_1 - V_1 \\ \vdots \\ g_q - V_q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^{\beta_1+1} \\ \vdots \\ U_q^{\beta_q+1} \\ g_1^{|\beta|+q} \\ \vdots \\ g_q^{|\beta|+q}\end{pmatrix} \ ,$$

et en appliquant la loi de transformation:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h\det A dU\wedge dX \\ U_1^{\beta_1+1},\dots,U_q^{\beta_q+1},g_1-V_1,\dots,g_q-V_q\end{bmatrix} \\ &\qquad = \operatorname{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h\det A(\prod_{i=1}^{q}\sum_{k=0}^{|\beta|+q-1} V_i^k g_i^{|\beta|+q-k-1})dU\wedge dX \\ U_1^{\beta_1+1},\dots,U_q^{\beta_q+1},g_1^{|\beta|+q},\dots,g_q^{|\beta|+q}\end{bmatrix} \ . \end{aligned} \tag{27}$$

Or

$$V_i^k = (\sum_{j=1}^{q} a_{i,j}U_j)^k = \sum_{\alpha_{i,1}+\cdots+\alpha_{i,q}=k} \binom{k}{\alpha_{i,1},\ldots,\alpha_{i,q}} a_{i,1}^{\alpha_{i,1}}\ldots a_{i,q}^{\alpha_{i,q}} U_1^{\alpha_{i,1}}\ldots U_q^{\alpha_{i,q}} ,$$

par conséquent:

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{q}\sum_{k=0}^{|\beta|+q-1} V_i^k g_i^{|\beta|+q-k-1}\\
&= \sum_{\substack{0\le k_i\le|\beta|+q-1\\ 1\le i\le n}} V_1^{k_1}\ldots V_q^{k_q} g_1^{|\beta|+q-k_1-1}\ldots g_q^{|\beta|+q-k_q-1}\\
&= \sum_{\substack{0\le k_i\le|\beta|+q-1, 1\le i\le n\\ \alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{1,q}=k_1\\ \vdots\\ \alpha_{q,1}+\cdots+\alpha_{q,q}=k_q}} \prod_{i=1}^{q}\binom{\alpha_{i,1}+\cdots+\alpha_{i,q}}{\alpha_{i,1},\ldots,\alpha_{i,q}} \prod_{i,j=1}^{q} a_{i,j}^{\alpha_{i,j}} \prod_{j=1}^{q} U_j^{(\alpha_{1,j}+\cdots+\alpha_{q,j})} \prod_{l=1}^{q} g_l^{|\beta|+q-k_l-1} \qquad (28)
\end{aligned}$$

D'après le lemme 1.4.2, seuls les termes de (28) tels que :

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{q,1} &= \beta_1\\
&\vdots\\
\alpha_{1,q}+\cdots+\alpha_{q,q} &= \beta_q
\end{aligned}$$

apportent une contribution non nulle à (27), par conséquent on obtient:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h\det A dU\wedge dX \\ U_1^{\beta_1+1},\ldots,U_q^{\beta_q+1}, g_1-V_1,\ldots,g_q-V_q\end{bmatrix}\\
&= \sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{q,1}=\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_{1,q}+\cdots+\alpha_{q,q}=\beta_q}} \prod_{i=1}^{q}\binom{\alpha_{i,1}+\cdots+\alpha_{i,q}}{\alpha_{i,1},\ldots,\alpha_{i,q}} \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h\det A\prod_{(i,j)} a_{i,j}^{\alpha_{i,j}}\prod_{1\le i\le q} g_i^{|\beta|+q-k_i-1}dX\\ g_1^{|\beta|+q},\ldots,g_q^{|\beta|+q}\end{bmatrix}\\
&= \sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\cdots+\alpha_{q,1}=\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_{1,q}+\cdots+\alpha_{q,q}=\beta_q}} \frac{C(\beta,\alpha)}{\beta!}\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h\det A\prod_{i,j=1}^{q} a_{i,j}^{\alpha_{i,j}}dX\\ (g_k^{\alpha_{k,1}+\cdots+\alpha_{k,q}+1})_{1\le k\le q}\end{bmatrix}. \qquad (29)
\end{aligned}$$

Ceci prouve en utilisant (24) (25) et (29), le théorème 1.4.3.

§2. D'autres formules de transformation

2.1. Extension de la loi de transformation à certaines localisations.

L'article *Residue Calculus and Effective Nullstellensatz* de C.A Berenstein et A. Yger ([B-Y$_3$]) propose, lorsque $\mathbf{R} = \mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$ où $\mathbf{K}$ est un corps et $P_1(x), \dots, P_n(x)$ une suite régulière de $\mathbf{R}$, d'étendre l'action du résidu par rapport à $P_1(x), \dots, P_n(x)$ aux fractions rationnelles $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \in \mathbf{k}(x)$ lorsque l'idéal $(Q(x), P_1(x), \dots, P_n(x))$ est $\mathbf{R}$. On montre ci-dessous que cette définition peut se justifier dans le cadre de la théorie de J. Lipman, et être étendu au cas où $\mathbf{R}$ est une $\mathbf{A}$-algèbre commutative quelconque. Ceci permet d'appliquer, sans travail supplémentaire, la loi de transformation généralisée à certaines localisations de $\mathbf{R}$.

Proposition 2.1.1.
Soient $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre commutative, $f = (f_1, \dots, f_q)$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ telle que $\dfrac{\mathbf{R}}{f\,\mathbf{R}}$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, et $Q \in \mathbf{R}$ tel que $(Q, f_1, \dots, f_q)\mathbf{R} = \mathbf{R}$. On note S la partie multiplicative $\{1, Q, \dots, Q^n, \dots\}$ et $\mathbf{R}_S$ le localisé de $\mathbf{R}$ en S. Alors f est une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}_S$, $\dfrac{\mathbf{R}_S}{f\mathbf{R}_S}$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, et pour tout $P \in \mathbf{R}$ on peut définir $\operatorname{Res}_{\mathbf{R}_S/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} \dfrac{P}{Q}\,dr \\ f_1, \dots, f_q \end{bmatrix}$.

Pour tout élément $V \in \mathbf{R}$ tel que $(1 - Q.V) \in f\mathbf{R}$ on a:

$$\forall P \in \mathbf{R}, \qquad \operatorname{Res}_{\mathbf{R}_S/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} \dfrac{P}{Q}\,dr \\ f_1, \dots, f_q \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} P.V\ dr \\ f_1, \dots, f_q \end{bmatrix} \tag{1}$$

Preuve.
Soient $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$, $\bar{S}$ l'image de S dans $\mathbf{P}$, et $\mathbf{P}_{\bar{S}} = \dfrac{\mathbf{R}_S}{f\mathbf{R}_S} = \left(\dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}\right)_{\bar{S}}$. Comme $Q.V \equiv 1 \pmod{f\mathbf{R}}$, $\bar{Q}$ et tous les éléments de $\bar{S}$ sont des éléments inversibles de $\mathbf{P}$, par conséquent

$$\mathbf{P}_{\bar{S}} = \mathbf{P}$$

et $\mathbf{P}_{\bar{S}}$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini. Pour prouver que f est une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}_S$, il suffit de montrer que si $\mathfrak{m}'$ est un idéal maximal de $\mathbf{R}_S$ qui contient f, son image dans $(\mathbf{R}_S)_{\mathfrak{m}'}$ est une suite régulière. Pour cela on note $\mathfrak{p}$ l'unique idéal premier de $\mathbf{R}$, maximal parmi les idéaux premiers ne rencontrant pas S, tel que $\mathfrak{p}_S = \mathfrak{m}'$. Si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de $\mathbf{R}$ qui contient $\mathfrak{p}$, comme $f \subset \mathfrak{p}$, la relation $(1 - Q.V) \in f\mathbf{R}$ montre que $\mathfrak{m}$ ne rencontre pas S et par conséquent $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$. De $S \subset \mathbf{R} \setminus \mathfrak{m}$, on a $\mathbf{R}_{\mathfrak{m}} \simeq (\mathbf{R}_S)_{\mathfrak{m}'}$. Comme l'image de f dans $\mathbf{R}_{\mathfrak{m}}$ est une suite régulière, l'image de f dans $(\mathbf{R}_S)_{\mathfrak{m}'}$ est une suite régulière.

f étant une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}_S$, et $\mathbf{P}_{\bar{S}}$ un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, on peut définir pour tout $P \in \mathbf{R}$: $\operatorname{Res}_{\mathbf{R}_S/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} \dfrac{P}{Q}\,dr \\ f_1, \dots, f_q \end{bmatrix}$.

Dans $\mathbf{R}_S$, $\left(\dfrac{P}{Q} - P.V\right) \in f\mathbf{R}_S$, par conséquent

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}_S/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} \dfrac{P}{Q}\,dr \\ f_1, \dots, f_q \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\mathbf{R}_S/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} P.V\ dr \\ f_1, \dots, f_q \end{bmatrix}.$$

La proposition (I.3.5.1) avec $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$, $\Psi = id$, $\mathbf{R}' = \mathbf{R}_S$ montre que

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}_S/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} P.V \ dr \\ f_1, \dots, f_q \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} P.V \ dr \\ f_1, \dots, f_q \end{bmatrix},$$

et termine la preuve de la proposition. $\square$

Corollaire 2.1.2.

Soit $m = (m_1, \dots, m_q) \in (\mathbb{N}^*)^q$. *Pour tout* $P \in \mathbf{R}$ *on peut définir* $\mathrm{Res}_{\mathbf{R}_S/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \dfrac{P}{Q} \ dr \\ f_1^{m_1}, \dots, f_q^{m_q} \end{bmatrix}$, *et en posant* $V_m = \sum_{k=1}^{|m|+1} \binom{|m|+1}{k} (-Q)^{k-1} V^k$ *on a:*

$$\forall P \in \mathbf{R}, \qquad \mathrm{Res}_{\mathbf{R}_S/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \dfrac{P}{Q} \ dr \\ f_1^{m_1}, \dots, f_q^{m_q} \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} P.V_m \ dr \\ f_1^{m_1}, \dots, f_q^{m_q} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Preuve.

Comme $(1 - Q.V) \in f\mathbf{R}$, $(1 - Q.V)^{|m|+1} = 1 - Q.V_m$ est un élément de $(f_1^{m_1}, \dots, f_q^{m_q})\mathbf{R}$. Par conséquent $(Q, f_1^{m_1}, \dots, f_q^{m_q})\mathbf{R} = \mathbf{R}$, et les hypothèses de la proposition 2.1.1 sont vérifiées lorsqu'on remplace f_i par $f_i^{m_i}$. $\square$

Le corollaire 2.1.2 nous permet d'étendre la loi de transformation généralisée:

Corollaire 2.1.3.

Soient $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre commutative,* $f = (f_1, \dots, f_q)$ *et* $g = (g_1, \dots, g_q)$ *deux suites de* $\mathbf{R}$ *quasi-régulières telles que d'une part* $g = Af$ *où* $A \in \mathcal{M}_q(\mathbf{R})$ *et d'autre part que les* $\mathbf{A}$*-modules* $\dfrac{\mathbf{R}}{(f_1 \dots f_q)}$ *et* $\dfrac{\mathbf{R}}{(g_1 \dots g_q)}$ *soient projectifs de type fini.*

Soient $Q \in \mathbf{R}$ *tel que* $(Q, g)\mathbf{R} = \mathbf{R}$, *et* S *la partie multiplicative* $\{1, Q, \dots, Q^n, \dots\}$. *Pour tout entier* $\beta_1, \dots, \beta_q$ *et des éléments quelconques* $P, X_1, \dots, X_q$ *de* $\mathbf{R}$ *on a :*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Res}_{\mathbf{R}_S/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \dfrac{P}{Q} dX \\ f_1^{\beta_1+1}, \dots, f_q^{\beta_q+1} \end{bmatrix} \\ &\qquad = \sum_{\substack{\alpha_{1,1}+\dots+\alpha_{q,1}=\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{1,q}+\dots+\alpha_{q,q}=\beta_q}} \frac{C(\beta,\alpha)}{\beta!} \mathrm{Res}_{\mathbf{R}_S/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \dfrac{P}{Q} \det A \prod_{i,j=1}^q a_{i,j}^{\alpha_{i,j}} dX \\ (g_k^{\alpha_{k,1}+\dots+\alpha_{k,q}+1})_{1 \le k \le q} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3}$$

2.2. Application des techniques utilisées à d'autres situations.

On se propose de remplacer dans ce paragraphe la relation $g = Af$ par $g_1, \dots, g_q$ sont dans la clôture intégrale de l'idéal engendré par $f_1, \dots, f_q$. Les techniques mises en œuvre dans la preuve algébrique de la loi de transformation généralisée, fournissent les relations énoncées dans les propositions 2.2.1 et 2.2.2. La preuve de la proposition 2.2.1 utilise les déterminants permettant un calcul explicite du résultant de q polynômes homogènes en q variables, tels que décrits dans l'article de Macaulay ([Mac1] §3).

Proposition 2.2.1.
Soient $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre commutative,* $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *et* $g = (g_1, \ldots, g_q)$ *deux suites quasi-régulières de* $\mathbf{R}$ *telles que les* $\mathbf{A}$*-modules* $\dfrac{\mathbf{R}}{(f_1 \ldots f_q)}$ *et* $\dfrac{\mathbf{R}}{(g_1 \ldots g_q)}$ *soient projectifs de type fini. On suppose que* $g_1, \ldots, g_q$ *sont dans la clôture intégrale de l'idéal de* $\mathbf{R}$ *engendré par* $f_1, \ldots, f_q$*. On note* N_i *le degré de la relation intégrale de* g_i*,* $M = N_1 + \cdots + N_q - q + 1$*, et* $U_1, \ldots, U_q$ *des variables algébriquement libres sur* $\mathbf{R}$*.*

Les relations de dépendance intégrale de $g_1, \ldots, g_q$ *fournissent un polynôme* $D(U) = 1 - \delta(U)$ *où* $\delta(U) \in (U_1, \ldots, U_q)\mathbf{R}[U]$*, et un polynôme* $\Delta(U) \in \mathbf{R}[U]$ *tels que:*

$$\forall s = (s_1, \ldots, s_q) \in \mathbb{N}^q, \qquad \forall (h, r_1, \ldots, r_q) \in \mathbf{R}^{q+1},$$

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} h\, g_1^{s_1} \ldots g_q^{s_q}\ dr \\ f_1^{s_1+1}, \ldots, f_q^{s_q+1} \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} h\, P_s \Big(\big(1 + \delta(U) + \cdots + \delta^{|s|}(U)\big)^q \, \Delta(U) \Big)\ dr \\ g_1^M, \ldots, g_q^M \end{bmatrix} \tag{4}$$

où P_s *est l'opérateur qui a un polynôme de* $\mathbf{R}[U]$ *associe le cœfficient de son terme en* $U_1^{s_1} \ldots U_q^{s_q}$*.*

Preuve.
Pour $i = 1, \ldots, q$ on considère des relations de dépendance intégrale

$$g_i^{N_i} + \sum_{k=1}^{N_i} g_i^{N_i - k} \left(\sum_{|(k_1, \ldots, k_q)| = k} a_{i,(k_1,\ldots,k_q)} f_1^{k_1} \ldots f_q^{k_q} \right) = 0, \tag{5}$$

où $a_{i,(k_1,\ldots,k_q)} \in \mathbf{R}$. En remplaçant dans (5), f_i par $f_i - U_i g_i + U_i g_i$, on obtient en développant un élément $\theta_i(U) \in (f_1 - U_1 g_1, \ldots, f_q - U_q g_q)\mathbf{R}[U]$ tel que:

$$g_i^{N_i} + \sum_{k=1}^{N_i} g_i^{N_i - k} \left(\sum_{|(k_1, \ldots, k_q)| = k} a_{i,(k_1,\ldots,k_q)} (U_1 g_1)^{k_1} \ldots (U_q g_q)^{k_q} \right) = \theta_i(U) \ . \tag{6}$$

Ces égalités fournissent le système

$$\begin{gathered} g_1^{N_1} \left(1 + \sum_{k=1}^{N_1} a_{1,(k,0,\ldots,0)} U_1^k \right) + \sum_{k=1}^{N_1} g_1^{N_1 - k} \left(\sum_{\substack{|(k_1,\ldots,k_q)| = k \\ k_1 < k}} a_{1,(k_1,\ldots,k_q)} \prod_{j=1}^{q} (U_j g_j)^{k_j} \right) = \theta_1(U) \\ \vdots \\ g_q^{N_q} \left(1 + \sum_{k=1}^{N_q} a_{q,(k,0,\ldots,0)} U_1^k \right) + \sum_{k=1}^{N_q} g_q^{N_q - k} \left(\sum_{\substack{|(k_1,\ldots,k_q)| = k \\ k_1 < k}} a_{q,(k_1,\ldots,k_q)} \prod_{j=1}^{q} (U_j g_j)^{k_j} \right) = \theta_q(U) \end{gathered} \tag{7}$$

On peut considérer $\theta_1(U), \ldots, \theta_q(U)$ comme des polynômes homogènes en $g_1, \ldots, g_q$ de degrés respectifs $N_1, \ldots, N_q$, tels que $\theta_i(0) = g_i^{N_i}$.

Soit $M = N_1 + \cdots + N_q - q + 1$. Pour $k = 1, \ldots, q$, on note:

$$R_k(M - N_k) = \{\omega_1^k = g_k^{M-N_k}, \omega_2^k, \ldots, \omega_{i_k}^k\}$$

l'ensemble des monômes k-réduits $g_1^{d_1} \ldots g_q^{d_q}$ de degré $d_1 + \cdots + d_q = M - N_k$, c'est-à-dire tels que $d_1 < N_1, \ldots, d_{k-1} < N_{k-1}$. En multipliant les éléments de $R_k(M - N_k)$ par $g_k^{N_k}$ on peut remarquer que

$$\{g_1^{N_1}\omega_1^1, \ldots, g_1^{N_1}\omega_{i_1}^1, g_2^{N_2}\omega_1^2, \ldots, g_q^{N_q}\omega_{i_q}^q\}$$

est l'ensemble des monômes $g_1^{d_1} \ldots g_q^{d_q}$ de degré M. On note $\mathcal{D}(U)$ la matrice carrée à cœfficients dans $\mathbf{R}[U]$ dont les lignes sont les coordonnées respectives de

$$\omega_1^1\theta_1(U), \ldots, \omega_{i_1}^1\theta_1(U), \omega_1^2\theta_2(U), \ldots, \omega_{i_q}^q\theta_q(U)$$

dans la base

$$(g_1^{N_1}\omega_1^1, \ldots, g_1^{N_1}\omega_{i_1}^1, g_2^{N_2}\omega_1^2, \ldots, g_q^{N_q}\omega_{i_q}^q).$$

On a:

$$\mathcal{D}(U)\begin{pmatrix} g_1^{N_1}\omega_1^1 \\ \vdots \\ g_q^{N_q}\omega_{i_q}^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^1\theta_1(U) \\ \vdots \\ \omega_{i_q}^q\theta_q(U) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Comme $\theta_i(0) = g_i^{N_i}$, $\mathcal{D}(0)$ est la matrice identité. On note $D(U) \in \mathbf{R}[U]$ le déterminant de la matrice $\mathcal{D}(U)$. Comme $g_k^{N_k}\omega_1^k = g_k^M$, les formules de Cramer appliquées à (8), permettent d'exprimer

$$D(U)g_k^M,$$

comme une combinaison linéaire de $\theta_1(U), \ldots, \theta_q(U)$ à cœfficients dans $\mathbf{R}[U]$. D'autre part les formules (5) et (6) donnent une écriture de $\theta_i(U)$ comme combinaison linéaire de $f_1 - U_1g_1, \ldots, f_q - U_qg_q$. Par conséquent on obtient des polynômes $A_{i,j}(U) \in \mathbf{R}[U]$ tels que

$$D(U)g_k^M = \sum_{j=1}^{q} A_{i,j}(U)\,(f_j - U_jg_j)\,. \tag{9}$$

On note $\delta(U) = 1 - D(U)$. Comme $D(0) = 1$, $\delta(U) \in (U_1, \ldots, U_q)\mathbf{R}[U]$. Soit $s = (s_1, \ldots, s_q) \in \mathbb{N}^q$, en multipliant les deux membres de (9) par $1 + \delta(U) + \cdots + \delta^{|s|}(U)$ on a:

$$(1 - \delta(U)^{|s|+1})g_k^M = \Big(1 + \delta(U) + \cdots + \delta^{|s|}(U)\Big)\sum_{j=1}^{q} A_{i,j}(U)\,(f_j - U_jg_j)\,. \tag{10}$$

Soit $\Delta(U) = \det((A_{i,j}))$. D'après la loi de transformation, pour $h, r_1, \ldots, r_n \in \mathbf{R}$ on a:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h\ dU \wedge dr \\ U^{s+\underline{1}}, f - Ug \end{bmatrix} \\ &\quad = \operatorname{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h(1 + \delta(U) + \cdots + \delta^{|s|}(U))^q\Delta(U)\ dU \wedge dr \\ U^{s+\underline{1}}, (1 - \delta^{|s|+1}(U))g_1^M, \ldots, (1 - \delta^{|s|+1}(U))g_q^M \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{11}$$

Comme $\delta(U) \in (U_1, \ldots, U_q)\mathbf{R}[U]$, $\delta^{|s|+1}(U) \in (U_1^{s_1+1}, \ldots, U_q^{s_q+1})\mathbf{R}[U]$. La loi de transformation permet d'obtenir

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h\; dU \wedge dr \\ U^{s+\underline{1}}, f - Ug \end{bmatrix} &= \operatorname{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h\,(1+\delta(U)+\cdots+\delta^{|s|}(U))^q \Delta(U)\; dU \wedge dr \\ U^{s+\underline{1}}, g_1^M, \ldots, g_q^M \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h\, P_s\left((1+\delta(U)+\cdots+\delta^{|s|}(U))^q \Delta(U)\right)\; dr \\ g_1^M, \ldots, g_q^M \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

D'autre part en écrivant $f_i^{s_i+1} = U_i^{s_i+1} g_i^{s_i+1} + (f_i - U_i g_i)\left(\sum_{k=0}^{s_i} (U_i g_i)^k f_i^{s_i-k}\right)$, la loi de transformation donne

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h\; dU \wedge dr \\ U^{s+\underline{1}}, f - Ug \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h\, g_1^{s_1} \ldots g_q^{s_q}\; dr \\ f_1^{s_1+1}, \ldots, f_q^{s_q+1} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

A partir des formules (12) et (13) on obtient:

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h\, g_1^{s_1} \ldots g_q^{s_q}\; dr \\ f_1^{s_1+1}, \ldots, f_q^{s_q+1} \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h\, P_s\left((1+\delta(U)+\cdots+\delta^{|s|}(U))^q \Delta(U)\right)\; dr \\ g_1^M, \ldots, g_q^M \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Proposition 2.2.2.

Soient $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre commutative, $f = (f_1, \ldots, f_q)$ et $g = (g_1, \ldots, g_q)$ deux suites quasi-régulières de $\mathbf{R}$ telles que les $\mathbf{A}$-modules $\dfrac{\mathbf{R}}{(f_1 \ldots f_q)}$ et $\dfrac{\mathbf{R}}{(g_1 \ldots g_q)}$ soient projectifs de type fini. On suppose que $g_1, \ldots, g_q$ sont dans la clôture intégrale de l'idéal de $\mathbf{R}$ engendré par $f_1, \ldots, f_q$. On note $U_1, \ldots, U_q$ des variables algébriquement libres sur $\mathbf{R}$, et des relations de dépendances intégrales

$$g_i^N - \sum_{K=1}^{N} g_i^{N-K} P_{i,K}(f) = 0 \tag{14}$$

où $P_{i,K}(f) = \sum_{|k|=K} a_{i,k} f^k$. Alors

$\forall s = (s_1, \ldots, s_q) \in \mathbb{N}^q, \qquad \forall (h, r_1, \ldots, r_q) \in \mathbf{R}^{q+1}$,

$$\begin{aligned}&\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h\; dr \\ f_1^{s_1+1}, \ldots, f_q^{s_q+1} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{\substack{(K_1,\ldots,K_q)\in\mathbb{N}^q \\ (l_1,\ldots l_q)\in\mathbb{N}^q \\ 1\le K_i\le N, i=1,\ldots,q \\ 0\le l_i\le |s|, i=1,\ldots,q}} \sum_{\substack{(\alpha^1,\ldots,\alpha^q)\in(\mathbb{N}^N)^q \\ \alpha^i=(\alpha^i_1,\ldots,\alpha^i_N) \\ |\alpha^i|=l_i \\ \sigma\in S_q}} \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h\, P_s\left(Q_{\sigma,K_1,\ldots,K_q}(U) Q_{\alpha^1,\ldots,\alpha^q}(U)\right)\; dr \\ g_1^{\alpha_1^1+2\alpha_2^1+\cdots+N\alpha_N^1}, \ldots, g_q^{\alpha_1^q+2\alpha_2^q+\cdots+N\alpha_N^q} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{15}$$

où

$$Q_{\alpha^1,\ldots,\alpha^q}(U) = \prod_{i=1}^{q} \binom{|\alpha^i|}{\alpha_1^i, \ldots, \alpha_N^i} P_{i,1}^{\alpha_1^i}(U) \ldots P_{i,N}^{\alpha_N^i}(U)$$

$$Q_{\sigma,K_1,\ldots,K_q}(U) = \sum_{\substack{(k^1,\ldots,k^q)\in(\mathbb{N}^q)^q \\ (s^1,\ldots,s^q)\in(\mathbb{N}^q)^q \\ |k^j|=K_{\sigma^{-1}(j)} \\ s^j\in\Delta_{k^j}}} (-1)^{|\sigma|} \prod_{j=1}^{q} a_{\sigma(j),k^j} \binom{k^j}{s^j} (f-U)^{s^j-\epsilon_j} U^{k^j-s^j}$$

avec les notations

$$\binom{k^j}{s^j} = \binom{k_1^j}{s_1^j} \cdots \binom{k_q^j}{s_q^j} \qquad \textit{et}$$

$$\Delta_{k^j} = \{s^j = (s_1^j, \ldots, s_q^j) \in \mathbb{N}^q \mid$$
$$s_1^j = \cdots = s_{j-1}^j = 0\,;\, 1 \le s_j^j \le k_j^j\,;\, 0 \le s_i^j \le k_i^j \quad i = j+1, \ldots, q\}.$$

Preuve.

En remplaçant dans (14), f_i par $f_i - U_i + U_i$ on obtient en développant, des polynômes $d_{i,j}(U) \in \mathbf{R}[U]$ tels que:

$$g_i^N - \sum_{K=1}^{N} g_i^{N-K} P_{i,K}(U) = \sum_{j=1}^{q} d_{i,j}(U)(f_j - U_j), \tag{16}$$

où

$$d_{i,j}(U) = \sum_{K=1}^{N} g_i^{N-K} \left(\sum_{\substack{|k^j|=K\,,\, k_j^j \neq 0 \\ s^j \in \Delta_{k^j}}} a_{i,k^j} \binom{k^j}{s^j} (f-U)^{s^j - \epsilon_j} U^{k^j - s^j} \right).$$

On note

$$t(U) = \det((d_{i,j}))\ ,\ \Lambda_i(U) = \sum_{K=1}^{N} g_i^{N-K} P_{i,K}(f).$$

Soit $s = (s_1, \ldots, s_q) \in \mathbb{N}^q$, en multipliant les deux membres de l'égalité (16) par $\sum_{l=0}^{|s|} g_i^{N(|s|-l)} \Lambda_i^l(U)$ on obtient:

$$g_i^{N(|s|+1)} - \Lambda_i^{|s|+1}(U) = \left(\sum_{l=0}^{|s|} g_i^{N(|s|-l)} \Lambda_i^l(U) \right) \sum_{j=1}^{q} d_{i,j}(U)(f_j - U_j)\ . \tag{17}$$

La loi de transformation permet d'écrire:

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} h\ dU \wedge dr \\ U^{s+\underline{1}}, f - U \end{bmatrix}$$
$$= \operatorname{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} h\ t(U) \prod_{i=1}^{q} \left(\sum_{l=0}^{|s|} g_i^{N(|s|-l)} \Lambda_i^l(U) \right)\ dU \wedge dr \\ U^{s+\underline{1}}, g_1^{N(|s|+1)} - \Lambda_1^{|s|+1}(U), \ldots, g_q^{N(|s|+1)} - \Lambda_q^{|s|+1}(U) \end{bmatrix}.$$

Or $\Lambda_i(U) \in (U_1, \ldots, U_q)\mathbf{R}[U]$, donc $\Lambda_i^{|s|+1}(U) \in (U_1^{s_1}, \ldots, U_q^{s_q})\mathbf{R}[U]$ et

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} h\ dU \wedge dr \\ U^{s+\underline{1}}, f - U \end{bmatrix} &= \operatorname{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} h\ t(U) \prod_{i=1}^{q} \left(\sum_{l=0}^{|s|} g_i^{N(|s|-l)} \Lambda_i^l(U) \right)\ dU \wedge dr \\ U^{s+\underline{1}}, g_1^{N(|s|+1)}, \ldots, g_q^{N(|s|+1)} \end{bmatrix} \\
&= \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} h\, P_s \left(t(U) \prod_{i=1}^{q} \left(\sum_{l=0}^{|s|} g_i^{N(|s|-l)} \Lambda_i^l(U) \right) \right)\ dr \\ g_1^{N(|s|+1)}, \ldots, g_q^{N(|s|+1)} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{\substack{(l_1, \ldots, l_q) \in \mathbb{N}^q \\ 0 \le l_j \le |s|}} \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} h\, P_s \left(t(U) \Lambda_1^{l_1}(U) \ldots \Lambda_q^{l_q}(U) \right)\ dr \\ g_1^{N(1+l_1)}, \ldots, g_q^{N(1+l_q)} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Comme

$$\Lambda_i(U)=\sum_{K=1}^{N} g_i^{N-K}P_{i,K}(f),$$

on a:

$$\begin{aligned}&\Lambda_1^{l_1}(U)\dots\Lambda_q^{l_q}(U)\\ &=\sum_{\substack{(\alpha^1,\dots,\alpha^q)\in(\mathbb{N}^N)^q\\ |\alpha^i|=l_i}}\prod_{i=1}^{q}\binom{l_i}{\alpha_1^i,\dots,\alpha_N^i} g_i^{\alpha_1^i(N-1)+\alpha_2^i(N-2)+\cdots+\alpha_{N-1}^i}P_{i,1}^{\alpha_1^i}(U)\dots P_{i,N}^{\alpha_N^i}(U).\end{aligned}$$

Comme

$$d_{i,j}(U)=\sum_{K=1}^{N} g_i^{N-K}\left(\sum_{\substack{|k^j|=K\,,\,k_j^j\neq 0\\ s^j\in\Delta_{k^j}}} a_{i,k^j}\binom{k^j}{s^j}(f-U)^{s^j-\epsilon_j}U^{k^j-s^j}\right),$$

on a:

$$t(U)=\sum_{\sigma\in S_q}\sum_{\substack{(K_1,\dots,K_q)\in\mathbb{N}^q\\ 1\leq K_j\leq N}} g_{\sigma(1)}^{N-K_1}\dots g_{\sigma(q)}^{N-K_q}Q_{\sigma,K_1,\dots,K_q}(U).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h\ dU\wedge dr\\ U^{s+\underline{1}},f-U\end{bmatrix}\\ &=\sum_{\substack{(K_1,\dots,K_q)\in\mathbb{N}^q\\ (l_1,\dots l_q)\in\mathbb{N}^q\\ 1\leq K_i\leq N, i=1,\dots,q\\ 0\leq l_i\leq|s|, i=1,\dots,q}}\ \sum_{\substack{(\alpha^1,\dots,\alpha^q)\in(\mathbb{N}^N)^q\\ \alpha^i=(\alpha_1^i,\dots,\alpha_N^i)\\ |\alpha^i|=l_i\\ \sigma\in S_q}}\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h\,P_s\left(Q_{\sigma,K_1,\dots,K_q}(U)Q_{\alpha^1,\dots,\alpha^q}(U)\right)\ dr\\ g_1^{\alpha_1^1+2\alpha_2^1+\cdots+N\alpha_N^1},\dots,g_q^{\alpha_1^q+2\alpha_2^q+\cdots+N\alpha_N^q}\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{19}$$

D'autre part, d'après le lemme 1.4.2, on a

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}[U]/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h\ dU\wedge dr\\ U^{s+\underline{1}},f-U\end{bmatrix}=\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h\ dr\\ f_1^{s_1+1},\dots,f_q^{s_q+1}\end{bmatrix}, \tag{20}$$

ce qui prouve la proposition. □

2.3. La formule des transporteurs.

Dans l'article [B-Y$_3$] *Residue Calculus and Effective Nullstellensatz*, C. A. Berenstein et A. Yger présentent une variante de la loi de transformation que l'on appelle ici la formule des transporteurs ([B-Y$_3$] §2, prop.2.2). On propose ci-dessous un énoncé plus général de cette formule avec des hypothèses moins restrictives, et une preuve plus élémentaire qui n'utilise pas le complexe de Koszul.

Proposition 2.3.1.
Soient $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre commutative,* $f = (f_0, f_1, \ldots, f_q)$ *et* $g = (f_0, g_1, \ldots, g_q)$ *des suites quasi-régulières de* $\mathbf{R}$ *telles que* $\dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *et* $\dfrac{\mathbf{R}}{g\mathbf{R}}$ *soient des* $\mathbf{A}$*-modules projectifs de type fini. On suppose qu'il existe des entiers naturels* $s_1, \ldots s_q$*, et des éléments* $a_{j,l} \in \mathbf{R}$ *tels que*

$$f_0^{s_j} g_j = \sum_{l=1}^{q} a_{j,l} f_l \qquad (j = 1, \ldots, q). \tag{21}$$

Alors pour tout $k_0 \in \mathbb{N}$ *et* $x_0, \ldots, x_q \in \mathbf{R}$ *on a:*

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q\, dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_q \\ f_0^{k_0+1}, f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q\Delta\, dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_q \\ f_0^{k_0+1+|s|}, g_1, \ldots, g_q \end{bmatrix} \tag{22}$$

où $|s| = s_1 + \cdots + s_q$ *et* $\Delta = \det\left((a_{j,l})_{1 \le j,l \le q}\right)$.

Par rapport à l'énoncé proposé dans [B-Y$_3$], on ne suppose plus ici que la suite f est régulière dans un certain ordre. La première partie de la preuve présentée dans [B-Y$_3$], et que l'on rappelle brièvement ci-dessous, n'utilise pas cette hypothèse.

La suite $(f_0^{k_0+1+|s|}, f_1, \ldots, f_q)$ étant quasi-régulière, on déduit de (21) que $g_j \in (f_0^{k_0+1+|s|}, f_1, \ldots, f_q)\mathbf{R}$. Soient $\tilde{a}_{j,l} \in \mathbf{R}$ tels que

$$g_j = \tilde{a}_{j,0} f_0^{|s|} f_0^{k_0+1} + \sum_{l=1}^{q} \tilde{a}_{j,l} f_l \qquad (j = 1, \ldots, q)\ , \tag{23}$$

$$f_0^{s_j} g_j = \tilde{a}_{j,0} f_0^{s_j+|s|} f_0^{k_0+1} + \sum_{l=1}^{q} f_0^{s_j} \tilde{a}_{j,l} f_l \qquad (j = 1, \ldots, q)\ . \tag{24}$$

A partir des égalités (23), la loi de transformation donne:

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q\, dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_q \\ f_0^{k_0+1}, f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q\ \det\left((\tilde{a}_{j,l})_{1 \le j,l \le q}\right)\, dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_q \\ f_0^{k_0+1}, g_1, \ldots, g_q \end{bmatrix}. \tag{25}$$

D'autre part, d'après le lemme II.1.4.2 formule (21) (ou la loi de transformation), on a

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q\ \det\left((\tilde{a}_{j,l})_{1 \le j,l \le q}\right)\, dx \\ f_0^{k_0+1}, g_1, \ldots, g_q \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q\ \det\left((f_0^{s_j} \tilde{a}_{j,l})_{1 \le j,l \le q}\right)\, dx \\ f_0^{k_0+1+|s|}, g_1, \ldots, g_q \end{bmatrix}. \tag{26}$$

L'hypothèse de régularité dans un certain ordre de la suite f, intervient dans [B-Y$_3$] pour montrer que $\left(\Delta - \det\left((f_0^{s_j} \tilde{a}_{j,l})_{1 \le j,l \le q}\right)\right) \in (f_0^{k_0+1+|s|}, g_1, \ldots, g_q)\mathbf{R}$. Le lemme suivant montre que ceci est réalisé sans cette hypothèse supplémentaire sur la suite f, et termine la preuve de la proposition.

Lemme 2.3.2.
Soient $\mathbf{R}$ *un anneau ,* $(k_0, s_1, \ldots, s_q) \in \mathbb{N}^{q+1}$*,* $(f_0^{k_0+1+|s|}, f_1, \ldots, f_q)$ *une suite de* $\mathbf{R}$ *et* $(f_0^{k_0+1+|s|}, g_1, \ldots, g_q)$ *une suite quasi-régulière de* $\mathbf{R}$*. On suppose que* $g_j \in (f_0^{k_0+1+|s|}, f_1, \ldots, f_q)\mathbf{R}$ *pour* $j = 1, \ldots, q$*, et qu'il existe des éléments* $\alpha_{i,j} \in \mathbf{R}$ *(resp.* $\alpha'_{i,j} \in \mathbf{R}$*) tels que*

$$f_0^{s_j} g_j = \alpha_{j,0} f_0^{k_0+1} + \sum_{l=1}^{q} \alpha_{j,l} f_l \qquad (j = 1, \ldots, q) \tag{26}$$

$$(\textit{resp.} \qquad f_0^{s_j} g_j = \alpha'_{j,0} f_0^{k_0+1} + \sum_{l=1}^{q} \alpha'_{j,l} f_l \qquad (j = 1, \ldots, q) \quad . \qquad (27\ ))$$

On note $\Delta = \det\left((\alpha_{j,l})_{1 \le j,l \le q}\right)$ *(resp.* $\Delta' = \det\left((\alpha'_{j,l})_{1 \le j,l \le q}\right)$*), alors*

$$(\Delta - \Delta') \in (f_0^{k_0+1+|s|}, g_1, \ldots, g_q)\mathbf{R} \ .$$

Preuve.
Il suffit de prouver le lemme lorsque les systèmes (27) et (28) ont uniquement une seule ligne différente. Soit i_0 cette ligne. Par soustraction des lignes i_0 et en gardant les autres lignes, on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} f_0^{s_1} g_1 - \alpha_{1,0} f_0^{k_0+1} = \sum_{l=1}^{q} \alpha_{1,l} f_l \\ \vdots \\ -(\alpha_{i_0,0} - \alpha'_{i_0,0}) f_0^{k_0+1} = \sum_{l=1}^{q} (\alpha_{i_0,l} - \alpha'_{i_0,l}) f_l \\ \vdots \\ f_0^{s_q} g_q - \alpha_{q,0} f_0^{k_0+1} = \sum_{l=1}^{q} \alpha_{q,l} f_l \end{cases}$$

D'après les régles de Cramer, pour $j = 1, \ldots, q$ on a:

$$(\Delta - \Delta')\, f_j \in (f_0^{k_0+1}, f_0^{s_1} g_1, \ldots, \widehat{f_0^{s_{i_0}} g_{i_0}}, \ldots, f_0^{s_q} g_q)\mathbf{R} \ .$$

Par hypothèse $g_{i_0} \in (f_0^{k_0+1+|s|}, f_1, \ldots, f_q)\mathbf{R}$, par conséquent

$$\begin{aligned} (\Delta - \Delta')\, g_{i_0} &\in (f_0^{k_0+1+|s|}, f_0^{s_1} g_1, \ldots, \widehat{f_0^{s_{i_0}} g_{i_0}}, \ldots f_0^{s_q} g_q)\mathbf{R} \\ &\in (f_0^{k_0+1+|s|}, g_1, \ldots, \widehat{g_{i_0}}, \ldots, g_q)\mathbf{R} \ . \end{aligned}$$

La suite $(f_0^{k_0+1+|s|}, g_1, \ldots, g_q)$ étant quasi-régulière, ceci prouve que

$$(\Delta - \Delta') \in (f_0^{k_0+1+|s|}, g_1, \ldots, g_q)\mathbf{R} \ . \quad \square$$

On donne ci-dessous une extension de la proposition 2.3.1.

Proposition 2.3.3.
Soient $\mathbf{R}$ *un anneau nœthérien muni d'une structure de* $\mathbf{A}$*-algèbre commutative,* $\mathcal{F}_j = (h_j, f_1, \ldots, f_q)$ *et* $\mathcal{G}_j = (h_j, g_1, \ldots, g_q)$ *où* $j = 1, \ldots, q$ *, des suites quasi-régulières de* $\mathbf{R}$ *telles que* $\dfrac{\mathbf{R}}{\mathcal{F}_j\mathbf{R}}$ *et* $\dfrac{\mathbf{R}}{\mathcal{G}_j\mathbf{R}}$ *soient des* $\mathbf{A}$*-modules de type fini, et que pour tout* $k = (k_1, \ldots, k_q) \in \mathbb{N}^q$ *les* $\mathbf{A}$*-modules* $\dfrac{\mathbf{R}}{(h^{k+\underline{1}}, f_1, \ldots, f_q)\mathbf{R}}$ *et* $\dfrac{\mathbf{R}}{(h^{k+\underline{1}}, g_1, \ldots, g_q)\mathbf{R}}$ *soient projectifs.*

Alors pour tout $Q, x_0, \ldots, x_q \in \mathbf{R}$ *on peut définir*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q\, dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_q \\ h^{k+\underline{1}}, f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix} \qquad et \qquad \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q\, dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_q \\ h^{k+\underline{1}}, g_1, \ldots, g_q \end{bmatrix}, \tag{29}$$

de plus, s'il existe des éléments $a_{j,l} \in \mathbf{R}$ *et* $s = (s_1, \ldots s_q) \in \mathbb{N}^q$ *tels que*

$$h_j^{s_j} g_j = \sum_{l=1}^{q} a_{j,l} f_l \qquad (j = 1, \ldots, q), \tag{30}$$

alors

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q\, dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_q \\ h^{k+\underline{1}}, f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q\Delta\, dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_q \\ h^{k+\underline{1}+s}, g_1, \ldots, g_q \end{bmatrix} \tag{31}$$

où $\Delta = \det\left((a_{j,l})_{1 \le j,l \le q}\right)$.

Remarque: l'hypothèse de projectivité des $\mathbf{A}$-modules $\dfrac{\mathbf{R}}{(h^{k+\underline{1}}, f_1, \ldots, f_q)\mathbf{R}}$ et $\dfrac{\mathbf{R}}{(h^{k+\underline{1}}, g_1, \ldots, g_q)\mathbf{R}}$, est trivialement vérifiée lorsque $\mathbf{A}$ est un corps.

Preuve.
$\mathcal{F}_i$ et $\mathcal{G}_i$ vérifiant les mêmes hypothèses, pour justifier les écritures (29), il suffit de montrer que pour $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, q\}$, $(h_{i_1}h_{i_2}, f_1, \ldots, f_q)$ est une suite quasi-régulière, et $\dfrac{\mathbf{R}}{(h_{i_1}h_{i_2}, f_1, \ldots, f_q)\mathbf{R}}$ est un $\mathbf{A}$-module de type fini.

Soit $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_r)$ (resp. $(\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_s)$) un système générateur du $\mathbf{A}$-module $\dfrac{\mathbf{R}}{\mathcal{F}_{i_1}\mathbf{R}}$ (resp. $\dfrac{\mathbf{R}}{\mathcal{F}_{i_2}\mathbf{R}}$). On note $e_1, \ldots, e'_s$ des représentants dans $\mathbf{R}$ de $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}'_s$. Pour $r \in \mathbf{R}$ il existe des éléments $a_1, a_2, b_1, \ldots, b_q, c_1, \ldots c_q$ de $\mathbf{R}$ et des éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, $\beta_1, \ldots, \beta_s$ de $\mathbf{A}$ tels que

$$\begin{aligned} r &= a_1 h_{i_1} + \sum_{i=1}^{q} b_i f_i + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j e_j \\ a_1 &= a_2 h_{i_2} + \sum_{i=1}^{q} c_i f_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j e'_j \end{aligned}.$$

Par conséquent

$$r = \sum_{j=1}^{s} \beta_j e'_j h_{i_1} + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j e_j + \sum_{i=1}^{q} (b_i + c_i h_{i_1}) f_i + a_1 a_2 h_{i_1} h_{i_2} \ ,$$

et montre que $\{e_1, \dots, e_r, e'_1 h_{i_1}, \dots, e'_s h_{i_1}\}$ donne un systéme générateur du $\mathbf{A}$-module $\dfrac{\mathbf{R}}{(h_{i_1}h_{i_2}, f_1, \dots, f_q)}$. Soit $\mathfrak{m} \supset (h_{i_1}h_{i_2}, f_1, \dots, f_q)$ un idéal maximal de $\mathbf{R}$. Comme $h_{i_1} \in \mathfrak{m}$ ou $h_{i_2} \in \mathfrak{m}$ et que les suites $(h_{i_1}, f_1, \dots, f_q)$ et $(h_{i_2}, f_1, \dots, f_q)$ sont quasi-régulières, $(f_1, \dots, f_q)$ est une suite régulière de $\mathbf{R}_\mathfrak{m}$ et $h_{i_1}h_{i_2}$ n'est pas diviseur de zéro dans $\dfrac{\mathbf{R}_\mathfrak{m}}{(f_1, \dots, f_q)}$. Par conséquent $(h_{i_1}h_{i_2}, f_1, \dots, f_q)$ est une suite régulière de $\mathbf{R}_\mathfrak{m}$, et prouve la quasi-régularité de la suite $(h_{i_1}h_{i_2}, f_1, \dots, f_q)$ dans $\mathbf{R}$.

La suite $(h^{k+\underline{1}+s}, f_1, \dots, f_q)$ étant quasi-régulière, on déduit de (30) que $g_j \in (h^{k+\underline{1}+s}, f_1, \dots, f_q)\mathbf{R}$. Soient $\tilde{a}_{j,l} \in \mathbf{R}$ tels que

$$g_j = \tilde{a}_{j,0} h^s h^{k+\underline{1}} + \sum_{l=1}^{q} \tilde{a}_{j,l} f_l \qquad (j = 1, \dots, q)\ , \tag{32}$$

$$h_j^{s_j} g_j = \tilde{a}_{j,0} h_j^{s_j} h^s h^{k+\underline{1}} + \sum_{l=1}^{q} h_j^{s_j} \tilde{a}_{j,l} f_l \qquad (j = 1, \dots, q)\ . \tag{33}$$

A partir des égalités (32), la loi de transformation donne:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q\, dx_0 \wedge \dots \wedge dx_q \\ h^{k+\underline{1}}, f_1, \dots, f_q \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q\ \det\left((\tilde{a}_{j,l})_{1 \le j,l \le q}\right)\, dx_0 \wedge \dots \wedge dx_q \\ h^{k+\underline{1}}, g_1, \dots, g_q \end{bmatrix} . \tag{34}$$

D'autre part, grâce à la loi de transformation, on a

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q\ \det\left((\tilde{a}_{j,l})_{1 \le j,l \le q}\right)\, dx \\ h^{k+\underline{1}}, g_1, \dots, g_q \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q\ \det\left((h_j^{s_j}\tilde{a}_{j,l})_{1 \le j,l \le q}\right)\, dx \\ h^{k+\underline{1}+s}, g_1, \dots, g_q \end{bmatrix} , \tag{35}$$

où $dx = dx_0 \wedge \dots \wedge dx_q$. Le lemme suivant montre que

$$\left(\Delta - \det\left((h_j^{s_j}\tilde{a}_{j,l})_{1 \le j,l \le q}\right)\right) \in (h^{k+\underline{1}+s}, g_1, \dots, g_q)\mathbf{R}$$

et termine la preuve de la proposition. $\square$

Lemme 2.3.4.

Soient $\mathbf{R}$ *un anneau nœthérien,* $(k_1, \dots, k_q, s_1, \dots, s_q) \in \mathbb{N}^{2q}$, $(h_1, \dots, h_q, f_1, \dots, f_q)$ *une suite de* $\mathbf{R}$ *et* $\mathcal{G}_j = (h_j, g_1, \dots, g_q)$ *où* $j = 1, \dots, q$ *, des suites quasi-régulières de* $\mathbf{R}$*. On suppose que* $g_j \in (h^{k+\underline{1}+s}, f_1, \dots, f_q)\mathbf{R}$ *pour* $j = 1, \dots, q$*, et qu'il existe des éléments* $\alpha_{i,j} \in \mathbf{R}$ *(resp.* $\alpha'_{i,j} \in \mathbf{R}$*) tels que*

$$h_j^{s_j} g_j = \alpha_{j,0} h^{k+\underline{1}} + \sum_{l=1}^{q} \alpha_{j,l} f_l \qquad (j = 1, \dots, q) \tag{36}$$

$$(\textit{resp.} \qquad h_j^{s_j} g_j = \alpha'_{j,0} h^{k+\underline{1}} + \sum_{l=1}^{q} \alpha'_{j,l} f_l \qquad (j = 1, \dots, q)\ . \qquad (37\ ))$$

On note $\Delta = \det\left((\alpha_{j,l})_{1 \le j,l \le q}\right)$ *(resp.* $\Delta' = \det\left((\alpha'_{j,l})_{1 \le j,l \le q}\right)$*), alors*

$$(\Delta - \Delta') \in (h^{k+\underline{1}+s}, g_1, \dots, g_q)\mathbf{R}\ .$$

Preuve.

Il suffit de prouver le lemme lorsque les systèmes (36) et (37) ont uniquement une seule ligne différente. Soit i_0 cette ligne. Par soustraction des lignes i_0 et en gardant les autres lignes de (36), on obtient le système suivant:

$$\left\{\begin{array}{rl} h_1^{s_1} g_1 - \alpha_{1,0} h^{k+\underline{1}} = & \displaystyle\sum_{l=1}^{q} \alpha_{1,l} f_l \\ & \vdots \\ -(\alpha_{i_0,0} - \alpha'_{i_0,0}) h^{k+\underline{1}} = & \displaystyle\sum_{l=1}^{q} (\alpha_{i_0,l} - \alpha'_{i_0,l}) f_l \\ & \vdots \\ h_q^{s_q} g_q - \alpha_{q,0} h^{k+\underline{1}} = & \displaystyle\sum_{l=1}^{q} \alpha_{q,l} f_l \end{array}\right.$$

D'après les régles de Cramer, pour $j = 1, \ldots, q$ on a:

$$(\Delta - \Delta')\, f_j \in (h^{k+\underline{1}}, h_1^{s_1} g_1, \ldots, \widehat{h_{i_0}^{s_{i_0}} g_{i_0}}, \ldots, h_q^{s_q} g_q)\mathbf{R} \ .$$

Par hypothèse $g_{i_0} \in (h^{k+\underline{1}+s}, f_1, \ldots, f_q)\mathbf{R}$, par conséquent

$$\begin{aligned}(\Delta - \Delta')\, g_{i_0} &\in (h^{k+\underline{1}+s}, h_1^{s_1} g_1, \ldots, \widehat{h_{i_0}^{s_{i_0}} g_{i_0}}, \ldots h_q^{s_q} g_q)\mathbf{R} \\ &\in (h^{k+\underline{1}+s}, g_1, \ldots, \widehat{g_{i_0}}, \ldots, g_q)\mathbf{R} \ .\end{aligned}$$

La suite $(h^{k+\underline{1}+s}, g_1, \ldots, g_q)$ étant quasi-régulière, ceci prouve que

$$(\Delta - \Delta') \in (h^{k+\underline{1}+s}, g_1, \ldots, g_q)\mathbf{R} \ . \quad \square$$

CHAPITRE III

EXTENSION D'UNE FORMULE DE WEIL

§1. Extension dans un cadre algébrique d'une formule de Weil

1.1. Introduction.

Soit $\mathbf{R} = \mathcal{O}_q$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^q$, et $f = (f_1, \ldots, f_q)$ une suite régulière de $\mathcal{O}_q$. Considérons alors des éléments $a_{i,j}(\zeta, z) \in \mathcal{O}_{2q}$ tels que

$$f_i(\zeta) - f_i(z) = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}(\zeta, z)(\zeta_j - z_j) \qquad (1 \le i \le q) \ ,$$

et soit $\Delta(\zeta, z) = \det(a_{i,j}(\zeta, z)) \in \mathcal{O}_{2q}$.

La formule de *représentation intégrale de Bergman-Weil* ([W],[He] ou [A-Y] théorème 9.1 p. 65) permet d'obtenir:

$$\forall h \in \mathcal{O}_q, \qquad h(z) = \frac{1}{(2i\pi)^q} \int_{\Gamma_f} \frac{h(\zeta)\Delta(\zeta, z)d\zeta}{\prod_{i=1}^{q}[f_i(\zeta) - f_i(z)]} \tag{1}$$

où, r et ϵ_i étant des réels > 0 suffisamment petits, Γ_f désigne le tube

$$\Gamma_f = \{\zeta : \zeta \in B(0, r), |f_i(\zeta)| = \epsilon_i, i = 1, \ldots, q\}$$

orienté par la condition $d(\arg f_1) \wedge \cdots \wedge d(\arg f_q) > 0$.

Un développement en série sous le signe d'intégration de (1) permet d'obtenir la *formule de Weil* ([W],[He] ou [AY] théorème 24.9 p. 199) :

$$\forall h \in \mathcal{O}_q, \qquad h(z) = \sum_{(i_1, \ldots, i_q) \in (N^*)^q} \frac{1}{(2i\pi)^q} \int_{\Gamma_f} \frac{h(\zeta)\Delta(\zeta, z)d\zeta}{f_1(\zeta)^{i_1} \ldots f_q(\zeta)^{i_q}} f_1^{i_1 - 1}(z) \ldots f_q^{i_q - 1}(z) \tag{2}$$

Traduit dans le langage usuel de la théorie analytique des résidus dans le cas des intersections complètes (cf. [GH]), la formule (2) s'écrit:

$$\forall h \in \mathcal{O}_q, \qquad h(z) = \sum_{(i_1, \ldots, i_q) \in (N^*)^q} \mathrm{Res}_{(f_1^{i_1}, \ldots, f_q^{i_q}, 0)} \left(\Delta(z, x)h(x)\right) f_1^{i_1 - 1}(z) \ldots f_q^{i_q - 1}(z) \tag{3}$$

La *formule de Weil* généralise donc en un sens la formule de Taylor ou de Cauchy puisqu'elle permet de développer de manière canonique tout élément h de $\mathcal{O}_q$ suivant les puissances de f. Elle a en outre de nombreuses applications, en particulier concernant des problèmes de Nullstellensatz effectif. (cf. [B-G-V-Y] chap. 4, [B-Y$_3$])

Le but du présent chapitre est d'étendre, dans la théorie algébrique des résidus mise en place par J. Lipman ([L]), la formule de Weil. Le texte présenté ici complète un article à paraître dans Manuscripta Mathematica.

Plus précisément notre cadre sera le suivant. Soient $\mathbf{A}$ un anneau commutatif unitaire, $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre commutative, $f = (f_1, \ldots, f_q)$ une suite de $\mathbf{R}$ quasi-régulière telle que le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ soit projectif de type fini. En suivant J. Lipman, on peut alors définir pour tout $\omega \in \wedge^q \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$, où $\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ est le $\mathbf{R}$ module des différentielles de la $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{R}$, le résidu de ω par rapport à f que l'on note: $\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \omega \\ f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix}$.

Soit maintenant $\mathbf{R}^e = \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}$ l'algèbre enveloppante de $\mathbf{R}$, et $\widehat{\mathbf{R}^e}$ son complété pour la topologie $(f \otimes \mathbf{R} + \mathbf{R} \otimes f)$-adique. Le morphisme

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^e &\longrightarrow \mathbf{R} \\ a \otimes b &\longrightarrow ab \end{aligned}$$

de noyau J, induit un morphisme $\widehat{\mathbf{R}^e} \longrightarrow \hat{\mathbf{R}}$ dont on note $\widehat{J}$ le noyau. Enfin pour $r_i \in \mathbf{R}$, on note $R_i = r_i \otimes 1 - 1 \otimes r_i \in \widehat{\mathbf{R}^e}$. Avec ces notations on montrera, dans la section 1.2, le résultat suivant:

Théorème. *(Formule de Weil)*

Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{R}$ deux anneaux commutatifs unitaires nœtheriens, $\mathbf{R}$ étant muni d'une structure de $\mathbf{A}$-algèbre plate sur $\mathbf{A}$, et $f = (f_1, \ldots, f_q)$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ telle que le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ soit projectif de type fini. On suppose qu'il existe une suite $(r_1, \ldots, r_q)$ de $\mathbf{R}$ telle que $(R_1, \ldots, R_q)$ soit une suite régulière de $\widehat{\mathbf{R}^e}$ qui engendre $\widehat{J}$.

Soient alors des éléments $a_{i,j} \in \widehat{\mathbf{R}^e}$ tels que:

$$1 \otimes f_i - f_i \otimes 1 = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j} R_j$$

et $\Delta = \det(a_{i,j}) \in \widehat{\mathbf{R}^e}$.

Pour tout $h \in \mathbf{R}$, on a dans $\hat{\mathbf{R}}$ l'égalité:

$$h = \sum_{(i_1,\ldots,i_q) \in (N^*)^q} \mathrm{Res}_{\hat{\mathbf{R}}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta h\, dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \\ f_1^{i_1}, \ldots, f_q^{i_q} \end{bmatrix} f_1^{i_1 - 1} \ldots f_q^{i_q - 1} \tag{4}$$

On donne, dans la section 1.2, quelques exemples de situations algébriques où cette formule s'applique. Les principaux cas sont les suivants:

- $\mathbf{A}$ est un anneau nœthérien et $\mathbf{R} = \mathbf{A}[z_1, \ldots, z_q]$ (on prend alors $r_i = z_i$).
- $\mathbf{R}$ est un anneau local nœthérien régulier d'égale caractéristique de corps résiduel $\mathbf{K}$, $\mathbf{A}$=$\mathbf{K}$ et $\{r_1, \ldots, r_q\}$ un systéme régulier de paramètres.
- ($\mathbf{A}$,$\mathfrak{m}$) un anneau local nœthérien séparé complet pour sa topologie $\mathfrak{m}$-adique, et $\mathbf{R} = \mathbf{A}[[z_1, \ldots, z_q]]$, les r_i étant égaux aux Z_i.

- $\mathbf{A}$ un anneau nœthérien séparé complet pour la topologie $\mathfrak{a}$-adique pour un certain idéal $\mathfrak{a}$, $\mathbf{R} = \mathbf{A}[[z_1, \dots, z_q]]$, et $(f) \subset (\mathfrak{a}, Z)$.

- $\mathbf{A}$ est un anneau nœthérien et $\mathbf{R} = \mathbf{A}[Z_1, \dots, Z_q]_S = \mathbf{A}[Z, Z^{-1}]$, où $S = \{Z^\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}^q\,, |\alpha| \geq 0\}$, est l'anneau des polynômes de Laurent (on prend alors $r_i = \dfrac{1}{Z_i}$).

Enfin, lorsque les hypothèses de la formule de Weil sont vérifiées et $Q \in \mathbf{R}$ est tel que $(Q, f)\mathbf{R} = \mathbf{R}$, on montrera que la formule de Weil peut encore s'appliquer dans $\mathbf{R}_S$ où S est la partie multiplicative $\{1, Q, Q^2, \dots\}$, et fournit, pour tout $P \in \mathbf{R}$, une écriture de $\dfrac{P}{Q}$ dans $\hat{\mathbf{R}}$.

Dans le cas polynomial ($\mathbf{R} = \mathbf{A}[z_1, \dots, z_q]$), ou des séries formelles ($\mathbf{R} = \mathbf{A}[[z_1, \dots, z_q]]$), ou encore des séries convergentes ($\mathbf{R} = \mathcal{O}_q = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_q\}$), on peut choisir de façon naturelle pour éléments différentiels $dr_1, \dots, dr_q$ de la formule (4), $dz_1, \dots, dz_q$. La suite $(r_1, \dots, r_q)$ de la formule (4), joue le rôle, lorsqu'on est dans un cadre algébrique, de la suite des coordonnées $(z_1, \dots, z_q)$ des cas $\mathbf{R} = \mathbf{A}[z_1, \dots, z_q]$, $\mathbf{R} = \mathbf{A}[[z_1, \dots, z_q]]$.

Lorsque $\mathbf{A} = \mathbb{C}$, $\mathbf{R} = \mathcal{O}_q = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_q\}$ et $r_i = z_i$, on peut choisir les $a_{i,j}$ dans $\mathcal{O}_{2q}$ et donc $\Delta \in \mathcal{O}_{2q}$. Par ailleurs $\hat{\mathbf{R}} = \mathbb{C}[[z_1, \dots z_q]]$, et pour $h \in \mathbf{R}$ on a $\mathrm{Res}_{\hat{\mathbf{R}}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta h \, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_q \\ f_1^{i_1}, \dots, f_q^{i_q} \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta h \, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_q \\ f_1^{i_1}, \dots, f_q^{i_q} \end{bmatrix}$ (cor. I.3.5.4). On peut vérifier sans peine (cf. §2, section 2.3), que la série

$$\sum_{(i_1, \dots, i_q) \in (N^*)^q} \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_q/\mathbb{C}} \begin{bmatrix} \Delta h \, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_q \\ f_1^{i_1}, \dots, f_q^{i_q} \end{bmatrix} f_1^{i_1 - 1} \dots f_q^{i_q - 1}$$

est convergente dans $\mathcal{O}_q$. On obtient ainsi une nouvelle preuve purement algébrique de la formule de Weil usuelle. Nous étendons et étudions cette situation dans le paragraphe 2.

Lorsque $\mathbf{A}$ est un anneau nœthérien, $\mathbf{R} = \mathbf{A}[z_1, \dots z_q]$ et

$$\begin{aligned} \rho_f \ : \ \mathbf{A}[z_1, \dots, z_q] &\longrightarrow \mathbf{A}[z_1, \dots, z_q] \\ z_i &\longrightarrow f_i(z) \end{aligned} ,$$

la formule de Weil permet de caractériser les homomorphismes ρ_f qui sont finis: ce sont ceux pour lesquels la formule de Weil est finie pour tout élément h de $\mathbf{R}$. Nous étudierons cette situation dans le paragraphe 2.

On fera appel dans ce paragraphe au corollaire 4.1.3 du chapitre I que l'on rappelle ci-dessous:

Corollaire. *(I.4.1.3)*

Soient $\mathbf{R}$ une $\mathbf{A}$-algèbre plate, et $f = (f_1, \dots, f_q)$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ telle que le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ soit projectif de type fini. On suppose que le noyau $\mathfrak{J}$ de $\tilde{\mu} : \mathbf{S} = \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R} \to \mathbf{P}$ est engendré par une suite quasi-régulière $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_q)$, et l'on considère des éléments $a_{i,j} \in \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}$ tels que:

$$1 \otimes f_i = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j} \zeta_j \qquad (i = 1, \dots, q).$$

Soient $\Delta_\zeta^f = \det(a_{i,j}) \in \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}$, *et* $\delta_\zeta^f = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \otimes \beta_j \in \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}$ *un représentant de* Δ_ζ^f*. on note*

$$\begin{aligned} \Omega(\Phi) : \Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} &\longrightarrow \Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{P}} \\ \alpha\, \mathrm{d}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}(r) &\longrightarrow 1 \otimes \alpha\, \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(1 \otimes r) \ , \end{aligned}$$

et on considère une suite $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_q)$ *de* $\Omega_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}$ *telle que*

$$\Omega(\Phi)(\omega_j) = \mathrm{d}_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}(\zeta_j) \ \ (\textit{modulo}\ \mathfrak{J}\Omega_{\mathbf{S}/\mathbf{P}}) \qquad j = 1, \ldots, q \ .$$

Alors

$$\forall h \in \mathbf{R}, \qquad \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \beta_j h \ \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q \\ f_1, \ldots, f_q \end{bmatrix} \equiv h \quad (\textit{modulo}\ f\mathbf{R}) \ .$$

1.2. La formule de Weil dans un cadre algébrique.

Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{R}$ deux anneaux nœtheriens, $\mathbf{R}$ étant muni d'une structure de $\mathbf{A}$-algèbre plate sur $\mathbf{A}$, et $f = (f_1, \ldots, f_q)$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ telle que le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ soit projectif de type fini. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note $f^k = (f_1^k, \ldots, f_q^k)$, $\mathbf{P}_k = \dfrac{\mathbf{R}}{f^k\mathbf{R}}$. Soit $\hat{\mathbf{R}} = \varprojlim_k \mathbf{P}_k$ le complété f-adique de $\mathbf{R}$, pour obtenir la formule de Weil on appliquera le corollaire (I.4.1.3) à $\hat{\mathbf{R}}$ et aux quotients successifs $\mathbf{P}_k$. On note $\mathbf{R}^e = \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}$ l'algèbre enveloppante de $\mathbf{R}$, et $\widehat{\mathbf{R}^e}$ son complété pour la topologie $(f \otimes \mathbf{R} + \mathbf{R} \otimes f)$-adique. On a:

$$\widehat{\mathbf{R}^e} = \varprojlim_{p,r} (\mathbf{P}_p \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_r) = \varprojlim_{k} (\mathbf{P}_k \otimes_{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{R}})$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on considère les morphismes:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k \otimes_{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{R}} &\longrightarrow \mathbf{P}_k \\ u_k \otimes \hat{r} &\longmapsto u_k.\bar{r}^{(k)} \end{aligned}$$

où $\bar{r}^{(k)}$ est l'image de $\hat{r}$ dans $\mathbf{P}_k$ par la projection canonique, et l'on note $\widehat{J_k}$ leur noyau. Le morphisme:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^e &\longrightarrow \mathbf{R} \\ u \otimes r &\longmapsto u.r \end{aligned}$$

dont on note J le noyau, est continu lorsqu'on munit $\mathbf{R}^e$ de la topologie $(f \otimes \mathbf{R} + \mathbf{R} \otimes f)$-adique et $\mathbf{R}$ de la topologie f-adique. Il induit, par passage à la limite projective, un morphisme:

$$\widehat{\mathbf{R}^e} \longrightarrow \hat{\mathbf{R}}$$

dont on note $\widehat{J}$ le noyau. Afin d'appliquer le corollaire (I.4.1.3), les lemmes suivants permettent de montrer que lorsque $\widehat{J}$ est engendré par une suite quasi-régulière $(R_1, \ldots, R_n)$, son image $(\tilde{R}_1^{(k)}, \ldots, \tilde{R}_n^{(k)})$ dans $\mathbf{P}_k \otimes_{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{R}}$ est une suite quasi-régulière qui engendre $\widehat{J_k}$. Le lemme suivant sera utilisé dans les exemples 1 et 5.

lemme 1.2.1.

Lorsque $\mathbf{R}^e$ *est nœthérien:*

i) $\widehat{J} = J.\widehat{\mathbf{R}^e}$

ii) si $(R_1, \ldots, R_q)$ *est une suite régulière de* $\mathbf{R}^e$*, son image dans* $\widehat{\mathbf{R}^e}$ *est une suite régulière.*

Preuve.

i) La suite:

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow \mathbf{R}^e \longrightarrow \mathbf{R} \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de $\mathbf{R}^e$-module. $\mathbf{R}^e$ étant nœthérien, son complété $\widehat{\mathbf{R}^e}$ est $\mathbf{R}^e$ plat ([M] corollaire 1 p.170). Par conséquent, la suite:

$$0 \longrightarrow J \otimes_{\mathbf{R}^e} \widehat{\mathbf{R}^e} \longrightarrow \mathbf{R}^e \otimes_{\mathbf{R}^e} \widehat{\mathbf{R}^e} \longrightarrow \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{R}^e} \widehat{\mathbf{R}^e} \longrightarrow 0$$

est exacte. Cette suite fournit la suite exacte:

$$0 \longrightarrow J \otimes_{\mathbf{R}^e} \widehat{\mathbf{R}^e} \longrightarrow \widehat{\mathbf{R}^e} \longrightarrow \hat{\mathbf{R}} \longrightarrow 0$$

qui montre que $\widehat{J} = J.\widehat{\mathbf{R}^e}$. $\square$

ii) Pour $0 \leq p \leq q$ on pose: $\mathbf{R}^e_0 = \mathbf{R}^e$, $\mathbf{R}^e_p = \dfrac{\mathbf{R}^e}{(R_1, \ldots, R_p)\mathbf{R}^e}$, $\widehat{\mathbf{R}^e_0} = \widehat{\mathbf{R}^e}$, et $\widehat{\mathbf{R}^e_p}$ le complété de $\mathbf{R}^e_p$ pour la topologie induite par celle de $\mathbf{R}^e$. $\mathbf{R}^e$ étant nœthérien, le complété de $(R_1, \ldots, R_p)\mathbf{R}^e$ est $(R_1, \ldots, R_p)\widehat{\mathbf{R}^e}$ ([M] corollaire 3 p.171), et $\widehat{\mathbf{R}^e_p} = \dfrac{\widehat{\mathbf{R}^e}}{(R_1, \ldots, R_p)\widehat{\mathbf{R}^e}}$ ([M] proposition p.167).

$(R_1, \ldots, R_q)$ étant une suite régulière de $\mathbf{R}^e$, pour $p \in \{0, \ldots, q-1\}$ la suite :

$$0 \longrightarrow \mathbf{R}^e_p \xrightarrow{\mu_{R_{p+1}}} \mathbf{R}^e_p$$

où $\mu_{R_{p+1}}$ désigne la multiplication par R_{p+1}, est exacte. $\mathbf{R}^e_p$ étant nœthérien, $\widehat{\mathbf{R}^e_p}$ est un $\mathbf{R}^e_p$-module plat et la suite

$$0 \longrightarrow \mathbf{R}^e_p \otimes_{\mathbf{R}^e_p} \widehat{\mathbf{R}^e_p} \xrightarrow{\mu_{R_{p+1}} \otimes id} \mathbf{R}^e_p \otimes_{\mathbf{R}^e_p} \widehat{\mathbf{R}^e_p}$$

est exacte. Cette suite fournit la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathbf{R}^e_p} \xrightarrow{\mu_{R_{p+1}}} \widehat{\mathbf{R}^e_p}$$

Comme $\widehat{\mathbf{R}^e_p} = \dfrac{\widehat{\mathbf{R}^e}}{(R_1, \ldots, R_p)\widehat{\mathbf{R}^e}}$, ceci prouve que $(R_1, \ldots, R_q)$ est une suite régulière de $\widehat{\mathbf{R}^e}$. $\square$

lemme 1.2.2.

Soient $\{r_1, \ldots, r_q\} \subset \mathbf{R}$*,* $R_i = r_i \otimes 1 - 1 \otimes r_i \in \widehat{\mathbf{R}^e}$*, et* $\widetilde{R}_i^{(k)}$ *l'image de* R_i *dans* $\mathbf{P}_k \otimes_{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{R}}$ *par la projection canonique. Si* $\{R_1, \ldots, R_q\}$ *engendre le* $\widehat{\mathbf{R}^e}$*-module* $\widehat{J}$ *alors* $\{\widetilde{R}_1^{(k)}, \ldots, \widetilde{R}_q^{(k)}\}$ *engendre le* $\mathbf{P}_k \otimes_{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{R}}$*-module* $\widehat{J}_k$*.*

Preuve. Si $\sum_{i=1}^M u_i \otimes \hat{v}_i \in \widehat{J}_k$ alors $\sum_{i=1}^M u_i.\bar{v}_i^{(k)} = 0$, par conséquent $\sum_{i=1}^M u_i \otimes \hat{v}_i = \sum_{i=1}^M u_i \otimes 1(\bar{1}^{(k)} \otimes \hat{v}_i - \bar{v}_i^{(k)} \otimes 1)$. Ceci montre que $\widehat{J}_k = \pi_k(\widehat{J})$, où π_k désigne la projection canonique de $\widehat{\mathbf{R}^e}$ dans $\mathbf{P}_k \otimes_{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{R}}$. $\widehat{J}$ étant engendré par $\{R_1, \ldots, R_q\}$, $\widehat{J}_k$ est engendré par $\{\pi_k(R_1), \ldots, \pi_k(R_q)\}$. $\square$

Lemme 1.2.3.
Avec les notations du lemme 1.2.2, si $(R_1, \ldots, R_q)$ *est une suite régulière de* $\widehat{\mathbf{R}^e}$ *qui engendre* $\widehat{J}$ *alors, pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, $(\widetilde{R}_1^{(k)}, \ldots, \widetilde{R}_q^{(k)})$ *est une suite quasi-régulière de* $\mathbf{P}_k \otimes_{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{R}}$.

Preuve. Soit $F_i = f_i \otimes 1 \in \widehat{\mathbf{R}^e}$. Comme $\dfrac{\widehat{\mathbf{R}^e}}{\widehat{J}} \simeq \hat{\mathbf{R}}$, l'image de F_i dans $\dfrac{\widehat{\mathbf{R}^e}}{\widehat{J}} \simeq \hat{\mathbf{R}}$ s'identifie, via l'isomorphisme, à f_i. Comme $f = (f_1, \ldots, f_q)$ est une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$, son image dans $\hat{\mathbf{R}}$ est une suite régulière. Ceci montre que l'image de $(F_1, \ldots, F_q)$ dans $\dfrac{\widehat{\mathbf{R}^e}}{\widehat{J}}$ est une suite régulière. Or, par hyphothèse, $(R_1, \ldots, R_q)$ est une suite régulière qui engendre $\widehat{J}$, donc $(R_1, \ldots, R_q, F_1, \ldots, F_q)$ est une suite régulière de $\widehat{\mathbf{R}^e}$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(F_1^k, \ldots, F_q^k, R_1, \ldots, R_q)$ est une suite quasi-régulière, et son image dans $\dfrac{\widehat{\mathbf{R}^e}}{F^k\widehat{\mathbf{R}^e}} \simeq \mathbf{P}_k \otimes_{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{R}}$ est une suite quasi-régulière. $\square$

Pour $l^* \in \hom_{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{R}}, \mathbf{A})$ on considère le morphisme ([B$_1$] II§4 remarque 2 p.77):

$$\begin{aligned} \Phi_0(l^*) : \mathbf{R}^e &\longrightarrow \mathbf{R} \\ u \otimes r &\longmapsto l^*(r)u \end{aligned}$$

il induit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, les morphismes:

$$\begin{aligned} \Phi_k(l^*) : \mathbf{P}_k \otimes_{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{R}} &\longrightarrow \mathbf{P}_k \\ u \otimes \hat{r} &\longmapsto l^*(\hat{r})u \end{aligned}$$

qui, par passage à la limite projective, fournissent un morphisme:

$$\Phi(l^*) : \widehat{\mathbf{R}^e} \longrightarrow \hat{\mathbf{R}}$$

qui prolonge $\Phi_0(l^*)$.

Lorsque $l^* = \mathrm{Res}_{\hat{\mathbf{R}}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} .\,hdr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \\ f_1^{i_1}, \ldots, f_q^{i_q} \end{bmatrix}$, où $h \in \hat{\mathbf{R}}$ et $\Delta \in \widehat{\mathbf{R}^e}$, on notera:

$$\Phi(l^*)(\Delta) = \mathrm{Res}_{\hat{\mathbf{R}}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta hdr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \\ f_1^{i_1}, \ldots, f_q^{i_q} \end{bmatrix}$$

En particulier, si $h \in \mathbf{R}$ et $\Delta = s \otimes t \in \mathbf{R}^e$ on a:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} (s \otimes t)hdr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \\ f_1^{i_1}, \ldots, f_q^{i_q} \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} thdr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \\ f_1^{i_1}, \ldots, f_q^{i_q} \end{bmatrix} s$$

Théorème 1.2.4. *(Formule de Weil.)*
Soient $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{R}$ *deux anneaux commutatifs unitaires nœtheriens,* $\mathbf{R}$ *étant muni d'une structure de* $\mathbf{A}$*-algèbre plate sur* $\mathbf{A}$*, et* $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *une suite quasi-régulière de* $\mathbf{R}$ *telle que le* $\mathbf{A}$*-module* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *soit projectif de type fini. On suppose qu'il existe une suite* $(r_1, \ldots, r_q)$ *de* $\mathbf{R}$ *telle que* $(R_1, \ldots, R_q)$ *soit une suite régulière de* $\widehat{\mathbf{R}^e}$ *qui engendre* $\widehat{J}$*. On considère des éléments* $a_{i,j} \in \widehat{\mathbf{R}^e}$ *tels que:*

$$1 \otimes f_i - f_i \otimes 1 = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j} R_j$$

et l'on pose $\Delta = \det(a_{i,j}) \in \widehat{\mathbf{R}^e}$.
Sous ces hypothèses, pour tout $h \in \mathbf{R}$ *on a dans* $\hat{\mathbf{R}}$ *l'égalité:*

$$h = \sum_{(i_1,\ldots,i_q)\in(N^*)^q} \operatorname{Res}_{\hat{\mathbf{R}}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta h dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \\ f_1^{i_1}, \ldots, f_q^{i_q} \end{bmatrix} f_1^{i_1-1} \ldots f_q^{i_q-1} \tag{5}$$

Preuve.
Pour établir (5) il suffit de montrer que pour tout entier $k \geq 1$:

$$h = \sum_{\substack{1\leq i_s \leq k \\ 1 \leq s \leq q}} \operatorname{Res}_{\hat{\mathbf{R}}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta h dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \\ f_1^{i_1}, \ldots, f_q^{i_q} \end{bmatrix} f_1^{i_1-1} \ldots f_q^{i_q-1} \quad (\text{modulo } \ f^k\mathbf{R}) \ . \tag{6}$$

Dans la formule (6) on peut remplacer Δ par un élément $\Delta_k \in \widehat{\mathbf{R}^e}$ tel que:

$$\Delta = \Delta_k \quad (\text{modulo } \ (f^k \otimes \mathbf{R} + \mathbf{R} \otimes f^k)\widehat{\mathbf{R}^e}) \ . \tag{7}$$

En particulier il suffit d'établir (7) avec

$$\Delta_k \in \mathbf{R}^e, \qquad \text{et} \qquad \Delta = \Delta_k \quad (\text{modulo } \ (f^k \otimes \mathbf{R} + \mathbf{R} \otimes f^k)\widehat{\mathbf{R}^e}) \ . \tag{8}$$

Comme $\Delta_k \in \mathbf{R}^e$ on a (cor. I.3.5.4) :

$$\operatorname{Res}_{\hat{\mathbf{R}}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta_k h dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \\ f_1^{i_1}, \ldots, f_q^{i_q} \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta_k h dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \\ f_1^{i_1}, \ldots, f_q^{i_q} \end{bmatrix} .$$

Pour $k \geq 1$ on note Δ_k un élément de $\mathbf{R}^e$ qui a même image que Δ par la surjection canonique de $\widehat{\mathbf{R}^e}$ dans $\mathbf{P}_k \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_k$. Pour établir la formule (5), il suffit de montrer que pour tout $k \geq 1$:

$$h = \sum_{\substack{1\leq i_s \leq k \\ 1 \leq s \leq q}} \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta_k h dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \\ f_1^{i_1}, \ldots, f_q^{i_q} \end{bmatrix} f_1^{i_1-1} \ldots f_q^{i_q-1} \quad (\text{modulo } \ f^k\mathbf{R}) \ . \tag{9}$$

Preuve de la formule (9).

Comme $\mathbf{R}$ est nœthérien, $\hat{\mathbf{R}}$ est une $\mathbf{R}$-algèbre plate, $\mathbf{R}$ étant $\mathbf{A}$-plat, $\hat{\mathbf{R}}$ est une $\mathbf{A}$-algèbre plate. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $(f_1^k, \ldots, f_q^k)$ est une suite régulière de $\hat{\mathbf{R}}$ et $\hat{\mathbf{P}}_k = \dfrac{\hat{\mathbf{R}}}{f^k\hat{\mathbf{R}}} = \dfrac{\mathbf{R}}{f^k\mathbf{R}}$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini. D'après les lemmes 1.2.2 et 1.2.3, $(\widetilde{R}_1^{(k)}, \ldots, \widetilde{R}_q^{(k)})$ est une suite quasi-régulière de $\mathbf{P}_k \otimes_{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{R}}$ qui engendre $\widehat{J}_k$, on peut donc appliquer le corollaire 4.1.3 du chapitre I, rappelé dans l'introduction, en remplaçant $\mathbf{R}$ par $\hat{\mathbf{R}}$, $\mathbf{P}$ par $\mathbf{P}_k$, f_i par f_i^k, et ζ_i par $\widetilde{R}_i^{(k)}$.

Dans $\widehat{\mathbf{R}^e}$ on a:

$$\begin{aligned}
1 \otimes f_i^k - f_i^k \otimes 1 &= (\sum_{s=0}^{k-1} f_i^s \otimes f_i^{k-1-s})(1 \otimes f_i - f_i \otimes 1) \\
&= (\sum_{s=0}^{k-1} f_i^s \otimes f_i^{k-1-s}) \sum_{1 \le j \le q} a_{i,j} R_j \\
&= \sum_{1 \le j \le q} A_{i,j} R_j
\end{aligned}$$

$\pi_k : \widehat{\mathbf{R}^e} \longrightarrow \mathbf{P}_k \otimes_{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{R}}$ étant la projection canonique, on obtient:

$$1 \otimes f_i^k = \sum_{1 \le j \le q} \pi_k(A_{i,j}) \widetilde{R}_j^{(k)}$$

Soit $\delta'_k = \sum_{i=1}^m \bar{s}_i^{(k)} \otimes \bar{t}_i^{(k)} \in \mathbf{P}_k \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_k$ l'image, par la projection canonique, de $\det(\pi_k(A_{i,j})) \in \mathbf{P}_k \otimes_{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{R}}$. D'après le corollaire 4.1.3 du chapitre I:

$$\bar{h}^{(k)} = \sum_{i=1}^m \mathrm{Res}_{\hat{\mathbf{R}}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} t_i h dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \\ f_1^k, \ldots, f_q^k \end{bmatrix} \bar{s}_i^{(k)} \ . \tag{10}$$

Par conséquent, si $\delta_k \in \mathbf{R}^e$ est un représentant de δ'_k, on obtient:

$$h = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \delta_k h dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \\ f_1^{i_1}, \ldots, f_q^{i_q} \end{bmatrix} \quad (\text{modulo} \ \ f^k\mathbf{R}) \ . \tag{11}$$

D'autre part, on a:

$$\begin{aligned}
\det(A_{i,j}) &= (\prod_{i=1}^q (\sum_{s=0}^{k-1} f_i^s \otimes f_i^{k-1-s})) \det(a_{i,j}) \\
&= (\prod_{i=1}^q (\sum_{s=0}^{k-1} f_i^s \otimes f_i^{k-1-s}))\Delta \ .
\end{aligned}$$

Comme Δ et Δ_k ont par la surjection canonique la même image dans $\mathbf{P}_k \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_k$, on peut choisir:

$$\delta_k = (\prod_{i=1}^q (\sum_{s=0}^{k-1} f_i^s \otimes f_i^{k-1-s}))\Delta_k \ .$$

En reportant dans (11) on obtient:

$$h = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} (\sum_{\substack{1\leq i_s\leq k\\ 1\leq s\leq q}} f_1^{i_1-1}\dots f_q^{i_q-1}\otimes f_1^{k-i_1}\dots f_q^{k-i_q})\Delta_k h dr_1\wedge\cdots\wedge dr_q \\ f_1^k,\dots,f_q^k \end{bmatrix} (\text{modulo } f^k\mathbf{R})$$

$$= \sum_{\substack{1\leq i_s\leq k\\ 1\leq s\leq q}} \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta_k h dr_1\wedge\cdots\wedge dr_q \\ f_1^{i_1},\dots,f_q^{i_q} \end{bmatrix} f_1^{i_1-1}\dots f_q^{i_q-1} \qquad (\text{modulo } \ f^k\mathbf{R})$$

ce qui prouve (9). $\square$

Exemple 1

Soient $\mathbf{A}$ un anneau commutatif nœthérien, $\mathbf{R} = \mathbf{A}[Z_1,\dots,Z_q]$, et $f(Z) = (f_1(Z),\dots,f_q(Z))$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ telle que $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f(Z)\mathbf{R}}$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini. $\hat{\mathbf{R}}$ est le complété $(f(Z))$-adique de $\mathbf{R}$, on identifie $\mathbf{R}^e$ et $\mathbf{A}[Z_1,\dots,Z_q,T_1,\dots,T_q]$, ainsi que $\widehat{\mathbf{R}^e}$ et le complété $(f(Z),f(T))$-adique de $\mathbf{A}[Z,T]$. On considère des éléments $a_{i,j}(Z,T)\in\mathbf{A}[Z,T]$ tels que:

$$f_i(T) - f_i(Z) = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}(Z,T)(T_j - Z_j)$$

et l'on note $\Delta(Z,T) = \det(a_{i,j}(Z,T))$. Pour tout $h(Z)\in\mathbf{A}[Z]$ on a dans $\hat{\mathbf{R}}$:

$$h(Z) = \sum_{(i_1,\dots,i_q)\in(N^*)^q} \mathrm{Res}_{\mathbf{A}[T]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta(Z,T)h(T)dT_1\wedge\cdots\wedge dT_q \\ f_1^{i_1}(T),\dots,f_q^{i_q}(T) \end{bmatrix} f_1^{i_1-1}(Z)\dots f_q^{i_q-1}(Z) \tag{12}$$

Preuve de (12).

Pour établir (12), on montre que $(Z_1 - T_1,\dots,Z_q - T_q)$ est une suite régulière de $\widehat{\mathbf{R}^e}$ qui engendre $\widehat{J}$. Comme $\mathbf{R}^e$ est nœthérien, d'après le lemme 1.2.1, il suffit de prouver que $(Z_1 - T_1,\dots,Z_q - T_q)$ est une suite régulière de $\mathbf{R}^e$ qui engendre J.

Or J est le noyau du morphisme:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}[Z,T] &\longrightarrow \mathbf{A}[Z] \\ h(Z,T) &\longmapsto h(Z,Z) \end{aligned}$$

donc J est engendré par $\{Z_1 - T_1,\dots,Z_q - T_q\}$.

Soient $\{U_1,\dots,U_q,V_1,\dots V_q\}$ des variables algébriquement libres sur $\mathbf{A}$, l'isomorphisme:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}[Z,T] &\longrightarrow \mathbf{A}[U,V] \\ Z &\longmapsto U+V \\ T &\longmapsto V \end{aligned}$$

montre que la suite $(Z_1 - T_1,\dots,Z_q - T_q)$ est une suite régulière de $\mathbf{A}[Z,T]$.

On pose $r_i = Z_i$ et $R_i = Z_i - T_i$. Les conditions de la proposition 1.2.4 étant vérifiées, la formule (5) donne (12). $\square$

Exemple 2

Soient $(\mathbf{R}, \mathfrak{m})$ un anneau local régulier nœthérien tel que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{K} = \dfrac{\mathbf{R}}{\mathfrak{m}}$ aient même caractéristique, $(x_1, \ldots, x_q)$ un système régulier de paramètres, et $(f_1, \ldots, f_q)$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$. On note $\hat{\mathbf{R}}$ le complété f-adique de $\mathbf{R}$, et $\widehat{\mathbf{R}^e}$ le complété $(f \otimes \mathbf{R} + \mathbf{R} \otimes f)$-adique de $\mathbf{R}^e$.

Sous ces hypothèses il existe des éléments $a_{i,j} \in \widehat{\mathbf{R}^e}$ tels que

$$1 \otimes f_i - f_i \otimes 1 = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}(1 \otimes x_j - x_j \otimes 1) \ ,$$

et en notant $\Delta = \det(a_{i,j})$, on a, pour tout $h \in \mathbf{R}$:

$$h = \sum_{(i_1,\ldots,i_q)\in(N^*)^q} \operatorname{Res}_{\hat{\mathbf{R}}/\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \Delta h dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_q \\ f_1^{i_1}, \ldots, f_q^{i_q} \end{bmatrix} f_1^{i_1-1} \ldots f_q^{i_q-1} \tag{13}$$

Preuve de (13).

$(f_1, \ldots, f_q)$ étant une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$, l'idéal $f\mathbf{R}$ qu'elle engendre est $\mathfrak{m}$-primaire, par conséquent il existe un entier m tel que:

$$\mathfrak{m}^m \subset f\mathbf{R} \subset \mathfrak{m}$$

Ceci montre que $\hat{\mathbf{R}}$ est le complété $\mathfrak{m}$-adique de $\mathbf{R}$, et que $\widehat{\mathbf{R}^e}$ est le complété $(\mathfrak{m} \otimes \mathbf{R} + \mathbf{R} \otimes \mathfrak{m})$-adique de $\mathbf{R}^e$. $\mathbf{R}$ et $\mathbf{K}$ étant d'égale caractéristique $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{K}[[x_1, \ldots, x_q]]$. En choisissant $\{y_1, \ldots, y_q\}$ des variables algébriquement libres sur $\hat{\mathbf{R}}$, on a: $\widehat{\mathbf{R}^e} \simeq \mathbf{K}[[x_1, \ldots, x_q, y_1, \ldots, y_q]]$. Via cet isomorphisme, $x_i \otimes 1$ s'identifie à x_i, et $1 \otimes x_i$ s'identifie à y_i.

$\hat{J}$ est le noyau du morphisme:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}[[x, y]] &\longrightarrow \mathbf{K}[[x]] \\ x_i &\longrightarrow x_i \\ y_i &\longrightarrow x_i \end{aligned}$$

$\hat{J}$ est engendré par la suite régulière $(x_1 - y_1, \ldots, x_q - y_q)$.

On pose $r_i = x_i$ et $R_i = x_i - y_i$. Les conditions de la proposition 1.2.4 étant vérifiées, la formule (5) donne (13). $\square$

Exemple 3

Soit $\mathbf{A}$ un anneau commutatif, nœthérien, séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{a}$-adique, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathbf{A}$. On note $\mathbf{R} = \mathbf{A}[[Z_1, \ldots, Z_q]]$, $f(Z) = (f_1(Z), \ldots, f_q(Z))$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$, et $\{T_1, \ldots, T_q\}$ des variables algébriquement libres sur $\mathbf{R}$. On suppose que $(f(Z)) \subset (\mathfrak{a}, Z)$, où $(\mathfrak{a}, Z)$ est l'idéal de $\mathbf{R}$ engendré par $\mathfrak{a}$ et Z, $(f(Z))$ celui engendré par $f(Z)$, et que $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{(f(Z))}$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini. On considère des éléments $a_{i,j}(Z,T) \in \mathbf{A}[[Z,T]]$ tels que:

$$f_i(T) - f_i(Z) = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}(Z,T)(T_j - Z_j)$$

et l'on note $\Delta(Z,T) = \det(a_{i,j}(Z,T))$. Pour tout $h(Z) \in \mathbf{A}[[Z]]$ on a:

$$h(Z) = \sum_{(i_1,\dots,i_q)\in(N^*)^q} \mathrm{Res}_{\mathbf{A}[[T]]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta(Z,T)h(T)dT_1 \wedge \cdots \wedge dT_q \\ f_1^{i_1}(T),\dots,f_q^{i_q}(T) \end{bmatrix} f_1^{i_1-1}(Z)\dots f_q^{i_q-1}(Z) \tag{14}$$

Preuve de (14).

Pour établir (14), on montre que $\mathbf{A}[[Z,T]]$ est le complété $(f(Z)\mathbf{A}[[T]]+f(T)\mathbf{A}[[Z]])$-adique de $\mathbf{A}[[Z]] \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}[[T]]$, et que $(Z_1 - T_1,\dots,Z_q - T_q)$ est une suite régulière qui engendre $\widehat{J}$.

$\mathbf{A}[[Z]]$ est complet pour la topologie $(\mathfrak{a}, Z)$-adique ([S] proposition 3 p.II-3), comme $((f(Z)) \subset (\mathfrak{a}, Z)$ et que $\mathbf{A}[[Z]]$ est nœthérien, il est aussi complet pour la topologie $(f(Z))$-adique ([Z-S] chap. VIII, th. 14). Par conséquent, si $\hat{\mathbf{R}}$ est le complété $(f(Z))$-adique de $\mathbf{A}[[Z]]$, $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{A}[[Z]]$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\mathbf{A}[[Z]]}{(f^k(Z))}$ est un $\mathbf{A}$-module de type fini donc:

$$\frac{\mathbf{A}[[Z,T]]}{(f^k(Z))} = \frac{\mathbf{A}[[Z]]}{(f^k(Z))} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}[[T]]$$

par conséquent, si $\mathbf{R}\widehat{\otimes}\mathbf{R}$ est le complété $(f(Z)\mathbf{A}[[T]] + f(T)\mathbf{A}[[Z]])$-adique de $\mathbf{A}[[Z]] \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}[[T]]$, on a:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\widehat{\otimes}\mathbf{R} &= \varprojlim_k \left(\frac{\mathbf{A}[[Z]]}{(f^k(Z))} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}[[T]]\right) \\ &= \varprojlim_k \left(\frac{\mathbf{A}[[Z,T]]}{(f^k(Z))}\right) \end{aligned}$$

L'argument utilisé précédemment montre que $\mathbf{A}[[Z,T]]$ est complet pour la topologie $(f(Z))$-adique donc:

$$\varprojlim_k \left(\frac{\mathbf{A}[[Z,T]]}{(f^k(Z))}\right) = \mathbf{A}[[Z,T]]$$

Ceci montre que $\mathbf{R}\widehat{\otimes}\mathbf{R} = \mathbf{A}[[Z,T]]$. On identifie $\mathbf{R}^e$ et $\mathbf{A}[[Z]] \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}[[T]]$, ainsi que $\widehat{\mathbf{R}^e}$ et $\mathbf{A}[[Z,T]]$.

$\widehat{J}$ est le noyau du morphisme:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}[[Z,T]] &\longrightarrow \mathbf{A}[[Z]] \\ h(Z,T) &\longmapsto h(Z,Z) \end{aligned}$$

il est engendré par $\{Z_1 - T_1,\dots,Z_q - T_q\}$.

Soient $\{U_1, \ldots, U_q, V_1, \ldots V_q\}$ des variables algébriquement libres sur $\mathbf{A}$, l'isomorphisme:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}[[Z,T]] &\longrightarrow \mathbf{A}[[U,V]] \\ Z &\longmapsto U+V \\ T &\longmapsto V \end{aligned}$$

montre que la suite $(Z_1 - T_1, \ldots, Z_q - T_q)$ est une suite régulière de $\widehat{\mathbf{R}^e}$.

On pose $r_i = Z_i$ et $R_i = Z_i - T_i$. Les conditions de la proposition 1.2.4 étant vérifiées, la formule (5) donne (14). $\square$

Remarques:

i) Si $\mathbf{A}$ est un corps on peut appliquer la formule (14) en prenant $\mathfrak{a} = 0$.

ii) Si $(\mathbf{A}, \mathfrak{a})$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{a}$, séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{a}$-adique, pour toute suite quasi-régulière $f(Z)$ de $\mathbf{R}$ on a $(f(Z)) \subset (\mathfrak{a}, Z)$ et l' on peut appliquer la formule (14).

Exemple 4

Lorsque les hypothèses du théorème 1.2.4 sont satisfaites et $Q \in \mathbf{R}$ est tel que $(Q, f)\mathbf{R} = \mathbf{R}$, la formule de Weil fournit, pour tout $P \in \mathbf{R}$, une écriture de $\dfrac{P}{Q}$ dans $\hat{\mathbf{R}}$.

Plus précisément, soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{R}$ deux anneaux commutatifs unitaires nœtheriens, $\mathbf{R}$ étant muni d'une structure de $\mathbf{A}$-algèbre plate sur $\mathbf{A}$, et $f = (f_1, \ldots, f_q)$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ telle que le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ soit projectif de type fini. On suppose qu'il existe une suite $(r_1, \ldots, r_q)$ de $\mathbf{R}$ telle que $(R_1, \ldots, R_q)$ soit une suite régulière de $\widehat{\mathbf{R}^e}$ qui engendre $\widehat{J}$. On considère des éléments $a_{i,j} \in \widehat{\mathbf{R}^e}$ tels que $1 \otimes f_i - f_i \otimes 1 = \sum_{j=1}^q a_{i,j} R_j$, et l'on pose $\Delta = \det(a_{i,j}) \in \widehat{\mathbf{R}^e}$. On note S la partie multiplicative $\{1, Q, Q^2, \ldots\}$, $\widehat{\mathbf{R}_S}$ le complété f-adique de $\mathbf{R}_S$, $V \in \mathbf{R}$ tel que $(1 - Q.V) \in f\mathbf{R}$, et pour $m \in \mathbb{N}$, $V_m = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-Q)^{k-1} V^k$. Alors pour tout $P \in \mathbf{R}$ on a dans $\hat{\mathbf{R}}$:

$$\frac{P}{Q} = \sum_{(i_1,\ldots,i_q)\in(N^*)^q} \operatorname{Res}_{\hat{\mathbf{R}}_S/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta \dfrac{P}{Q} dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \\ f_1^{i_1}, \ldots, f_q^{i_q} \end{bmatrix} f_1^{i_1-1} \ldots f_q^{i_q-1} \tag{15}$$

$$\frac{P}{Q} = \sum_{(i_1,\ldots,i_q)\in(N^*)^q} \operatorname{Res}_{\hat{\mathbf{R}}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta P.V_{|i|} dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \\ f_1^{i_1}, \ldots, f_q^{i_q} \end{bmatrix} f_1^{i_1-1} \ldots f_q^{i_q-1} . \tag{16}$$

Preuve (15) et (16).

Soient $\mathbf{R}_S^e = \mathbf{R}_S \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{R}_S$, $\widehat{\mathbf{R}_S^e}$ le complété $(f \otimes \mathbf{R}_S + \mathbf{R}_S \otimes f)$-adique de $\mathbf{R}_S^e$, $\hat{\rho}_S : \widehat{\mathbf{R}_S^e} \longrightarrow \widehat{\mathbf{R}_S}$ et $\hat{\rho} : \widehat{\mathbf{R}^e} \longrightarrow \widehat{\mathbf{R}}$ les morphismes déduits de $\begin{aligned} \rho : \mathbf{R}^e &\longrightarrow \mathbf{R} \\ a \otimes b &\longrightarrow ab \end{aligned}$, $\widehat{J_S}$ et $\hat{J}$ leur noyau respectif. Pour obtenir (15) il suffit de prouver que $(R_1, \ldots, R_q)$ est une suite régulière de $\widehat{\mathbf{R}_S^e}$ qui engendre $\widehat{J_S}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note $f^k = (f_1^k, \dots, f_q^k)$, $\mathbf{P}_{S,k} = \dfrac{\mathbf{R}_S}{f^k\mathbf{R}_S}$, et $\mathbf{P}_{S,0} = \mathbf{R}_S$. D'après la preuve de la proposition II.2.1.1, pour $k \geq 1$, $\mathbf{P}_{S,k} = \dfrac{\mathbf{R}}{f^k\mathbf{R}}$. Comme $\widehat{\mathbf{R}_S} = \varprojlim_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}_{S,k}$, tout élément de $\widehat{\mathbf{R}_S}$ peut s'écrire sous la forme $a_S.\hat{r}$ où $a_S \in \mathbf{R}_S$ et $\hat{r} \in \widehat{\mathbf{R}}$, et $\widehat{\mathbf{R}_S} \simeq \mathbf{R}_S \otimes_{\mathbf{R}} \widehat{\mathbf{R}}$. De même comme $\widehat{\mathbf{R}_S^e} = \varprojlim_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}_{S,k} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_{S,k}$, tout élément de $\widehat{\mathbf{R}_S^e}$ peut s'écrire sous la forme $b_S.\hat{t}$ où $b_S \in \mathbf{R}_S^e$ et $\hat{t} \in \widehat{\mathbf{R}^e}$, et $\widehat{\mathbf{R}_S^e} \simeq \mathbf{R}_S^e \otimes_{\mathbf{R}^e} \widehat{\mathbf{R}^e}$. Soient $b_S.\hat{t} \in \widehat{J_S}$ et $Q^{n_1} \otimes Q^{n_2}$ tels que $Q^{n_1} \otimes Q^{n_2}.(b_S.\hat{t}) \in \widehat{\mathbf{R}^e}$. On a

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(Q^{n_1} \otimes Q^{n_2}.b_S\hat{t}) &= \hat{\rho}_S(Q^{n_1} \otimes Q^{n_2}.b_S\hat{t}) \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Par conséquent $Q^{n_1} \otimes Q^{n_2}.(b_S\hat{t}) \in \widehat{J}$, et il existe des éléments $\lambda_i \in \widehat{\mathbf{R}^e}$ tels que

$$\begin{aligned}Q^{n_1} \otimes Q^{n_2}.(b_S\hat{t}) &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i R_i \\ b_S\hat{t} &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{Q^{n_1} \otimes Q^{n_2}} R_i\,,\end{aligned}$$

ce qui montre que $\{R_1, \dots, R_q\}$ est un système générateur du noyau $\widehat{J_S}$. Comme $\widehat{\mathbf{R}_S^e} \simeq \mathbf{R}_S^e \otimes_{\mathbf{R}^e} \widehat{\mathbf{R}^e}$, que $\mathbf{R}_S^e$ est un $\mathbf{R}^e$-module plat et $(R_1, \dots, R_q)$ est une suite régulière de $\widehat{\mathbf{R}^e}$, pour montrer que cette suite est une suite régulière de $\widehat{\mathbf{R}_S^e}$, il suffit de montrer qu'elle n'engendre pas $\widehat{\mathbf{R}_S^e}$. Or $\hat{\rho}_S(1) = 1$, donc $\widehat{J_S} \neq \widehat{\mathbf{R}_S^e}$ et $\{R_1, \dots, R_q\}\widehat{\mathbf{R}_S^e} \neq \widehat{\mathbf{R}_S^e}$.

D'après le corollaire II.2.1.2

$$\operatorname{Res}_{\hat{\mathbf{R}}_S/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta \dfrac{P}{Q} dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \\ f_1^{i_1}, \dots, f_q^{i_q} \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\hat{\mathbf{R}}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta P.V_{|i|} dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_q \\ f_1^{i_1}, \dots, f_q^{i_q} \end{bmatrix}\,,$$

par conséquent l'égalité (15) donne (16). $\square$

Exemple 5

Soient $\mathbf{A}$ un anneau commutatif nœthérien, $\mathbf{R}' = \mathbf{A}[Z_1, \dots, Z_q]$, S_Z la partie multiplicative $\{Z^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^q\}$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}'_{S_Z} = \mathbf{A}[Z, Z^{-1}]$, et $f(Z) = (f_1(Z), \dots, f_q(Z))$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ telle que $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f(Z)\mathbf{R}}$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini. On note $\hat{\mathbf{R}}$ le complété $(f(Z))$-adique de $\mathbf{R}$, on identifie $\mathbf{R}^e$ et le localisé de $\mathbf{A}[Z_1, \dots, Z_q, T_1, \dots, T_q]$ par la partie multiplicative $S_0 = \{Z^\alpha T^\beta \mid \alpha \in \mathbb{N}^q, \beta \in \mathbb{N}^q\}$, ainsi que $\widehat{\mathbf{R}^e}$ et le complété $(f(Z), f(T))$-adique de $\mathbf{A}[Z, T]_{S_0}$.

On nontrera ci-dessous que le noyau J du morphisme

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^e &\longrightarrow \mathbf{R} \\ h(Z,T) &\longmapsto h(Z,Z)\end{aligned}\,,$$

est engendré par la suite régulière:

$$(\frac{1}{Z_1}-\frac{1}{T_1},\ldots,\frac{1}{Z_q}-\frac{1}{T_q}) \ . \tag{17}$$

On considère des éléments $a_{i,j}(Z,T)\in\mathbf{A}[Z,T]_{S_0}$ tels que:

$$f_i(Z)-f_i(T)=\sum_{j=1}^{q}a_{i,j}(Z,T)(\frac{1}{Z_j}-\frac{1}{T_j}) \ ,$$

et l'on note $\Delta(Z,T)=\det(a_{i,j}(Z,T))$. Pour tout $h(Z)\in\mathbf{R}$ on a dans $\hat{\mathbf{R}}$:

$$h(Z)=\sum_{(i_1,\ldots,i_q)\in(N^*)^q}\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[T]_{S_T}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix}\Delta(Z,T)h(T)d(\frac{1}{T_1})\wedge\cdots\wedge d(\frac{1}{T_q})\\ f_1^{i_1}(T),\ldots,f_q^{i_q}(T)\end{bmatrix}f_1^{i_1-1}(Z)\ldots f_q^{i_q-1}(Z) \tag{18}$$

Preuve de (17) et (18).

Comme Z_i et T_i sont des éléments inversibles de $\mathbf{R}^e$, pour montrer que la suite $(\frac{1}{Z_1}-\frac{1}{T_1},\ldots,\frac{1}{Z_q}-\frac{1}{T_q})$ est régulière et engendre J, il suffit de prouver que la suite $(T_1-Z_1,\ldots,T_q-Z_q)$ est régulière et engendre J.

Soient $h(Z,T)\in J$ et $\alpha\in\mathbb{Z}^q$, $\beta\in\mathbb{Z}^q$, $P(Z,T)\in\mathbf{A}[Z,T]$ tels que

$$h(Z,T)=Z^\alpha T^\beta P(Z,T) \ .$$

Comme $h(Z,T)\in J$ si et seulement si $P(Z,Z)=0$, il existe des éléments $a_j(Z,T)\in\mathbf{A}[Z,T]$ tels que

$$h(Z,T)=Z^\alpha T^\beta\left(\sum_{j=1}^{q}a_j(Z,T)\,(T_j-Z_j)\right) \ ,$$

et la suite $(T_1-Z_1,\ldots,T_q-Z_q)$ est un système générateur de J. Pour montrer que cette suite est régulière, on note pour $i=0,\ldots q-1$, S_i la partie multiplicative $\{\,T_1^{\alpha_1}\ldots T_q^{\alpha_q}Z_{i+1}^{\beta_{i+1}}\ldots Z_q^{\alpha_q}\mid\alpha\in\mathbb{N}^q,\ \beta\in\mathbb{N}^{q-i}\,\}$. On a

$$\frac{\mathbf{A}[T_1,\ldots,T_q,Z_1,\ldots,Z_q]_{S_0}}{(T_1-Z_1,\ldots,T_i-Z_i)}\simeq\mathbf{A}[T_1,\ldots,T_q,Z_{i+1},\ldots,Z_q]_{S_i} \ .$$

La multiplication par $(T_{i+1}-Z_{i+1})$ dans $\mathbf{A}[T_1,\ldots,T_q,Z_{i+1},\ldots,Z_q]_{S_i}$ étant injective, la suite $(T_1-Z_1,\ldots,T_q-Z_q)$ est régulière. Par conséquent la suite $(\frac{1}{Z_1}-\frac{1}{T_1},\ldots,\frac{1}{Z_q}-\frac{1}{T_q})$ est régulière et engendre J.

Pour établir (18) il suffit de montrer que la suite $(\frac{1}{Z_1}-\frac{1}{T_1},\ldots,\frac{1}{Z_q}-\frac{1}{T_q})$ est une suite régulière de $\widehat{\mathbf{R}^e}$ qui engendre $\widehat{J}$. Comme $\mathbf{R}^e$ est le localisé d'un anneau nœthérien, $\mathbf{R}^e$ est nœthérien. D'après le lemme 1.2.1, la suite

$$(\frac{1}{Z_1}-\frac{1}{T_1},\ldots,\frac{1}{Z_q}-\frac{1}{T_q})$$

étant régulière dans $\mathbf{R}^e$ et engendrant J, elle est régulière dans $\widehat{\mathbf{R}^e}$ et engendre $\widehat{J}$.

On pose $r_i=\dfrac{1}{Z_i}$ et $R_i=\dfrac{1}{Z_i}-\dfrac{1}{T_i}$. Les conditions de la proposition 1.2.4 étant vérifiées, la formule (5) donne (18). $\square$

Remarque. En posant $b_{i,j}(Z,T) = -\dfrac{a_{i,j}(Z,T)}{Z_j T_j}$ on a

$$f_i(Z) - f_i(T) = \sum_{j=1}^{q} b_{i,j}(Z,T)(Z_j - T_j) \ .$$

Comme

$$\begin{cases} \det(b_{i,j}(Z,T)) = \dfrac{(-1)^q}{Z.T} \det(a_{i,j}(Z,T)) \\ d(\dfrac{1}{T_1}) \wedge \cdots \wedge d(\dfrac{1}{T_q}) = (-1)^q \dfrac{d(T_1)}{T_1^2} \wedge \cdots \wedge \dfrac{d(T_q)}{T_q^2} \end{cases} ,$$

en notant $\Delta'(Z,T) = Z_1 \ldots Z_q \det(b_{i,j}(Z,T))$, la formule (18) s'écrit:

$$h(Z) = \sum_{(i_1,\ldots,i_q)\in(N^*)^q} \mathrm{Res}_{\mathbf{A}[T]_{S_T}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta'(Z,T)h(T)\dfrac{d(T_1)}{T_1} \wedge \cdots \wedge \dfrac{d(T_q)}{T_q} \\ f_1^{i_1}(T), \ldots, f_q^{i_q}(T) \end{bmatrix} f_1^{i_1-1}(Z) \ldots f_q^{i_q-1}(Z) \ .$$

§2. Problèmes de finitude et de convergence

2.1. Problèmes de finitude.

Lorsque $\mathbf{A}$ est un anneau commutatif nœthérien, $\mathbf{R} = \mathbf{A}[Z_1, \ldots, Z_q]$, et $f(Z) = (f_1(Z), \ldots, f_q(Z))$ une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ telle que $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f(Z)\mathbf{R}}$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, la formule de Weil (§1, exemple 1, (12)) contient, à priori, un nombre non fini de termes. La proposition suivante établit des conditions nécessaires et suffisantes pour que, pour tout élément de $\mathbf{R}$ la formule de Weil s'écrive avec un nombre fini de termes et soit définie dans $\mathbf{R}$.

Proposition 2.1.1.
Soient $\mathbf{A}$ un anneau commutatif nœthérien, et $f(Z) = (f_1(Z), \ldots, f_q(Z))$ une suite de polynômes de $\mathbf{A}[Z_1, \ldots, Z_q]$ telle que $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{A}[Z]}{(f(Z))}$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini. On considère des éléments $a_{i,j}(Z,T) \in \mathbf{A}[Z,T]$ tels que

$$f_i(T) - f_i(Z) = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}(Z,T)(T_j - Z_j) \ ,$$

on note $\Delta(Z,T) = \det(a_{i,j}(Z,T)) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^q} T^\alpha J_\alpha(Z)$, et I la famille finie $I = \{\alpha \in \mathbb{N}^q \mid J_\alpha(T) \neq 0\}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes:

i) $\mathbf{A}[Z]$ est un $\mathbf{A}[f(Z)]$-module de type fini.

ii) Pour tout polynôme $h(Z) \in \mathbf{A}[Z]$, la formule de Weil est finie: il existe un entier M_h tel que:

$$h(Z) = \sum_{\substack{i=(i_1,\dots,i_q)\in(N^*)^q \\ |i|\le M_h}} \operatorname{Res}_{\mathbf{A}[T]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta(Z,T)h(T)\, dT_1\wedge\cdots\wedge dT_q \\ f_1^{i_1}(T),\dots,f_q^{i_q}(T) \end{bmatrix} f_1^{i_1-1}(Z)\dots f_q^{i_q-1}(Z)\ . \tag{1}$$

iii) Pour chaque élément de la famille finie $\{Z_j \ \ (j=1,\dots,q);\ J_\alpha(Z)J_\beta(Z) \ \ (\alpha,\beta\in I)\}$, la formule de Weil est finie.

Preuve de la proposition 2.1.1.

Il est clair que $ii) \Longrightarrow iii)$. Pour montrer que $iii) \Longrightarrow i)$, on considère, pour $j=1,\dots,q$, les entiers M_{Z_j} tels que

$$\begin{aligned} Z_j &= \sum_{i\in(\mathbb{N}^*)^q\ ,\ |i|\le M_{Z_j}} \operatorname{Res}_{\mathbf{A}[T]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta(Z,T)T_j\, dT_1\wedge\cdots\wedge dT_q \\ f_1^{i_1}(T),\dots,f_q^{i_q}(T) \end{bmatrix} f_1^{i_1-1}(Z)\dots f_q^{i_q-1}(Z) \\ &= \sum_{\substack{i\in(\mathbb{N}^*)^q\ ,\ |i|\le M_{Z_j} \\ \alpha\in I}} J_\alpha(Z)\operatorname{Res}_{\mathbf{A}[T]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} T^\alpha T_j\, dT_1\wedge\cdots\wedge dT_q \\ f_1^{i_1}(T),\dots,f_q^{i_q}(T) \end{bmatrix} f_1^{i_1-1}(Z)\dots f_q^{i_q-1}(Z) \\ &= \sum_{\alpha\in I} P_{j,\alpha}(f(Z))J_\alpha(Z)\ , \end{aligned} \tag{2}$$

où $P_{j,\alpha}(f(Z)) \in \mathbf{A}[f(Z)]$.

De même, pour $\beta,\gamma\in I$ on considère des polynômes $P_{\beta,\gamma,\alpha}(f(Z)) \in \mathbf{A}[f(Z)]$ tels que

$$J_\beta(Z)J_\gamma(Z) = \sum_{\alpha\in I} P_{\beta,\gamma,\alpha}(f(Z))J_\alpha(Z)\ . \tag{3}$$

Pour $i=(i_1,\dots,i_q)\in\mathbb{N}^q$ et $|i|\ge 2$, par multiplications successives des égalités (2) et application des égalités (3), on obtient des polynômes $P_{i,\alpha}(f(Z)) \in \mathbf{A}[f(Z)]$ tels que:

$$Z^i = \sum_{\alpha\in I} P_{i,\alpha}(f(Z))J_\alpha(Z)\ , \tag{4}$$

ce qui montre que $iii) \Longrightarrow i)$.

On suppose maintenant que l'assertion $i)$ de la proposition est vraie. La preuve de $i) \Longrightarrow ii)$ est une conséquence immédiate du lemme suivant:

Lemme 2.1.2. *Si $\mathbf{A}[Z]$ est un $\mathbf{A}[f(Z)]$-module de type fini, pour tout polynôme $Q(Z)\in\mathbf{A}[Z]$, il existe un entier M_Q tel que pour tout $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_q)\in\mathbb{N}^q$, vérifiant $|\alpha|>M_Q$, on ait:*

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{A}[Z]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q(Z)\, dZ_1\wedge\cdots\wedge dZ_q \\ f_1^{\alpha_1+1}(Z),\dots,f_q^{\alpha_q+1}(Z) \end{bmatrix} = 0\ .$$

En effet, pour $h(Z)\in\mathbf{A}[Z]$, en écrivant

$$h(T)\,\Delta(Z,T) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_q) \\ |\alpha|\le N}} h(T)T^\alpha J_\alpha(Z)\ ,$$

le lemme 2.1.2 assure l'existence d'un entier M_h tel que pour $|(i_1, \ldots, i_q)| > M_h$ et $|\alpha| \leq N$ on ait:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[T]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} T^\alpha h(T)\, dT_1 \wedge \cdots \wedge dT_q \\ f_1^{i_1}(T), \ldots, f_q^{i_q}(T) \end{bmatrix} = 0\ . \tag{5}$$

Par conséquent, pour $i = (i_1, \ldots, i_q) \in (\mathbb{N}^*)^q$ et $|i| > M_h$, on a

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[T]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta(Z,T)h(T)\, dT_1 \wedge \cdots \wedge dT_q \\ f_1^{i_1}(T), \ldots, f_q^{i_q}(T) \end{bmatrix} = 0\ , \tag{6}$$

qui prouve que la formule de Weil contient un nombre fini de termes. □

Preuve du lemme 2.1.2.

Soient $U_1, \ldots, U_q$ des variables algébriquement indépendantes sur $\mathbf{A}[Z]$. On peut ramener le calcul de $\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[Z]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q(Z)\, dZ_1 \wedge \cdots \wedge dZ_q \\ f_1^{\alpha_1+1}(Z), \ldots, f_q^{\alpha_q+1}(Z) \end{bmatrix}$ à un calcul de résidu dans $\mathbf{A}[U,Z]$. Plus précisément, $(U, f-U) = (U_1, \ldots, U_q, f_1 - U_1, \ldots, f_q - U_q)$ étant une suite quasi-régulière de $\mathbf{A}[U,Z]$ (lemme II.1.4.1), et $\dfrac{\mathbf{A}[U,Z]}{(U, f-U)} \simeq \mathbf{P}$ un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, $(U^{\alpha+\underline{1}}, f-U) = (U_1^{\alpha_1+1}, \ldots, U_q^{\alpha_q+1}, f_1 - U_1, \ldots, f_q - U_q)$ est une suite quasi-régulière de $\mathbf{A}[U,Z]$ et $\dfrac{\mathbf{A}[U,Z]}{(U^{\alpha+\underline{1}}, f-U)}$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini. Par conséquent on peut définir, en notant $dU = dU_1 \wedge \cdots \wedge dU_q$ et $dZ = dZ_1 \wedge \cdots \wedge dZ_q$,

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U,Z]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q(Z)\, dU \wedge dZ \\ U^{\alpha+\underline{1}}, f-U \end{bmatrix},$$

et la loi de transformation permet de montrer (lemme II.1.4.2 formule (23)):

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[Z]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q(Z)\, dZ \\ f_1^{\alpha_1+1}(Z), \ldots, f_q^{\alpha_q+1}(Z) \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U,Z]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q(Z)\, dU \wedge dZ \\ U^{\alpha+\underline{1}}, f-U \end{bmatrix}\ . \tag{7}$$

Comme $\mathbf{A}[Z]$ est une $\mathbf{A}[f(Z)]$-algèbre finie, $\mathbf{A}[Z]$ est entier sur $\mathbf{A}[f(Z)]$ ([B$_2$], chap. V, §1, prop. 1). Ceci nous permet de montrer que $\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U,Z]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Q(Z)\, dU \wedge dZ \\ U^{\alpha+\underline{1}}, f-U \end{bmatrix}$ est nul lorsque $|\alpha|$ est assez grand. En effet, $Z_1, \ldots, Z_q$ étant entiers sur $\mathbf{A}[f(Z)]$, il existe un entier s et des polynômes $B_{j,k}(Z) \in \mathbf{A}[Z]$ tels que:

$$Z_k^s + B_{1,k}(f(Z))Z_k^{s-1} + \cdots + B_{s,k}(f(Z)) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, q)\ . \tag{8}$$

En remplaçant dans $B_{j,k}(f(Z))$ les $f_i(Z)$ par $(f_i(Z) - U_i) + U_i$ et en développant, on détermine des polynômes $C_{i,k}(U,Z) \in \mathbf{A}[U,Z]$ tels que:

$$Z_k^s + B_{1,k}(U)Z_k^{s-1} + \cdots + B_{s,k}(U) = \sum_{i=1}^{q} C_{i,k}(U,Z)(f_i(Z) - U_i). \tag{9}$$

On pose

$$P_k(U,Z) = Z_k^s + B_{1,k}(U)Z_k^{s-1} + \cdots + B_{s,k}(U). \tag{10}$$

$(U^{\alpha+\underline{1}}, P(U,Z)) = (U_1^{\alpha_1+1}, \ldots, U_q^{\alpha_q+1}, P_1(U,Z), \ldots, P_q(U,Z))$ est une suite quasi-régulière de $\mathbf{A}$[U,Z], et $\dfrac{\mathbf{A}[U,Z]}{(U^{\alpha+\underline{1}}, P(U,Z))}$ un $\mathbf{A}$-module libre de type fini. En notant I_q la matrice identité d'ordre q, on a

$$\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & (C_{i,j}(U,Z)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{\alpha_1+1} \\ \vdots \\ U_q^{\alpha_q+1} \\ f_1 - U_1 \\ \vdots \\ f_q - U_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^{\alpha_1+1} \\ \vdots \\ U_q^{\alpha_q+1} \\ P_1(U,Z) \\ \vdots \\ P_q(U,Z) \end{pmatrix} ,$$

et la loi de transformation nous permet d'écrire:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U,Z]/\mathbf{A}} \left[\begin{matrix} Q(Z)\, dU \wedge dZ \\ U_1^{\alpha_1+1}, \ldots, U_q^{\alpha_q+1}, f_1 - U_1, \ldots, f_q - U_q \end{matrix} \right] \\ &\qquad = \mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U,Z]/\mathbf{A}} \left[\begin{matrix} Q(Z) \det(C_{i,j}(U,Z))\, dU \wedge dZ \\ U_1^{\alpha_1+1}, \ldots, U_q^{\alpha_q+1}, P_1(U,Z), \ldots, P_q(U,Z) \end{matrix} \right] . \end{aligned} \tag{11}$$

D'autre part, $P(U,Z) = (P_1(U,Z), \ldots, P_q(U,Z))$ est une suite quasi-régulière de $\mathbf{A}$[U,Z], et $\dfrac{\mathbf{A}[U,Z]}{(P(U,Z))}$ un $\mathbf{A}[U]$-module libre de type fini. La loi de transitivité pour les résidus (prop.I.3.5.7) nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned} &\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U,Z]/\mathbf{A}} \left[\begin{matrix} Q(Z) \det(C_{i,j}(U,Z))\, dU \wedge dZ \\ U^{\alpha+\underline{1}}, P(U,Z) \end{matrix} \right] \\ &\qquad = \mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U]/\mathbf{A}} \left[\begin{matrix} \mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U,Z]/\mathbf{A}[U]} \left[\begin{matrix} Q(Z) \det(C_{i,j}(U,Z))\, dZ \\ P_1(U,Z), \ldots, P_q(U,Z) \end{matrix} \right] dU \\ U_1^{\alpha_1+1}, \ldots, U_q^{\alpha_q+1} \end{matrix} \right] . \end{aligned} \tag{12}$$

On note M_Q le degré de $\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U,Z]/\mathbf{A}[U]} \left[\begin{matrix} Q(Z) \det(C_{i,j}(U,Z))\, dZ \\ P_1(U,Z), \ldots, P_q(U,Z) \end{matrix} \right] \in \mathbf{A}[U]$. Pour $R(U) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^q} r_\beta U^\beta \in \mathbf{A}[U]$ on a (exemple I.3.3.3):

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U,Z]/\mathbf{A}[U]} \left[\begin{matrix} R(U)\, dU_1 \wedge \cdots \wedge dU_q \\ U_1^{\alpha_1+1}, \ldots, U_q^{\alpha_q+1} \end{matrix} \right] = r_{\alpha_1, \ldots, \alpha_q} .$$

Par conséquent, pour $|\alpha| > M_Q$ on a

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U]/\mathbf{A}} \left[\begin{matrix} \mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U,Z]/\mathbf{A}[U]} \left[\begin{matrix} Q(Z) \det(C_{i,j}(U,Z))\, dZ \\ P_1(U,Z), \ldots, P_q(U,Z) \end{matrix} \right] dU \\ U_1^{\alpha_1+1}, \ldots, U_q^{\alpha_q+1} \end{matrix} \right] = 0 ,$$

ce qui prouve, en utilisant (7) (11) (12), le lemme. $\square$

2.2. Problèmes de convergence.

La proposition suivante donne une preuve algébrique d'une généralisation aisée de la formule de Weil classique (§1, formule (2)).

Proposition 2.2.1.
Soient les anneaux des séries convergentes $\mathbf{A} = \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_m\} = \mathbb{C}\{x\}$, $\mathbf{R} = \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_q\} = \mathbb{C}\{x, y\}$, *et* $f = (f_1(x, y), \ldots, f_q(x, y))$ *une suite régulière de* $\mathbb{C}\{x, y\}$ *telle que* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbb{C}\{x, y\}}{f.\mathbb{C}\{x, y\}}$ *soit un* $\mathbb{C}\{x\}$*-module projectif de type fini. On note* $a_{i,j}(x, y, z) \in \mathbb{C}\{x, y, z\}$ *des éléments tels que:*

$$\begin{cases} f_i(x, y) - f_i(x, z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} a_{i,j}(x, y, z)(y_j - z_j) & (i = 1, \ldots, q) \\ \Delta(x, y, z) = \det(a_{i,j}(x, y, z)) \ . \end{cases}$$

Alors pour tout $g(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$*:*

$$g(x, z) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_q)\in(\mathbb{N}^*)^q} \mathrm{Res}_{\mathbb{C}\{x,y\}/\mathbb{C}\{x\}} \begin{bmatrix} g(x, y)\, \Delta(x, y, z)\ \mathrm{d}\, y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, y_q \\ f_1^{\alpha_1}(x, y), \ldots, f_q^{\alpha_q}(x, y) \end{bmatrix} f^{\alpha-\underline{1}}(x, z)\ , \tag{13}$$

la convergence étant uniforme sur une base de voisinages compacts de l'origine.

Pour démontrer cette proposition, on utilisera le lemme suivant qui permet de passer des séries formelles aux séries convergentes, et nous permettra en utilisant l'exemple 3 (§1, section 1.2) d'obtenir (13).

Lemme 2.2.2.
$f = (f_1(x, y), \ldots, f_q(x, y))$ *est une suite régulière de* $\mathbb{C}[[x, y]]$, $\mathbf{P'} = \dfrac{\mathbb{C}[[x, y]]}{f.\mathbb{C}[[x, y]]}$ *est un* $\mathbb{C}[[x]]$*-module projectif de type fini, et pour tout* $g(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$*:*

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{C}\{x,y\}/\mathbb{C}\{x\}} \begin{bmatrix} g(x, y)\ \mathrm{d}\, y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, y_q \\ f_1(x, y), \ldots, f_q(x, y) \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}[[x,y]]/\mathbb{C}[[x]]} \begin{bmatrix} g(x, y)\ \mathrm{d}\, y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, y_q \\ f_1(x, y), \ldots, f_q(x, y) \end{bmatrix}\ . \tag{14}$$

Preuve du lemme 2.2.2.
$f(x, y)$ étant une suite régulière de l'anneau local $\mathbb{C}\{x, y\}$, elle est régulière dans son complété : $\mathbb{C}[[x, y]]$. Par hypothèse $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbb{C}\{x, y\}}{f.\mathbb{C}\{x, y\}}$ est un $\mathbb{C}\{x\}$-module de type fini, soit $\{e_1(x, y), \ldots, e_p(x, y)\}$ un système de générateurs. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^q$ on considère les éléments $a_{\alpha,i}(x) \in \mathbb{C}\{x\}$ et $\lambda_{\alpha,j}(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tels que:

$$y^\alpha = \sum_{i=1}^{p} a_{\alpha,i}(x) e_i(x, y) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_{\alpha,j}(x, y) f_j(x, y)\ . \tag{15}$$

Soit
$$g(x,y) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^q} c_\alpha(x) y^\alpha \in \mathbb{C}[[x,y]]\ ,$$
on a:
$$g(x,y) \equiv \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^q} c_\alpha(x) a_{\alpha,i}(x) \right) e_i(x,y) \qquad (\text{modulo } f.\mathbb{C}[[x,y]])\ .$$

Par conséquent $\mathbf{P}' = \dfrac{\mathbb{C}[[x,y]]}{f.\mathbb{C}[[x,y]]}$ est un $\mathbb{C}[[x]]$-module de type fini dont un système de générateurs est $\{e_1(x,y),\dots,e_p(x,y)\}$, et
$$\mathbf{P}' \simeq \mathbf{P} \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} \mathbb{C}[[x]]\ . \tag{16}$$

$\mathbf{P}$ étant un $\mathbb{C}\{x\}$-module projectif, cette égalité prouve que $\mathbf{P}'$ est un $\mathbb{C}[[x]]$-module projectif ([B$_1$], II, §5, p. 84 cor.).

On considère le diagramme commutatif
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\{x\} & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{C}[[x]] \\ h\downarrow & & \downarrow h' \\ \mathbb{C}\{x,y\} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{C}[[x,y]] \end{array} \tag{17}$$
où Ψ, Φ, h, h' sont les injections canoniques, et
$$\Omega_q(\Phi) :\ \wedge^q \Omega_{\mathbb{C}\{x,y\}/\mathbb{C}\{x\}} \longrightarrow \wedge^q \Omega_{\mathbb{C}[[x,y]]/\mathbb{C}[[x]]}$$
l'application canonique induite. On note:
$$\chi :\ \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{P}'$$
l'application induite par Φ. D'après (16) l'application:
$$\begin{aligned} \mathbf{P} \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} \mathbb{C}[[x]] &\longrightarrow \mathbf{P}' \\ p \otimes a' &\longrightarrow \chi(p) a' \end{aligned}$$
est bijective. Par conséquent pour $\omega \in \wedge^q \Omega_{\mathbb{C}\{x,y\}/\mathbb{C}\{x\}}$, d'après la formule de changement de base (prop. I.3.5.1),
$$\mathrm{Res}_{\mathbb{C}[[x,y]]/\mathbb{C}[[x]]} \begin{bmatrix} \Omega_q(\Phi)(\omega) \\ f_1(x,y),\dots,f_q(x,y) \end{bmatrix} = \Psi \left(\mathrm{Res}_{\mathbb{C}\{x,y\}/\mathbb{C}\{x\}} \begin{bmatrix} \omega \\ f_1(x,y),\dots,f_q(x,y) \end{bmatrix} \right). \tag{18}$$

Cette égalité permet d'écrire pour $g(x,y) \in \mathbb{C}\{x,y\}$:
$$\mathrm{Res}_{\mathbb{C}[[x,y]]/\mathbb{C}[[x]]} \begin{bmatrix} g(x,y)\ \mathrm{d}\,y_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\,y_q \\ f_1(x,y),\dots,f_q(x,y) \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}\{x,y\}/\mathbb{C}\{x\}} \begin{bmatrix} g(x,y)\ \mathrm{d}\,y_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\,y_q \\ f_1(x,y),\dots,f_q(x,y) \end{bmatrix}\ . \quad \square$$

Preuve de la proposition 2.2.1.

Soit $g(x,y) \in \mathbb{C}\{x,y\}$. D'après l'exemple 3 (§1, section 1.2), on a dans $\mathbb{C}[[x,z]]$

$$g(x,z) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_q)\in(\mathbb{N}^*)^q} \mathrm{Res}_{\mathbb{C}[[x,y]]/\mathbb{C}[[x]]} \begin{bmatrix} g(x,y)\,\Delta(x,y,z)\ \mathrm{d}\,y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,y_q \\ f_1^{\alpha_1}(x,y),\ldots,f_q^{\alpha_q}(x,y) \end{bmatrix} f^{\alpha-\underline{1}}(x,z)\ .$$

D'après le lemme précédent, cette égalité s'écrit aussi dans $\mathbb{C}[[x,z]]$:

$$g(x,z) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_q)\in(\mathbb{N}^*)^q} \mathrm{Res}_{\mathbb{C}\{x,y\}/\mathbb{C}\{x\}} \begin{bmatrix} g(x,y)\,\Delta(x,y,z)\ \mathrm{d}\,y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,y_q \\ f_1^{\alpha_1}(x,y),\ldots,f_q^{\alpha_q}(x,y) \end{bmatrix} f^{\alpha-\underline{1}}(x,z)\ ,$$

qui est la formule (13) de la proposition.

Pour montrer que cette égalité a lieu dans $\mathbb{C}\{x,y\}$, il suffit de s'assurer de la convergence de la série du membre de droite. La loi de transitivité pour les résidus va nous permettre de donner une écriture de (13) sous forme de représentation intégrale, et fournir une preuve de la convergence uniforme de (13) sur une base de voisinages compacts de $0 \in \mathbb{C}^{m+q}$.

En posant $\Delta(x,y,z) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^q} c_\gamma(x,y) z^\gamma$ la formule (13) s'écrit:

$$g(x,z) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_q)\in(\mathbb{N}^*)^q \\ \gamma\in\mathbb{N}^q}} \mathrm{Res}_{\mathbb{C}\{x,y\}/\mathbb{C}\{x\}} \begin{bmatrix} g(x,y)c_\gamma(x,y)\ \mathrm{d}\,y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,y_q \\ f_1^{\alpha_1}(x,y),\ldots,f_q^{\alpha_n}(x,y) \end{bmatrix} z^\gamma f^{\alpha-\underline{1}}(x,z)\ . \tag{19}$$

En notant

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{C}\{x,y\}/\mathbb{C}\{x\}} \begin{bmatrix} g(x,y)c_\gamma(x,y)\ \mathrm{d}\,y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,y_q \\ f_1^{\alpha_1}(x,y),\ldots,f_q^{\alpha_q}(x,y) \end{bmatrix} = \sum_{\beta\in(\mathbb{N}^*)^m} a_{\gamma,\alpha,\beta} x^{\beta-\underline{1}}\ , \tag{20}$$

la loi de transitivité (prop. I.3.5.7) donne:

$$\begin{aligned} a_{\gamma,\alpha,\beta} &= \mathrm{Res}_{\mathbb{C}\{x\}/\mathbb{C}} \begin{bmatrix} \mathrm{Res}_{\mathbb{C}\{x,y\}/\mathbb{C}\{x\}} \begin{bmatrix} g(x,y)c_\gamma(x,y)\ \mathrm{d}\,y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,y_q \\ f_1^{\alpha_1}(x,y),\ldots,f_q^{\alpha_n}(x,y) \end{bmatrix} dx_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x_m \\ x_1^{\beta_1},\ldots,x_m^{\beta_m} \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{Res}_{\mathbb{C}\{x,y\}/\mathbb{C}} \begin{bmatrix} g(x,y)c_\gamma(x,y)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x_m\, \mathrm{d}\,y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,y_q \\ x_1^{\beta_1},\ldots,x_m^{\beta_m}, f_1^{\alpha_1}(x,y),\ldots,f_q^{\alpha_q}(x,y) \end{bmatrix}\ . \end{aligned} \tag{21}$$

Cette égalité nous permet de donner une écriture de $a_{\gamma,\alpha,\beta}$ sous forme de représentation intégrale. En effet, $\dfrac{\mathbb{C}\{x,y\}}{f\,\mathbb{C}\{x,y\}}$ étant un $\mathbb{C}\{x\}$-module de type fini, $\dfrac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(x,f)\,\mathbb{C}\{x,y\}}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Par conséquent (x,f) est une suite régulière de $\mathbb{C}\{x,y\}$ qui définit l'origine comme zéro isolé. Le résidu, défini via l'homologie de Hochschild, fournit le résidu intégral local dans le cas des intersections complètes (chap.I, §4). Soit $R > 0$ tel que l'origine soit le seul zéro de $\{x, f(x,y)\}$ sur $B(0;R)$, et $\epsilon = (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{m+q}) \in (\mathbb{R}^{+*})^{m+q}$ tel que:

$$\Gamma_\epsilon = \{(\zeta,\eta) \in B(0;R)\ :\ |\zeta_i| = \epsilon_i\,,\ |f_j(\zeta,\eta)| = \epsilon_{m+j}\quad (i=1,\ldots,m\ ;\ j=1,\ldots,q)\}$$

soit une variété réelle lisse de dimension $m+q$. On a

$$a_{\gamma,\alpha,\beta} = \frac{1}{(2i\pi)^{m+q}} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{g(\zeta,\eta)c_\gamma(\zeta,\eta)\ \mathrm{d}\,\zeta \wedge \mathrm{d}\,\eta}{\zeta^\beta f^\alpha(\zeta,\eta)}\ . \tag{22}$$

A partir de (19) et (20) on obtient

$$g(x,z) = \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^q \\ \alpha\in(\mathbb{N}^*)^q \\ \beta\in(\mathbb{N}^*)^m}} \frac{1}{(2\pi)^{m+q}} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{g(\zeta,\eta)c_\gamma(\zeta,\eta)\ \mathrm{d}\,\zeta\wedge \mathrm{d}\,\eta}{\zeta^\beta f^\alpha(\zeta,\eta)} \,.\, z^\gamma x^{\beta-\underline{1}} f(x,z)^{\alpha-\underline{1}}\ . \qquad (23)$$

(x,f)définissant l'origine de $\mathbb{C}^{m+n}$ comme zéro isolé, $\{W_\epsilon \mid \epsilon\in(\mathbb{R}^+)^{m+q}\}$ où

$$W_\epsilon = \{(x,z)\in B(0;R) \mid |x_i| < \epsilon_i/2\,,\ |f_j(x,z)| < \epsilon_{m+j}/2\}\ ,$$

est une base de voisinages de l'origine. On note K_ϵ un voisinage compact de l'origine contenu dans W_ϵ. Sur K_ϵ la série (23) converge normalement, donc commutativement et uniformément, ceci nous permet d'écrire sur K_ϵ :

$$\begin{aligned} g(x,z) &= \sum_{\alpha\in(\mathbb{N}^*)^q} \left(\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^q} \left(\sum_{\beta\in(\mathbb{N}^*)^m} \frac{1}{(2i\pi)^{m+q}} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{g(\zeta,\eta)c_\gamma(\zeta,\eta)\ \mathrm{d}\,\zeta\wedge \mathrm{d}\,\eta}{\zeta^\beta f^\alpha(\zeta,\eta)} x^{\beta-\underline{1}} \right) z^\gamma \right) f(x,z)^{\alpha-\underline{1}} \\ &= \sum_{\alpha\in(\mathbb{N}^*)^q} \left(\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^q} \mathrm{Res}_{\mathbb{C}\{x,y\}/\mathbb{C}\{x\}} \begin{bmatrix} g(x,y)c_\gamma(x,y)\ \mathrm{d}\,y_1\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}\,y_q \\ f_1^{\alpha_1}(x,y),\ldots,f_q^{\alpha_n}(x,y) \end{bmatrix} z^\gamma \right) f(x,z)^{\alpha-\underline{1}} \\ &= \sum_{\alpha\in(\mathbb{N}^*)^q} \mathrm{Res}_{\mathbb{C}\{x,y\}/\mathbb{C}\{x\}} \begin{bmatrix} g(x,y)\,\Delta(x,y,z)\ \mathrm{d}\,y_1\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}\,y_q \\ f_1^{\alpha_1}(x,y),\ldots,f_q^{\alpha_n}(x,y) \end{bmatrix} f^{\alpha-\underline{1}}(x,z)\ . \end{aligned} \qquad (24)$$

La convergence normale de (23) sur K_ϵ nous assure la convergence uniforme de (24) sur K_ϵ. $\square$

CHAPITRE IV

APPLICATIONS DE LA FORMULE DE WEIL

§1. Application de la formule de Weil à des problèmes de divisions

1.1. Introduction.

Lorsque $\mathbf{A}$ est un anneau commutatif nœthérien, $\mathbf{R} = \mathbf{A}[Z_1, \ldots, Z_q]$, et $f(Z) = (f_1(Z), \ldots, f_q(Z))$ est une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ telle que $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f(Z)\mathbf{R}}$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini et $\mathbf{A}[Z]$ un $\mathbf{A}[f(Z)]$-module de type fini, la formule de Weil a un nombre fini de termes (chapitre III, prop. 2.1.1). Elle fournit par conséquent un processus explicite de division. En particulier, pour tout polynôme $h(Z) \in f(Z)\mathbf{A}[Z]$ elle donne des polynômes $g_i(Z)$ tels que

$$h(Z) = \sum_{i=1}^{q} g_i(Z) f_i(Z) \ . \tag{1}$$

Le but de ce paragraphe est de déterminer une borne sur le degré des polynômes $g_i(Z)$. Pour cela on donnera une borne sur le nombre de termes de la formule de Weil en fonction du degré du polynôme $h(Z)$. $\mathbf{A}[Z]$ étant un $\mathbf{A}[f(Z)]$-module de type fini, $\mathbf{A}[Z]$ est entier sur $\mathbf{A}[f(Z)]$. Pour obtenir une borne sur le nombre de termes de la formule de Weil, on considère pour $i = 1, \ldots, q$, des relations de dépendance intégrale de Z_i sur $\mathbf{A}[f]$. Pour $i = 1, \ldots, q$, on note

$$P_i(T) = T^{d_i} - B_{i,1}(f) T^{d_i - 1} - \cdots - B_{i,d_i}(f) \tag{2}$$

un polynôme tel que $P_i(Z_i) = 0$, et $m_{i,j}$ le degré du polynôme $B_{i,j}(Z) \in \mathbf{A}[Z]$. La majoration que l'on obtient alors dépend uniquement de

$$q \ , \ D = \max_{1 \leq i \leq q} (\deg(f_i(Z)) \ , \ k = \deg(h(Z)) \ , \ M = \max_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq d_i}} (m_{i,j}) \ .$$

Lorsque $\mathbf{A}$ est un anneau intègre, la majoration que l'on obtient permet de montrer que

$$\deg(g_i(Z)) \leq kD^q + qD^{2q} \ .$$

1.2. Majoration des degrés dans des problèmes de divisions.

Dans ce paragraphe $\mathbf{A}$ est un anneau nœthérien, et $f = (f_1(Z), \ldots, f_q(Z))$ est une suite quasi-régulière de $\mathbf{A}[Z_1, \ldots, Z_q]$ telle que $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{A}[Z]}{(f(Z))}$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini et $\mathbf{A}[Z]$ un $\mathbf{A}[f(Z)]$-module de type fini.

On considère $U_1, \ldots, U_q$ des variables algébriquement indépendantes dans $\mathbf{A}[Z]$,

$$P_i(T) = T^{d_i} - B_{i,1}(f)T^{d_i-1} - \cdots - B_{i,d_i}(f)$$

des relations de dépendance algébrique de Z_i sur $\mathbf{A}[Z]$, et $m_{i,j}$ le degré du polynôme $B_{i,j}(Z) \in \mathbf{A}[Z]$. On note alors:

$$D = \max_{1\le i\le q}(\deg(f_i(Z)) \ , \ M = \max_{\substack{1\le i\le q\\ 1\le j\le d_i}} (m_{i,j}) \ , \ K(f,k) = M\,(q(DM-1)+k) \ . \tag{3}$$

Proposition 1.2.1.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout polynôme $h(Z) \in \mathbf{A}[Z]$ de degré au plus k on a

$$h(T) = \sum_{\substack{m=(m_1,\ldots,m_q)\in\mathbb{N}^q\\ |m|\le K(f,k)}} \mathrm{Res}_{\mathbf{A}[Z]/\mathbf{A}} \left[\begin{array}{c} \Delta(T,Z)h(Z)\, dZ_1 \wedge \cdots \wedge dZ_q \\ f_1^{m_1+1}(Z), \ldots, f_q^{m_q+1}(Z) \end{array} \right] f_1^{m_1}(T) \ldots f_q^{m_q}(T) \tag{4}$$

où

$$K(f,k) = M\,(q(DM-1)+k) \ .$$

Preuve.
Pour $i = 1, \ldots, q$, soit

$$P_i(T) = T^{d_i} - B_{i,1}(f)T^{d_i-1} - \cdots - B_{i,d_i}(f)$$

les relations de dépendance algébrique de Z_i sur $\mathbf{A}[Z]$ que l'on considère. On pose

$$B_{i,j}(f) = \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^q\\ |\beta|\le m_{i,j}}} b_{i,j}^{\beta} f^{\beta}.$$

On obtient, en remplaçantf_i par $(f_i - U_i) + U_i$ et en développant,

$$B_{i,j}(f) = \sum_{\substack{\beta,l\in\mathbb{N}^q\\ |\beta|\le m_{i,j}\ ,\ l\preccurlyeq\beta}} b_{i,j}^{\beta} k_l^{\beta} (f-U)^l U^{\beta-l}$$

où k_l^β est un cœfficient binomial et $(l_1,\ldots,l_q) \preccurlyeq (\beta_1,\ldots,\beta_q)$ signifie que $l_k \le \beta_k$ pour $k=1,\ldots,q$. Soit

$$R_i(U,Z) = Z_i^{d_i} - B_{i,1}(U)Z_i^{d_i-1} - \cdots - B_{i,d_i}(U) \ ,$$

et $\epsilon_k = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ le q-uplet à composantes toutes nulles sauf la k$^{\text{ième}}$ qui vaut 1. Comme $R_i(f,Z) = P_i(Z_i) = 0$, on a

$$\begin{aligned}
R_i(U,Z) &= -\sum_{j=1}^{d_i} \sum_{\substack{\beta,l\in\mathbb{N}^q \\ 1\le|\beta|\le m_{i,j} \\ l\preccurlyeq\beta\,,\,|l|\ne 0}} b_{i,j}^\beta k_l^\beta (f-U)^l U^{\beta-l} Z_i^{d_i-j} \\
&= -\sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{d_i} \sum_{\substack{|\beta|\le m_{i,j}\,,\, l\preccurlyeq\beta \\ l_1=\cdots=l_{k-1}=0\,,\, l_k\ne 0}} b_{i,j}^\beta k_l^\beta (f-U)^{l-\epsilon_k} U^{\beta-l} Z_i^{d_i-j} \right) (f_k - U_k) \\
&= \sum_{k=1}^{q} c_{i,k}(U,Z)(f_k-U_k) \ .
\end{aligned}$$

Un terme du développement de $\det(c_{i,k}(U,Z))$ s'écrit

$$a f^\gamma U^{(\beta^1+\cdots+\beta^q-\gamma-\underline{1})} Z_{i_1}^{d_{i_1}-j_1} \ldots Z_{i_q}^{d_{i_q}-j_q} \ , \tag{5}$$

$$\text{avec} \begin{cases} a\in\mathbf{A}, \qquad \gamma,\beta^r\in\mathbb{N}^q \\ 1\le j_k\le d_k\,,\ k=1,\ldots,q \\ 1\le|\beta^r|\le m_{i_r,j_r}\le M \\ \gamma\preccurlyeq(\beta^1+\cdots+\beta^q-\underline{1}) \\ \{i_1,\ldots,i_q\}=\{1,\ldots,q\} \end{cases} .$$

Comme $D=\max_{1\le i\le q}\deg(f_i(Z))$, il existe des éléments $a_{i,\alpha}, a'_{i,\alpha}, a''_\alpha$ de $\mathbf{A}$ tels que

$$\begin{aligned}
f_i(Z) &= \sum_{|\alpha|\le D} a_{i,\alpha} Z^\alpha \\
f_i^{\gamma_i}(Z) &= \sum_{|\alpha|\le\gamma_i D} a'_{i,\alpha} Z^\alpha \\
Z^s f^\gamma(Z) Z_{i_1}^{d_{i_1}-j_1} \ldots Z_{i_q}^{d_{i_q}-j_q} &= \sum_{|\alpha|\le|\gamma|D} a''_\alpha Z_1^{\alpha_1+d_1-j_{\sigma(1)}+s_1} \ldots Z_q^{\alpha_q+d_q-j_{\sigma(q)}+s_q} \ ,
\end{aligned} \tag{6}$$

où $Z^s = Z_1^{s_1}\ldots Z_q^{s_q}$ et σ est la permutation de $\{1,\ldots,q\}$ telle que $j_{\sigma(r)}=r$.

Soit $k\in\mathbb{N}$. Comme

$$Z_i^{d_i} \equiv B_{i,1}(U)Z_i^{d_i-1} + \cdots + B_{i,d_i}(U) \qquad (\text{modulo } R_i(U,Z)) \ ,$$

il existe des polynômes $Q_{i,j}(Z_1,\ldots,Z_d)$ de degré au plus $k+1$ tels que:

$$Z_i^{d_i+k} \equiv Q_{i,1}\left(B_{i,1}(U),\ldots,B_{i,d_i}(U)\right) Z_i^{d_i-1} + \cdots + Q_{i,d_i}\left(B_{i,1}(U),\ldots,B_{i,d_i}(U)\right) \quad (\text{modulo } R_i(U,Z)) \ . \tag{7}$$

De plus, comme $\deg_U(B_{i,j}(U)) \leq M$

$$\deg_U\left(Q_{i,1}\left(B_{i,1}(U),\ldots,B_{i,d_i}(U)\right)\right) \leq (k+1)M\ . \tag{8}$$

Appliqué à $Z^s f^\gamma(Z) Z_{i_1}^{d_{i_1}-j_1}\ldots Z_{i_q}^{d_{i_q}-j_q}$, (6) et (7) montrent qu'il existe des polynômes $g_{k_1,\ldots,k_q}(U) \in \mathbf{A}[U]$ tels que

$$Z^s f^\gamma(Z) Z_{i_1}^{d_{i_1}-j_1}\ldots Z_{i_q}^{d_{i_q}-j_q} \equiv \sum_{\substack{0\leq k_i\leq d_i-1\\ i=1,\ldots,q}} g_{k_1,\ldots,k_q}(U) Z_1^{k_1}\ldots Z_q^{k_q} \qquad (\text{modulo } R_i(U,Z))\ .$$

(8) montre que $g_{d_1-1,\ldots,d_q-1}(U)$ est un polynôme en U de degré au plus

$$\begin{aligned}(\alpha_1 - j_{\sigma(1)} + s_1 + 1)M + \cdots + (\alpha_q - j_{\sigma(q)} + s_q + 1)M&\\ = \left(|\alpha| + |s| - \sum_{i=1}^q j_{\sigma(i)} + q\right) M&\\ \leq (|\gamma|.D + |s|)M&\ .\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après l'exemple I.3.3.3 du chapitre I,

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U,Z]/\mathbf{A}[U]}\begin{bmatrix} Z^s f(Z)^\gamma Z_{i_1}^{d_{i_1}-j_1}\ldots Z_{i_q}^{d_{i_q}-j_q}\,\mathrm{d}\,Z\\ R_1(U,Z),\ldots,R_q(U,Z)\end{bmatrix} = g_{d_1-1,\ldots,d_q-1}(U)$$

est un polynôme en U de degré au plus $(|\gamma|.D+|s|)M$. On obtient donc pour (5), que

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U,Z]/\mathbf{A}[U]}\begin{bmatrix} Z^s f(Z)^\gamma Z_{i_1}^{d_{i_1}-j_1}\ldots Z_{i_q}^{d_{i_q}-j_q} U^{(\beta^1+\cdots+\beta^q-\gamma-\underline{1})}\,\mathrm{d}\,Z\\ R_1(U,Z),\ldots,R_q(U,Z)\end{bmatrix}$$

est un polynôme en U de degré au plus

$$\begin{aligned}(|\gamma|.D + |s|)M + qM - |\gamma| - q&\\ &= |\gamma|\,(DM-1) + q\,(M-1) + |s|M\\ &\leq q\,(M-1)\,(DM-1) + q\,(M-1) + |s|M\\ &\leq q\,(M-1)\,DM + |s|M\\ &\leq M\,(qD\,(M-1) + |s|)\ .\end{aligned}$$

Ceci montre que si $h(Z)$ est un polynôme de degré au plus k,

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U,Z]/\mathbf{A}[U]}\begin{bmatrix} h(Z)\det(c_{i,j}(U,Z))\,\mathrm{d}\,Z\\ R_1(U,Z),\ldots,R_q(U,Z)\end{bmatrix} \tag{9}$$

est un polynôme en U de degré au plus:

$$M\,(qD\,(M-1)+k)\ . \tag{10}$$

En appliquant le lemme II. 1.4.2 et la loi de transformation on a:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U]/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h(Z)\Delta(T,Z)\,\mathrm{d}\,Z\\ f_1^{m_1+1}(Z),\ldots,f_q^{m_q+1}(Z)\end{bmatrix}\\ &\quad= \mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U,Z]/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h(Z)\Delta(T,Z)\,\mathrm{d}\,U\wedge\mathrm{d}\,Z\\ U_1^{m_1+1},\ldots,U_q^{m_q+1}, f_1(Z)-U_1,\ldots,f_q(Z)-Uq\end{bmatrix}\\ &\quad= \mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U,Z]/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h(Z)\Delta(T,Z)\det(c_{i,k}(U,Z))\,\mathrm{d}\,U\wedge\mathrm{d}\,Z\\ U_1^{m_1+1},\ldots,U_q^{m_q+1}, R_1(U,Z),\ldots,R_q(U,Z)\end{bmatrix}\ .\end{aligned} \tag{11}$$

D'autre part, d'après la loi de transitivité (I.3.5.7):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U,Z]/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h(Z)\Delta(T,Z)\det(c_{i,k}(U,Z))\,\mathrm{d}\,U\wedge\mathrm{d}\,Z \\ U_1^{m_1+1},\dots,U_q^{m_q+1},R_1(U,Z),\dots,R_q(U,Z)\end{bmatrix} \\
&= \mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U]/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} \mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U,Z]/\mathbf{A}[U]}\begin{bmatrix} h(Z)\Delta(T,Z)\det(c_{i,j}(U,Z))\,\mathrm{d}\,Z \\ R_1(U,Z),\dots,R_q(U,Z)\end{bmatrix}\mathrm{d}\,U \\ U_1^{m_1+1},\dots,U_q^{m_q+1}, \end{bmatrix} . \qquad (12)
\end{aligned}$$

Comme $\Delta(T,Z)=\det(a_{i,j}(T,Z))$ où $a_{i,j}(T,Z)\in\mathbf{A}[T,Z]$ vérifient

$$f_i(Z)-f_i(T)=\sum_{j=1}^{q}a_{i,j}(T,Z)(Z_j-T_j)\ ,$$

on peut choisir

$$a_{i,j}(T,Z)=\frac{f_i(Z_1,\dots,Z_j,T_{j+1},\dots,T_q)-f_i(Z_1,\dots,Z_{j-1},T_j,\dots,T_q)}{Z_j-T_j} \qquad (13)$$

(avec la convention Z_0 et T_{q+1} ne doivent pas être pris en compte). Par conséquent $\deg_Z(a_{i,j}(T,Z))\leq\deg_Z(f_i(Z))-1$ et

$$\begin{aligned}\deg_Z(\Delta(T,Z)) &\leq \deg_Z(f_1(Z)\dots f_q(Z))-q \\ &\leq qD-q\end{aligned} . \qquad (14)$$

$h(Z)\Delta(T,Z)$ est donc un polynôme en Z de degré au plus $k+qD-q$, et la majoration faite en (9) montre que

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U,Z]/\mathbf{A}[U]}\begin{bmatrix} h(Z)\Delta(T,Z)\det(c_{i,j}(U,Z))\,\mathrm{d}\,Z \\ R_1(U,Z),\dots,R_q(U,Z)\end{bmatrix}$$

est un polynôme en U de degré au plus $M\,(qD\,(M-1)+k+qD-q)$.

D'après l'exemple I.3.3.3 du chapitre I, on en déduit que (12) est nul pour

$$\begin{aligned}|m| &> M\,(qD\,(M-1)+k+qD-q) \\ &> M\,(q(DM-1)+k)\,,\end{aligned}$$

et par (11),

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[U]/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} h(Z)\Delta(T,Z)\,\mathrm{d}\,Z \\ f_1^{m_1+1}(Z),\dots,f_q^{m_q+1}(Z)\end{bmatrix}=0$$

pour $|m|>M\,(q(DM-1)+k)$. $\square$

Corollaire 1.2.2.

Soit $h(Z)\in f(Z)\mathbf{A}[Z]$ un polynôme de degré au plus k. Il existe des polynômes $g_j(Z)$ de degré au plus $D\,(K(f,k)+q-1)-q$ tels que

$$h(Z)=\sum_{j=1}^{q}g_j(Z)f_j(Z)\ .$$

Preuve.

On pose $\Delta(Z,T) = \sum_{\substack{\alpha_j\in\mathbb{N}^q\\ 1\le j\le n}} Z^{\alpha_j} J_{\alpha_j}(T)$. Par construction (cf. (14)), $|\alpha_j| \le qD - q$. Comme $h(Z) \in f(Z)\mathbf{A}[Z]$, $\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[T]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} h(T)\Delta(Z,T)\,\mathrm{d}T \\ f_1(T),\ldots,f_q(T)\end{bmatrix} = 0$. Par conséquent, d'après la proposition 1.2.1,

$$
\begin{aligned}
h(Z) &= \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}^q\\ 1\le|m|\le K(f,k)}} \mathrm{Res}_{\mathbf{A}[T]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta(Z,T)h(T)\,dT \\ f^{m+\underline{1}}(T)\end{bmatrix} f^m(Z) \\
&= \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{\substack{1\le j\le n\,,\ m\in\mathbb{N}^q\\ 0\le|m-\epsilon_i|\le K(f,k)-1}} Z^{\alpha_j}\,\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[T]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} J_{\alpha_j}(T)h(T)\,dT \\ f^{m+\underline{1}}(T)\end{bmatrix} f^{m-\epsilon_i}(Z) \right) f_i(Z).
\end{aligned}
$$

En posant

$$g_i(Z) = \sum_{\substack{1\le j\le n\ ,\ m\in\mathbb{N}^q\\ 0\le|m-\epsilon_i|\le K(f,k)-1}} Z^{\alpha_j}\,\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[T]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} J_{\alpha_j}(T)h(T)\,dT \\ f^{m+\underline{1}}(T)\end{bmatrix} f^{m-\epsilon_i}(Z)\ ,$$

on a:

$$
\begin{aligned}
\deg_Z\left(g_i(Z)\right) &\le q(D-1) + D\left(K(f,k)-1\right) \\
&\le D\left(K(f,k)+q-1\right) - q\ . \quad \square
\end{aligned}
$$

Corollaire 1.2.3.

Soient $\mathbf{A}$ *est un anneau intègre nœthérien, et* $f = (f_1(Z),\ldots,f_q(Z))$ *une suite quasi-régulière de* $\mathbf{A}[Z_1,\ldots,Z_q]$ *telle que* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{A}[Z]}{(f(Z))}$ *soit un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini et* $\mathbf{A}[Z]$ *un* $\mathbf{A}[f(Z)]$*-module de type fini.*

Pour tout polynôme $h(Z) \in f(Z)\mathbf{A}[Z]$ *de degré au plus* k*, il existe des polynômes* $g_j(Z) \in \mathbf{A}[Z]$ *de degré au plus* $kD^q + qD^{2q}$ *tels que*

$$h(Z) = \sum_{j=1}^{q} g_j(Z) f_j(Z)\ .$$

La démonstration procédera comme suit. Soit $\mathbb{K}$ le corps des fractions de $\mathbf{A}$. On montrera que pour tout $h(Z) \in f(Z)\mathbf{A}[Z]$ on peut appliquer la formule de Weil relativement à $(f_1(Z),\ldots,f_q(Z))$ dans $\mathbb{K}[Z]$. Le développement que l'on obtient par ce procédé est en fait à cœfficients dans $\mathbf{A}[Z]$ et fournit les polynômes $g_j(Z)$ du corollaire. On applique alors le corollaire 1.2.2 en remplaçant $\mathbf{A}$ par $\mathbb{K}$ et en prenant pour polynômes $P_i(Z)$ qui fixent la valeur de $K(f,k)$, les polynômes minimaux de la multiplication par Z_i dans le $\mathbb{K}(f)$-espace vectoriel $\mathbb{K}(Z)$. On montrera qu'ils sont à cœfficients dans $\mathbb{K}[f]$ et fournissent donc une relation de dépendance intégrale de Z_i sur $\mathbb{K}[f]$. Le théorème de Perron que l'on rappelle ci-dessous permet de majorer le degré de leurs cœfficients, et le corollaire 1.2.2 permet de conclure.

Le théorème de Perron joue un rôle clé dans l'article de A. Ploski *Growth of proper polynomial mappings* ([P]), et nous lui en savons gré de nous l'avoir révélé. Une preuve moderne de ce théorème est donnée dans [J] (§7, prop.7.2.1, p.231).

Théorème. *(O. PERRON, [Pe], théorème 57).*

Soient $\mathbb{K}$ *un corps commutatif,* $P_1, \dots P_{q+1} \in \mathbb{K}[Z_1, \dots, Z_q]$ *des polynômes non constants de degrés* $d_1, \dots, d_{q+1}$*.*

Alors il existe un polynôme non nul $R \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_{q+1}]$ *de la forme*

$$R = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{q+1})\in\mathbb{N}^{q+1} \\ \alpha_1 d_1+\cdots+\alpha_{q+1}d_{q+1}\leq d_1 d_2 \dots d_{q+1}}} c_\alpha T^\alpha \qquad (c_\alpha \in \mathbb{K})$$

tel que

$$R(P_1, P_2, \dots, P_{q+1}) = 0 \qquad \textit{dans} \qquad \mathbb{K}[Z_1, \dots Z_q]\ .$$

Preuve du corollaire 1.2.3.

Soit $\mathbb{K}$ le corps des fractions de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{P'} = \dfrac{\mathbb{K}[Z]}{(f(Z))}$. Comme $\mathbf{P'} = \mathbb{K} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}$, $\mathbf{P'}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. $f(Z)$ étant une suite quasi-régulière de $\mathbf{A}[Z]$, c'est une suite quasi-régulière de $\mathbb{K}[Z]$. En effet si $G(X) \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_q]$ est un polynôme homogène tel que $G(f(Z)) = 0$, alors, quitte à multiplier $G(X)$ par un élément non nul de $\mathbb{K}$, on peut supposer que $G(X) \in \mathbf{A}[X]$ et par conséquent ses cœfficients sont dans l'idéal engendré par $f(Z)$ (appendice, §1, déf. 1.4). Ceci nous permet de définir pour tout $m \in \mathbb{N}^q$, $\mathrm{Res}_{\mathbb{K}[T]/\mathbb{K}} \begin{bmatrix} \Delta(Z,T)h(T)\,dT \\ f^{m+\underline{1}}(T) \end{bmatrix}$.

Par hypothèse $\mathbf{A}[Z]$ est un $\mathbf{A}[f]$-module de type fini, donc $\mathbb{K}[Z] = \mathbb{K} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}[Z]$ est un $\mathbb{K}[f]$-module de type fini. Ceci prouve que la formule de Weil relative à $(f_1(Z), \dots, f_q(Z))$ dans $\mathbb{K}[Z]$ a un nombre fini de termes. Il existe un entier N tel que

$$h(Z) = \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}^q \\ 1\leq|m|\leq N}} \mathrm{Res}_{\mathbb{K}[T]/\mathbb{K}} \begin{bmatrix} \Delta(Z,T)h(T)\,dT \\ f^{m+\underline{1}}(T) \end{bmatrix} f^m(Z)\ . \tag{15}$$

Comme $\Delta(Z,T)$ et $h(T)$ sont des polynômes à cœfficients dans $\mathbf{A}$, la formule de changement de base (cor. I.3.5.3) montre que $\mathrm{Res}_{\mathbb{K}[T]/\mathbb{K}} \begin{bmatrix} \Delta(Z,T)h(T)\,dT \\ f^{m+\underline{1}}(T) \end{bmatrix} \in \mathbf{A}[Z]$. On a donc

$$h(Z) = \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}^q \\ 1\leq|m|\leq N}} \mathrm{Res}_{\mathbf{A}[T]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta(Z,T)h(T)\,dT \\ f^{m+\underline{1}}(T) \end{bmatrix} f^m(Z)\ ,$$

et (15) fournit des polynômes $g_j(Z) \in \mathbf{A}[Z]$ tels que $h(Z) = \sum_{j=1}^q g_j(Z) f_j(Z)$.

Le système $\{f_1(Z), \dots, f_q(Z)\}$ formant une suite quasi-régulière de $\mathbb{K}[Z]$, ce système est algébriquement indépendant sur $\mathbb{K}$. Par conséquent $\mathbb{K}[f]$ est un anneau factoriel et on peut aussi considérer son corps de fractions $\mathbb{K}(f)$. Par hypothèse $\mathbb{K}[Z]$ est un $\mathbb{K}[f]$-module de type fini, donc $\mathbb{K}(Z)$ est un $\mathbb{K}(f)$-espace vectoriel de dimension finie.

Pour $i = 1, \dots, q$, soit

$$m_{Z_i}(T) = T^{d_i} - B_{i,1}(f)T^{d_i-1} - \cdots - B_{i,d_i}(f)\ , \tag{16}$$

le polynôme minimal de la multiplication par $Z_i$dans le $\mathbb{K}(f)$-espace vectoriel $\mathbb{K}(Z)$. Comme $\mathbb{K}[f]$ est factoriel, il est intégralement clos. Z_i étant entier sur $\mathbb{K}[f]$, les cœfficients du polynôme $m_{Z_i}(T)$ sont dans $\mathbb{K}[f]$ ([M$_2$], chap. 3, §9, th. 9.2). $m_{Z_i}(T)$ étant un polynôme irréductible de $\mathbb{K}(f)[T]$ et à cœfficients dans $\mathbb{K}[f]$, il est irréductible dans $\mathbb{K}[f][T]$.

On note $\{W_1,\dots,W_q\}$ des variables algébriquement indépendantes sur $\mathbb{K}[T]$ et

$$\tilde{m}_{Z_i}(W,T) = T^{d_i} - B_{i,1}(W)T^{d_i-1} - \cdots - B_{i,d_i}(W) \ .$$

$\tilde{m}_{Z_i}(W,T)$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[W,T]$.

On considère

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{K}[W,T] &\longrightarrow \mathbb{K}[Z] \\ P(W,T) &\longrightarrow P(f(Z),Z_i) \end{aligned} \ .$$

$\mathbb{K}[Z]$ étant intègre, $\ker\rho$ est un idéal premier et ρ induit une application injective

$$\bar{\rho} : \frac{\mathbb{K}[W,T]}{\ker\rho} \longrightarrow \mathbb{K}[Z] \ .$$

Comme $\mathbb{K}[Z]$ est entier sur $\mathbb{K}[f]$, $\mathbb{K}[Z]$ est entier sur $\bar{\rho}\left(\frac{\mathbb{K}[W,T]}{\ker\rho}\right)$. Ceci montre que $\dim\left(\frac{\mathbb{K}[W,T]}{\ker\rho}\right) = \dim(\mathbb{K}[Z]) = q$, et $\mathrm{haut}(\ker\rho) = 1$. Comme $\ker\rho$ est un idéal premier de hauteur 1 de l'anneau factoriel $\mathbb{K}[W,T]$, il est principal et est engendré par un élément irréductible. Or $\tilde{m}_{Z_i}(W,T) \in \ker\rho$ et il est irréductible, c'est donc un générateur de $\ker\rho$.

Soit $R_i(W_1,\dots W_q,T) \in \mathbb{K}[W,T]$ le polynôme de Perron relatif à $(f_1(Z),\dots,f_q(Z),Z_i)$. On note v la valuation définie sur $\mathbb{K}[W,T]$ par

$$v(W_i) = \deg_Z(f_i(Z)) \ \ , \ \ v(T) = 1 \ .$$

Comme $R_i(W,T) \in \ker\rho$, il est divisible par $\tilde{m}_{Z_i}(W,T)$. Le théorème de Perron et les propriétés des valuations montrent pour $j = 1,\dots,d_i$:

$$(d_i - j) + \min_{s=1}^{q}(\deg_Z(f_s(Z)))\deg_W(b_{i,j}(W)) \leq v\left(b_{i,j}(W)T^{d_j-j}\right) \leq \prod_{s=1}^{q}\deg_Z(f_s(Z)) \ .$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \min_{s=1}^{q}(\deg_Z(f_s(Z)))\deg_W(b_{i,j}(W)) &\leq \prod_{s=1}^{q}\deg_Z(f_s(Z)) \\ \deg_W(b_{i,j}(W) &\leq D^{q-1} \end{aligned}$$

où $D = \max_{1\leq j\leq q}(\deg_Z(f_s(Z)))$.

En choisissant pour polynômes $P_i(T)$ comme relation de dépendance intégrale de Z_i sur $\mathbb{K}[f]$, les polynômes $m_{Z_i}(T)$, on a

$$\begin{aligned} M &\leq D^{q-1} \\ K(f,k) &\leq D^{q-1}\left(q(D^q-1)+k\right) \\ &\leq qD^{2q-1} - qD^{q-1} + kD^{q-1} \ . \end{aligned}$$

D'après le corollaire 1.2.2, les polynômes $g_j(Z)$ fournis par (15) et qui donnent la relation

$$h(Z) = \sum_{j=1}^{q} g_j(Z) f_j(Z) \ ,$$

vérifient

$$\begin{aligned}
\deg_Z\left(g_j(Z)\right) &\leq D\left(qD^{2q-1} - qD^{q-1} + kD^{q-1} + q - 1\right) - q \\
&\leq kD^q + qD^{2q} + qD(1 - D^{q-1}) - D - q \qquad \square \\
&\leq kD^q + qD^{2q} \ .
\end{aligned}$$

Remarques.

On peut noter que l'estimation des degrés n'est pas doublement exponentielle, et qu'elle est valable sur tout anneau intègre nœthérien. Elle a été obtenue uniquement à l'aide de la formule de Weil et du théorème de Perron. Lorsque $\mathbf{A} = \mathbb{C}$, cette estimation n'est pas optimale (cf. par exemple [C-P] où la majoration obtenue est kD^q). Toujours lorsque $\mathbf{A} = \mathbb{C}$, l'utilisation de la formule de Weil et des théorèmes d'annulation pour les sommes complètes de résidus des applications polynomiales propres donnent des estimations plus performantes ([B-Y_1]).

§2. Une extension de la formule d'Euler-Jacobi

2.1. Introduction.

Dans ce paragraphe $\mathbf{A}$ est un anneau nœthérien (non nécessairement local) et $\mathbf{R} = \mathbf{A}[Z_1, \ldots, Z_q]$. On établit une version dans $\mathbf{R}$ du théorème d'Euler-Jacobi. Plus précisément on prouvera le théorème suivant:

Théorème (Euler-Jacobi).
Soient $f(Z) = \{f_1(Z), \ldots, f_q(Z)\}$ *une suite quasi-régulière de polynômes de* $\mathbf{R}$ *de degré* $d_1, \ldots, d_q$ *telle que* $\dfrac{\mathbf{R}}{(f(Z))}$ *soit un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini, et* $k = (k_1, \ldots, k_q) \in (\mathbb{N}^*)^q$*. On note* $h_i(Z)$ *la partie homogène de degré* d_i *de* $f_i(Z)$*. On suppose que* $h(Z) = \{h_1(Z), \ldots, h_q(Z)\}$ *est une suite quasi-régulière de* $\mathbf{R}$*, et que* $\dfrac{\mathbf{R}}{(h(Z))}$ *un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini. Alors:*

i) pour tout polynôme $q(Z)$ *de degré au plus* $\sum_{i=1}^q k_i d_i - q - 1$ *on a*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} q(Z)dZ \\ f_1^{k_1}(Z), \ldots, f_q^{k_q}(Z) \end{bmatrix} = 0 \ ,$$

ii) pour tout polynôme $q(Z)$ *de degré* $\sum_{i=1}^q k_i d_i - q$ *on a*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} q(Z)dZ \\ f_1^{k_1}(Z), \ldots, f_q^{k_q}(Z) \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathcal{Q}(Z)dZ \\ h_1^{k_1}(Z), \ldots, h_q^{k_q}(Z) \end{bmatrix} \ ,$$

où $\mathcal{Q}(Z)$ *est la partie homogène de degré* $\sum_{i=1}^q k_i d_i - q$ *de* $q(Z)$*.*

Lorsque $\mathbf{A}= \mathbb{C}$ (rep. $\mathbf{A}= \mathbb{K}$ est un corps), une version du théorème d'Euler-Jacobi est dans ([G-H] (chap.V, §2) (resp. [E-M] chap.4, §4.12). Les techniques utilisées dans ce paragraphe sont proches de celles présentes dans [E-M], mais on profite ici pleinement de l'établissement de la formule de Weil dans $\mathbf{A}[Z_1, \ldots, Z_q]$ où $\mathbf{A}$ est un anneau nœthérien quelconque. L'article "Traces in strict Frobenius algebras and strict complete intersections"de M. Kreuzer et E. Kunz donne une preuve différente de ce théorème (§4, cor. 4.6).

2.2. La formule d'Euler-Jacobi.

On commence par établir l'équivalent dans $\mathbf{R}$ d'un théorème classique de Macaulay ([T] ch.IV §20):

Théorème 2.2.1.
Soient $f(Z) = \{f_1(Z), \ldots, f_q(Z)\}$ une suite quasi-régulière de polynômes homogénes de $\mathbf{R}$ de degré $d_1, \ldots, d_q$ telle que $\dfrac{\mathbf{R}}{(f(Z))}$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini. Alors tout monôme de degré au moins $\delta + 1 = \sum_{j=1}^{q} d_j - q + 1$ est dans l'idéal $(f(Z))$.

Preuve.
Soient $a_{i,j}(Z,T) \in \mathbf{A}[Z,T]$ tels que

$$f_i(Z) - f_i(T) = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}(Z,T)(T_j - Z_j).$$

On peut choisir $a_{i,j}(Z,T)$ tels que $\deg_Z(a_{i,j}(Z,T)) \leq d_i - 1$ (§1 (13)). On note $\Delta(Z,T) = \det(a_{i,j}(Z,T))$. Par construction $\deg_Z(\Delta(Z,T)) \leq \delta$, et on peut poser

$$\Delta(Z,T) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^q \\ |\alpha| \leq \delta}} Z^\alpha J_\alpha(T).$$

D'après la formule de Weil, $\{\bar{Z}^\alpha \ : \ |\alpha| \leq \delta\}$ est un système de générateurs du $\mathbf{A}$-module $\dfrac{\mathbf{R}}{(f(Z))}$. Pour tout $\beta \in \mathbb{N}^q$ tel que $|\beta| \geq \delta + 1$, il existe des $a_\alpha \in \mathbf{A}$ tels que

$$(Z^\beta - \sum_{|\alpha| \leq \delta} a_\alpha Z^\alpha) \in (f(Z)).$$

Comme $(f(Z))$ est un idéal homogène, $Z^\beta \in (f(Z))$. $\square$

Lemme 2.2.2.
Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et les polynômes de $\mathbf{R}$

$$f_1(Z) = Z_1^d + g_1(Z), \ldots, f_q(Z) = Z_q^d + g_q(Z)$$

où $g_1(Z), \ldots, g_q(Z)$ sont des polynômes de degré strictement plus petit que d. Alors:
i) $\{f_1(Z), \ldots, f_q(Z)\}$ est une suite régulière.
ii) Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ tel que $0 \leq \alpha_i < d$, $i = 1, \ldots, q$:

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Z^\alpha \ dZ \\ f_1(Z), \ldots, f_q(Z) \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Z^\alpha \ dZ \\ Z_1^d, \ldots, Z_q^d \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Preuve.

i) Pour montrer que la suite $\{f_1(Z), \ldots, f_q(Z)\}$ est régulière, Il suffit de vérifier que la multiplication par $f_i(Z)$ dans $\dfrac{\mathbf{R}}{(f_1(Z), \ldots, f_{i-1}(Z))}$ est injective. En effectuant la division euclidienne des éléments de $\mathbf{R}$ par $f_1, \ldots, f_{i-1}$ on obtient

$$\frac{\mathbf{R}}{(f_1(Z), \ldots, f_{i-1}(Z))} \simeq \mathbf{A}_i[Z_i, Z_{i+1}, \ldots, Z_q] \ ,$$

où $\mathbf{A}_i = \bigoplus_{\substack{0\leq\beta_s<d \\ s=1,\ldots,i-1}} \mathbf{A}Z_1^{\beta_1} \ldots Z_{i-1}^{\beta_{i-1}}$.

Soit $\overline{f_i(Z)}$ l'image de $f_i(Z)$ dans $\mathbf{A}_i[Z_i, Z_{i+1}, \ldots, Z_q]$.

$$\overline{f_i(Z)} = Z_i^d + g_i'(Z) \tag{2}$$

où $g_i'(Z)$ est un polynôme en $Z_i, Z_{i+1}, \ldots, Z_q$ à cœfficients dans $\mathbf{A}_i$ de degré strictement plus petit que d. Ceci montre que la multiplication par $\overline{f_i(Z)}$ dans $\mathbf{A}_i[Z_i, Z_{i+1}, \ldots, Z_q]$ est injective et prouve i).

ii) Soient $q_{i,j}(Z,T) \in \mathbf{A}[Z,T]$ tels que $\deg_Z(q_{i,j}(Z,T)) < d-1$ et

$$\begin{aligned} f_i(Z) - f_i(T) &= (\sum_{k=0}^{d-1} Z_i^k T_i^{d-k-1} + q_{i,i}(Z,T))(Z_i - T_i) + \sum_{\substack{1\leq j\leq q \\ j\neq i}} q_{i,j}(Z,T)(T_j - Z_j) \\ &= \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}(Z,T)(T_j - Z_j). \end{aligned}$$

On note

$$\det(a_{i,j}(Z,T)) = \prod_{i=1}^{q} \left(\sum_{k=0}^{d-1} Z_i^k T_i^{d-k-1} \right) + \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^q \\ |\beta|\leq q(d-1)-1}} Z^\beta Q_\beta(T),$$

$$\text{et} \qquad \begin{aligned} \mathbf{A}[Z] &\longrightarrow \mathbf{P} \\ Z^\alpha &\longrightarrow \bar{Z}^\alpha \end{aligned} \ ,$$

la surjection canonique. Le noyau de

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}[T] &\longrightarrow \mathbf{P} \\ \bar{Z}^\alpha T^\beta \qquad &\longrightarrow \bar{Z}^\alpha \bar{Z}^\beta \end{aligned}$$

étant engendré par la suite quasi-régulière $\zeta = \{\bar{Z}_1 - T_1, \ldots, \bar{Z}_q - T_q\}$, on a

$$\Delta_\zeta^{f(Z)} = \prod_{i=1}^{q} \left(\sum_{k=0}^{d-1} \bar{Z}_i^k \bar{T}_i^{d-k-1} \right) + \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^q \\ |\beta|\leq q(d-1)-1 \\ 0\leq\beta_j<d}} \bar{Z}^\beta Q_\beta'(\bar{T}).$$

D'après l'exemple 3.3.3 du chapitre I on a:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\left[\begin{matrix}\left(\prod_{i=1}^{q}\left(\sum_{k=0}^{d-1} Z_i^k T_i^{d-k-1}\right)+\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^q\\|\beta|\leq q(d-1)-1\\0\leq\beta_j<d}} Z^\beta Q'_\beta(T)\right)\ dZ\\ Z_1^d,\dots,Z_q^d\end{matrix}\right]=1.$$

Comme $\dfrac{\mathbf{R}}{(f(Z))}=\dfrac{\mathbf{R}}{(Z^d)}$, d'après le corollaire I. 2.2.3, les formes linéaires $\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\left[\begin{matrix}.\ dZ\\ Z_1^d,\dots,Z_q^d\end{matrix}\right]$ et $\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\left[\begin{matrix}.\ dZ\\ f_1(Z),\dots,f_q(Z)\end{matrix}\right]$ induisent le même élément de $\hom_{\mathbf{A}}(\mathbf{P},\mathbf{A})$, ce qui prouve (1). $\square$

Théorème 2.2.3.

Soient $f(Z)=\{f_1(Z),\dots,f_q(Z)\}$ une suite quasi-régulière de polynômes de $\mathbf{R}$ de degré $d_1,\dots,d_q$ telle que $\dfrac{\mathbf{R}}{(f(Z))}$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, et $k=(k_1,\dots,k_q)\in(\mathbb{N}^*)^q$. On note $h_i(Z)$ la partie homogène de degré d_i de $f_i(Z)$. On suppose que $h(Z)=\{h_1(Z),\dots,h_q(Z)\}$ est une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$, et que $\dfrac{\mathbf{R}}{(h(Z))}$ un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini. Alors:

i) pour tout polynôme $q(Z)$ de degré au plus $\sum_{i=1}^q k_id_i-q-1$ on a

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\left[\begin{matrix}q(Z)dZ\\ f_1^{k_1}(Z),\dots,f_q^{k_q}(Z)\end{matrix}\right]=0\ , \tag{3}$$

ii) pour tout polynôme $q(Z)$ de degré $\sum_{i=1}^q k_id_i-q$ on a

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\left[\begin{matrix}q(Z)dZ\\ f_1^{k_1}(Z),\dots,f_q^{k_q}(Z)\end{matrix}\right]=\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\left[\begin{matrix}\mathcal{Q}(Z)dZ\\ h_1^{k_1}(Z),\dots,h_q^{k_q}(Z)\end{matrix}\right]\ , \tag{4}$$

où $\mathcal{Q}(Z)$ est la partie homogène de degré $\sum_{i=1}^q k_id_i-q$ de $q(Z)$.

Preuve.

On pose

$$\begin{aligned}r_i(Z)&=f_i(Z)-h_i(Z)\\ f_i(Z)^{k_i}&=(h_i(Z)+r_i(Z))^{k_i}\\ &=h_i(Z)^{k_i}+r'_i(Z),\end{aligned}$$

où $h_i(Z)^{k_i}$ est homogène de degré k_id_i et $\deg_Z(r'_i(Z))<k_id_i$. Comme les suites $\{f_1(Z)^{k_1},\dots,f_q(Z)^{k_q}\}$, $\{h_1(Z)^{k_1},\dots,h_q(Z)^{k_q}\}$ sont quasi-régulières, et les $\mathbf{A}$-modules $\dfrac{\mathbf{R}}{(f(Z)^k)}$, $\dfrac{\mathbf{R}}{(h(Z)^k)}$ sont projectifs de type fini, il suffit de prouver le théorème lorsque $k_1=\cdots=k_q=1$. Comme précédemment on note $\delta=\sum_{i=1}^q d_i-q$.

Les polynômes $h_i(Z)$ étant homogènes il existe, d'après le théorème 2.2.1, des polynômes homogènes $A_{i,j}(Z)$ de degré $\delta+1-d_j$ tels que

$$Z_i^{\delta+1}=\sum_{j=1}^{q}A_{i,j}(Z)h_j(Z)\ , \tag{5}$$

et par construction:

$$\begin{aligned}\deg_Z\left(\det(A_{i,j}(Z))\right) &= q(\delta+1) - \sum_{i=1}^{q} d_i \\ &= (q-1)\delta\ .\end{aligned} \tag{6}$$

On note

$$\begin{aligned} g_i(Z) &= \sum_{j=1}^{q} A_{i,j}(Z) f_j(Z) \\ &= Z_i^{\delta+1} + \sum_{j=1}^{q} A_{i,j}(Z) r_j(Z). \end{aligned}$$

D'après la loi de transformation

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} q(Z)\ dZ \\ f_1(Z),\ldots,f_q(Z)\end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} q(Z)\det(A_{i,j}(Z))\ dZ \\ g_1(Z),\ldots,g_q(Z)\end{bmatrix}. \tag{7}$$

Preuve de i).

Lorsque $\deg_Z(q(Z)) \leq \delta - 1$, $\deg_Z\left(q(Z)\det(A_{i,j}(Z))\right) \leq q\delta - 1$. Comme $\deg_Z\left(A_{i,j}(Z) r_j(Z)\right) < \delta{+}1$, par divisions euclidiennes successives de $q(Z)\det(A_{i,j}(Z))$ par les $g_i(Z) = Z_i^{\delta+1} + \sum_{j=1}^{q} A_{i,j}(Z) r_j(Z)$, $i = 1,\ldots,q$, on détermine des polynômes $q_1(Z) \in (g(Z))$ et $q_2(Z) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_q)\\ |\alpha|\leq q\delta-1 \\ o\leq\alpha_i\leq\delta\ ,\ i=1,\ldots,q}} \lambda_\alpha Z^\alpha$ tels que:

$$q(Z)\det(A_{i,j}(Z)) = q_1(Z) + q_2(Z).$$

En appliquant le lemme 2.2.2 on obtient

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} q(Z)\det(A_{i,j}(Z))\ dZ \\ g_1(Z),\ldots,g_q(Z)\end{bmatrix} &= \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} q_2(Z)\ dZ \\ g_1(Z),\ldots,g_q(Z)\end{bmatrix} \\ &= 0\end{aligned} \tag{8}$$

et par conséquent

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} q(Z)\ dZ \\ f_1(Z),\ldots,f_q(Z)\end{bmatrix} = 0\ ,$$

ce qui prouve i).

Preuve de ii).

D'après i) on peut supposer que $q(Z)$ est un polynôme homogène de degré δ. En appliquant la loi de transformation, (5) donne

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} q(Z)\ dZ \\ h_1(Z),\ldots,h_q(Z)\end{bmatrix} &= \operatorname{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}}\begin{bmatrix} q(Z)\det(A_{i,j}(Z))\ dZ \\ Z_1^{\delta+1},\ldots,Z_q^{\delta+1}\end{bmatrix} \\ &= a_\delta\ ,\end{aligned} \tag{9}$$

où a_δ est le cœfficient du terme en $Z_1^\delta \ldots Z_q^\delta$ de $q(Z)\det(A_{i,j}(Z))$. D'autre part, comme $q(Z)\det(A_{i,j}(Z))$ est homogène de degré $q\delta$, il existe des polynômes homogènes $R_1(Z),\ldots,R_q(Z)$ de degrés $(q-1)\delta - 1$ tels que

$$q(Z)\det(A_{i,j}(Z)) = \sum_{i=1}^{q} Z_i^{\delta+1} R_i(Z) + a_\delta Z_1^\delta \ldots Z_q^\delta\ .$$

Comme

$$Z_i^{\delta+1} R_i(Z) = g_i(Z) R_i(Z) - \left(\sum_{j=1}^{q} A_{i,j}(Z) r_j(Z) \right) R_i(Z)$$

et $\deg \left(\left(\sum_{j=1}^{q} A_{i,j}(Z) r_j(Z) \right) R_i(Z) \right) < q\delta$, on a, en appliquant la même preuve qui a permis d'obtenir (8),

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \left(\sum_{j=1}^{q} A_{i,j}(Z) r_j(Z) \right) R_i(Z) \ dZ \\ g_1(Z), \ldots, g_q(Z) \end{bmatrix} = 0 \ ,$$

$$\text{et} \qquad \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} Z_i^{\delta+1} R_i(Z) \ dZ \\ g_1(Z), \ldots, g_q(Z) \end{bmatrix} = 0 \ .$$

Par conséquent en appliquant le lemme 2.2.2 on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} q(Z) \det(A_{i,j}(Z)) \ dZ \\ g_1(Z), \ldots, g_q(Z) \end{bmatrix} &= \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_\delta Z_1^\delta \ldots Z_q^\delta \ dZ \\ g_1(Z), \ldots, g_q(Z) \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_\delta Z_1^\delta \ldots Z_q^\delta \ dZ \\ Z_1^{\delta+1}, \ldots, Z_q^{\delta+1} \end{bmatrix} \\ &= a_\delta \ . \end{aligned} \tag{10}$$

D'après (7), (9), (10) on obtient:

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} q(Z) dZ \\ f_1(Z), \ldots, f_q(Z) \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} q(Z) dZ \\ h_1(Z), \ldots, h_q(Z) \end{bmatrix} \ ,$$

ce qui prouve ii).

Corollaire 2.2.4.

Soit $f(Z) = \{f_1(Z), \ldots, f_q(Z)\}$ une suite quasi-régulière de polynômes de $\mathbf{R}$ de degrés $d_1, \ldots, d_q$ telle que $\dfrac{\mathbf{R}}{((f(Z))}$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini. On note $h_i(Z)$ la partie homogène de degré d_i de $f_i(Z)$, $a_{i,j}(Z,T) \in \mathbf{A}[Z,T]$ des polynômes tels que

$$f_i(Z) - f_i(T) = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}(Z,T)(Z_j - T_j).$$

On pose $\Delta(Z,T) = \det(a_{i,j}(Z,T))$.

Si $h(Z) = \{h_1(Z), \ldots, h_q(Z)\}$ est une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$ et $\dfrac{\mathbf{R}}{(h(Z))}$ un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, alors

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{R}/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta(Z,T) \ dZ \\ f_1(Z), \ldots, f_q(Z) \end{bmatrix} = 1.$$

Preuve.

D'après la formule de Weil (chap. III, §1, exemple 1) on a

$$1 = \sum_{(k_1,\ldots,k_q)\in(N^*)^q} \mathrm{Res}_{\mathbf{A}[T]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta(Z,T)dT_1\wedge\cdots\wedge dT_q \\ f_1^{k_1}(T),\ldots,f_q^{k_q}(T) \end{bmatrix} f_1^{k_1-1}(Z)\ldots f_q^{k_q-1}(Z).$$

D'autre part on peut choisir des polynômes $a_{i,j}(Z,T)$ tels que $\deg_Z(a_{i,j}(Z,T)) \leq d_i - 1$, et $\deg_Z(\Delta(Z,T)) \leq \sum_{j=1}^q d_i - q$. Par conséquent si $(k_1,\ldots,k_q) \neq (1,\ldots,1)$ on a $\deg_Z(\Delta(Z,T)) \leq \sum_{j=1}^q k_i d_i - q - 1$, et d'après le théorème 2.2.3

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{A}[T]/\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta(Z,T)dT_1\wedge\cdots\wedge dT_q \\ f_1^{k_1}(T),\ldots,f_q^{k_q}(T) \end{bmatrix} = 0. \quad \square$$

APPENDICE

SUITES QUASI-RÉGULIÈRES

§1. Suites quasi-régulières

Définition 1.1. *(suites régulières)*

Soient $\mathbf{R}$ *un anneau et* $f = (f_1, \dots, f_q)$ *une suite de* $\mathbf{R}$ *telle que* $f\mathbf{R} \neq \mathbf{R}$. *Pour* $i \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ *on note* $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}$, $\mathbf{R}_i = \dfrac{\mathbf{R}}{(f_1, \dots, f_i)\mathbf{R}}$, *et* $\mu_{f_{i+1}} : \mathbf{R}_i \longrightarrow \mathbf{R}_i$ *l'endomorphisme multiplication par* f_{i+1}.

La suite $(f_1, \dots, f_q)$ *est régulière si les endomorphismes* $\mu_{f_1}, \dots, \mu_{f_q}$ *sont injectifs.*

Remarque 1.2.

La propriété pour une suite d'être régulière dépend, en général, de l'ordre de ses termes. Par exemple on considère dans $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ les polynômes $P_1(X) = X_1(1 - X_3)$, $P_2(X) = X_2(1 - X_3)$, et $P_3(X) = X_3$. La suite (P_1, P_2, P_3) n'est pas régulière, par contre la suite (P_1, P_3, P_2) est régulière.

Proposition 1.3.

On considère $\mathbf{R}$ *un anneau et* $f = (f_1, \dots, f_q)$ *une suite régulière de* $\mathbf{R}$.

i) Soient a_i *des éléments de* $\mathbf{R}$. *Si* $\sum_{i=1}^q a_i f_i = 0$, *alors pour tout* i, $a_i \in f\mathbf{R}$.

ii) Pour toute suite $(n_1, \dots, n_q) \in (\mathbb{N}^*)^q$, *la suite* $(f_1^{n_1}, \dots, f_q^{n_q})$ *est régulière.*

Preuve.

i) On montre i) par récurrence sur q. Si $q = 1$, f_1 n'étant pas diviseur de zéro dans $\mathbf{R}$ la propriété i) est vérifiée. Soit $q > 1$ un entier, on suppose la propriété $i)$ prouvée pour toute suite régulière $(g_1, \dots, g_{q-1})$.

Comme $\sum_{i=1}^q a_i f_i = 0$, $a_q f_q \in (f_1, \dots f_{q-1})\mathbf{R}$. f étant une suite régulière, l'endomorphisme μ_{f_q} est injectif, et l'on a $a_q \in (f_1, \dots f_{q-1})\mathbf{R}$. Il existe donc des $\lambda_j \in \mathbf{R}$ tels que $a_q = \sum_{j=1}^{q-1} \lambda_j f_j$, et par conséquent on a: $\sum_{j=1}^{q-1} (a_j - \lambda_j f_q) f_j = 0$. D'après l'hypothèse de récurrence on a $(a_j - \lambda_j f_q) \in (f_1, \dots, f_{q-1})\mathbf{R}$, donc $a_j \in (f_1, \dots, f_q)\mathbf{R}$.

ii) Il suffit de prouver que pour tout entier $q \geq 1$ et $n_1 \geq 1$, la suite $(f_1^{n_1}, f_2, \ldots, f_q)$ est régulière. Cette propriété est vraie pour $n_1 = 1$. Soit $n_1 > 1$ un entier, on suppose montré par récurrence que la suite $(f_1^{n_1-1}, \ldots, f_q^{n_q})$ est régulière.

Soit $j \in \{1, \ldots q-1\}$ et $\mathbf{R}_j = \dfrac{\mathbf{R}}{(f_1^{n_1}, f_2, \ldots, f_q)\mathbf{R}}$. L'endomorphisme de $\mathbf{R}_j$, multiplication par f_{j+1}, est injectif. En effet, soit $r \in \mathbf{R}$ tel que $rf_{j+1} \in (f_1^{n_1}, f_2, \ldots, f_j)\mathbf{R}$. On choisit des $a_i \in \mathbf{R}$ tels que $rf_{j+1} = a_1 f_1^{n_1} + a_2 f_2 + \cdots + a_j f_j$. On a en particulier $rf_{j+1} \in (f_1^{n_1-1}, f_2, \ldots, f_j)\mathbf{R}$, ce qui inplique d'après l'hypothèse de récurrence que $r \in (f_1^{n_1-1}, f_2, \ldots, f_j)\mathbf{R}$. Il existe donc des $\lambda_k \in \mathbf{R}$ tels que $r = \lambda_1 f_1^{n_1-1} + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_j f_j$, par conséquent $(a_1 f_1 - \lambda_1 f_{j+1}) f_1^{n_1-1} + (a_2 - \lambda_2 f_{j+1}) f_2 + \cdots + (a_j - \lambda_j f_{j+1}) f_j = 0$. D'après l'hypothèse de récurrence la suite $(f_1^{n_1-1}, \ldots, f_j)$ est régulière, donc d'après i) cette égalité implique que $(a_1 f_1 - \lambda_1 f_{j+1}) \in (f_1^{n_1-1}, \ldots, f_j)\mathbf{R}$, donc en particulier $\lambda_1 f_{j+1} \in (f_1, \ldots, f_j)\mathbf{R}$. La suite f étant régulière, on en déduit que $\lambda_1 \in (f_1, \ldots, f_j)\mathbf{R}$, et par conséquent $r \in (f_1^{n_1}, \ldots, f_j)\mathbf{R}$. $\square$

Définition 1.4.

Soit $\mathbf{R}$ *un anneau. Une suite* $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *de* $\mathbf{R}$ *qui engendre un idéal* I *tel que* $I \neq \mathbf{R}$, *est quasi-régulière si elle vérifie les assertions équivalentes suivantes:*

i) Pour tout entier m *et tout polynôme* $P_m(X_1, \ldots, X_q) \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_q]$ *homogène de degré* m, $P_m(f_1, \ldots, f_q) \in I^{m+1}$ *implique que tous les cœfficients de* P_m *sont dans* I.

ii) Pour tout entier m *et tout polynôme* $P_m(X_1, \ldots, X_q) \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_q]$ *homogène de degré* m, $P_h(f_1, \ldots, f_q) = 0$ *implique que tous les cœfficients de* P_m *sont dans* I.

iii) Le $\dfrac{\mathbf{R}}{I}$*-homomorphisme*

$$\rho : \frac{\mathbf{R}}{I}[X_1, \ldots, X_q] \longrightarrow \mathrm{gr}_I\, \mathbf{R} = \bigoplus_{m \geq 0} \frac{I^m}{I^{m+1}} \ ,$$

qui au polynôme homogène de degré m $P_m(X_1, \ldots, X_q)$ *fait correspondre la classe de* $P_m(f_1, \ldots, f_q)$ *dans* $\dfrac{I^m}{I^{m+1}}$, *est un isomorphisme.*

Proposition 1.5.

Toute suite régulière est quasi-régulière.

Preuve.

D'après la proposition 1.3, toute suite régulière vérifie la condition ii) de la définition 1.4.

Proposition 1.6.

Une suite $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *de* $\mathbf{R}$ *qui engendre un idéal* I *est quasi-régulière si et seulement si pour tout idéal maximal* $\mathfrak{m} \supset I$, *l'image de* $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *dans* $\mathbf{R}_\mathfrak{m}$ *est une suite quasi-régulière.*

Preuve.

Soit $P_m(X_1, \ldots, X_q)$ un polynôme homogène de degré m de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_q]$ tel que $P_m(f_1, \ldots, f_q) = 0$. D'après le principe du passage du local au global, P_m est à cœfficients dans I si et seulement si pour tout idéal maximal $\mathfrak{m} \supset I$, l'image de P_m dans $\mathbf{R}_{\mathfrak{m}}[X_1, \ldots, X_q]$ est à cœfficients dans $I_{\mathfrak{m}}$. □

Proposition 1.7.

Soit $\mathbf{R}$ un anneau et $f = (f_1, \ldots, f_q)$ une suite de $\mathbf{R}$ qui engendre un idéal I tel que $I \neq \mathbf{R}$. On note $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}$, et pour $i \in \{1, \ldots, q-1\}$ $\mathbf{R}_i = \dfrac{\mathbf{R}}{(f_1, \ldots, f_i)\mathbf{R}}$. On suppose que pour $i = 0, \ldots, q-1$, $\bigcap_{m \geq 0} I^m \mathbf{R}_i = \{0\}$ (i.e $\mathbf{R}_i$ est séparé pour la topologie I-adique).

Si $(f_1, \ldots, f_q)$ est une suite quasi-régulière alors elle est régulière.

Preuve.

On montre que f_1 est régulier, puis que $\{\bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_q\}$, image la suite $\{f_2, \ldots, f_q\}$ dans $\mathbf{R}_1$, est quasi-régulière. Par récurrence sur q ceci prouvera la proposition.

Soit $r \in \mathbf{R}$ tel que $rf_1 = 0$. $\{f_1, \ldots, f_q\}$ étant une suite quasi-régulière, $r \in I$ et il existe des $a_i \in \mathbf{R}$ tels que $r = \sum_{i=1}^q a_i f_i$. Par conséquent $\sum_{i=1}^q a_i f_i f_1 = 0$ et $a_i \in I$. Ceci montre que $r \in I^2$, et le même procédé prouve que $r \in \bigcap_{m \geq 0} I^m$. Par hypothèse $\mathbf{R}$ est séparé pour la topologie I-adique, donc $r = 0$ et f_1 est régulier.

Soit $p_m \in \mathbf{R}_1[X_2, \ldots, X_q]$ un polynôme homogène de degré m tel que $p_m(\bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_q) = 0$, et $P_m \in \mathbf{R}[X_2, \ldots, X_q]$ un polynôme homogène de degré m qui admet pour image p_m. On a $P_m(f_2, \ldots f_q) \in f_1\mathbf{R}$ et il existe $\omega \in I^{m-1}$ tel que $P_m(f_2, \ldots f_q) = f_1\omega$. En effet, si l'on suppose que $\omega \in I^k$ avec $k < m-1$, en notant $G_k \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_q]$ un polynôme homogène de degré k tel que $\omega = G_k(f_1, \ldots f_q)$ on a:

$$F_m(f_2, \ldots, f_q) = f_1 G_k(f_1, \ldots, f_q) \in I^m \ .$$

$(f_1, \ldots, f_q)$ étant une suite quasi-régulière et $k < m-1$, les cœfficients de G_k sont dans I, par conséquent $\omega \in I^{k+1}$. Il existe donc un polynôme $G_{m-1} \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_q]$ homogène de degré $m-1$ tel que

$$P_m(f_2, \ldots, f_q) = f_1 G_{m-1}(f_1, \ldots, f_q) \ .$$

On considère le polynôme homogène

$$H_m(X_1, \ldots, X_q) = P_m(X_2, \ldots, X_q) - X_1 G_{m-1}(X_1, \ldots, X_q) \ .$$

On a $H_m(f_1, \ldots, f_q) = 0$, la suite $(f_1, \ldots, f_q)$ étant quasi-régulière et X_1 ne divisant aucun monôme constituant P_m, les cœfficients de P_m sont dans I. Ceci prouve que $p_m \in (\bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_q)\mathbf{R}_1$, et $\{\bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_q\}$, est une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}_1$. □

Corollaire 1.8.

Soit $(\mathbf{R}, \mathfrak{m})$ un anneau local nœthérien. La suite $(f_1, \ldots, f_q)$ est quasi-régulière si et seulement si elle est régulière.

Preuve.

D'après la proposition (1.5) il suffit de montrer qu'une suite quasi-régulière est régulière. $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}, \mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_{q-1}$ étant des anneaux locaux nœthériens, ils sont séparés pour la topologie I-adique. D'après la proposition (1.7), $(f_1, \ldots, f_q)$ est une suite régulière. □

En appliquant la proposition 1.6 on obtient:

Corollaire 1.9.
Soit $\mathbf{R}$ *un anneau nœthérien. Une suite* $f = (f_1, \dots, f_q)$ *de* $\mathbf{R}$ *qui engendre un idéal* I *est quasi-régulière, si et seulement si pour tout idéal maximal* $\mathfrak{m} \supset I$, *l'image de* $f = (f_1, \dots, f_q)$ *dans* $\mathbf{R}_\mathfrak{m}$ *est une suite régulière.*

Corollaire 1.10.
Soit $\mathbf{R}$ *un anneau nœthérien,* $f = (f_1, \dots, f_q)$ *une suite quasi-régulière de* $\mathbf{R}$, *et* $n = (n_1, \dots, n_q) \in (\mathbb{N}^*)^q$. *Alors la suite* $f^n = (f_1^{n_1}, \dots, f_q^{n_q})$ *est quasi-régulière.*

Preuve.
Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $\mathbf{R}$ contenant $\{f_1^{n_1}, \dots, f_q^{n_q}\}$. D'après la proposition 1.9 l'image de la suite f dans $\mathbf{R}_\mathfrak{m}$ est régulière, donc, d'après la proposition 1.3 l'image de la suite f^n dans $\mathbf{R}_\mathfrak{m}$ est régulière. $\square$

On énonce ci-dessous un critère pour les suites complètement sécantes (Bourbaki, Algèbre chap. 10, §9, N^0 7).

Soient $\mathbf{R}$ un anneau et $f = (f_1, \dots, f_q)$ une suite $\mathbf{R}$ qui engendre un idéal I. On note $\mathbf{K}_.(f_1, \dots, f_q)$ le complexe de Koszul associé à f, et pour $i \geq 0$ les groupes d'homologie $H_i(f)$. On considère le $\mathbf{R}$-homomorphisme

$$a^f : \mathbf{R}[X_1, \dots, X_q] \longrightarrow \bigoplus_{m \geq 0} I^m$$

qui au polynôme homogène de degré m, $P_m(X_1, \dots, X_q)$, fait correspondre $P_m(f_1, \dots, f_q)$. On note $\mathfrak{d}$ l'idéal de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_q]$ engendré par les éléments $(f_i X_j - f_j X_i)$ pour $1 \leq i < j \leq q$. On a $\mathfrak{d} \subset \ker a^f$, donc a^f donne par passage au quotient un $\mathbf{R}$-homomorphisme:

$$\alpha^f : \frac{\mathbf{R}[X_1, \dots, X_q]}{\mathfrak{d}} \longrightarrow \bigoplus_{m \geq 0} I^m \ .$$

Comme dans la définition (1.4) on considére le $\mathbf{R}$-homomorphisme:

$$\rho : \frac{\mathbf{R}}{I}[X_1, \dots, X_q] \longrightarrow \operatorname{gr}_I \mathbf{R} = \bigoplus_{m \geq 0} \frac{I^m}{I^{m+1}} \ .$$

Théorème 1.11. *(un critère pour les suites complètement sécantes, [B1], chap.10, §9 , N^0 7, th. 1.)*
Considérons les conditions suivantes:
(i) La suite f *est régulière.*
(ii) Pour tout $i > 0$, $H_i(f) = 0$.
(iii) On a $H_1(x) = 0$.
(iv) L'homomorphisme $\alpha^f : \dfrac{\mathbf{R}[X_1, \dots, X_q]}{\mathfrak{d}} \longrightarrow \bigoplus_{m \geq 0} I^m$ *est bijectif.*
(v) L'homomorphisme $\rho : \dfrac{\mathbf{R}}{I}[X_1, \dots, X_q] \longrightarrow \operatorname{gr}_I \mathbf{R} = \bigoplus_{m \geq 0} \dfrac{I^m}{I^{m+1}}$ *est bijectif.*
On a alors les implications (i) $\Rightarrow$ *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)* $\Leftrightarrow$ *(iv)* $\Rightarrow$ *(v). Si pour* $1 \leq i \leq q$ *le* $\mathbf{R}$*-module* $\dfrac{\mathbf{R}}{f_1\mathbf{R} + \cdots + f_{i-1}\mathbf{R}}$ *est séparé pour la topologie* I*-adique, les conditions (i) à (v) sont équivalentes.*

Remarque 1.11.

Une suite qui vérifie la condition (ii) est appelée suite complètement sécante.

§2. Suites quasi-régulières sur une algèbre

Proposition 2.1.

Soient $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre et* $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *une suite de* $\mathbf{R}$ *telle que* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *soit un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini. On note* $\hat{\mathbf{R}}$ *le séparé-complété de* $\mathbf{R}$ *pour la topologie* f*-adique, et* $\sigma : \mathbf{P} \longrightarrow \hat{\mathbf{R}}$ *une section* $\mathbf{A}$*-linéaire de la projection canonique* $\pi : \hat{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathbf{P}$.

(i) Pour tout $r \in \hat{\mathbf{R}}$*, il existe une suite* $(r_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^q}$ *de* $\mathbf{P}$ *telle que:*

$$r = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q} \sigma(r_\alpha) f^\alpha \ . \tag{1}$$

(ii) f *est une suite quasi-régulière si et seulement si pour tout* $r \in \hat{\mathbf{R}}$ *l'écriture de (1) est unique.*

Preuve.

Soient $\tilde{I} = f\hat{\mathbf{R}}$ et $r \in \hat{\mathbf{R}}$. On montre qu'il existe un unique élément $r_0 \in \mathbf{P}$ tel que $(r - \sigma(r_0)) \in \tilde{I}$. En effet, si l'on pose $r_0 = \pi(r)$ on a $\pi(r - \sigma(r_0)) = 0$, donc $(r - \sigma(r_0)) \in \tilde{I}$. D'autre part si $(r - \sigma(r_0')) \in \tilde{I}$ on a $\pi(\sigma(r_0) - \sigma(r_0')) = 0$, donc $r_0 = r_0'$.

Soit m un entier. On suppose montré par récurrence sur m l'existence d'une suite $(r_\alpha)_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^q \\ |\alpha| \leq m}}$ de $\mathbf{P}$ telle que:

(a) $\Big(r - \sum_{|\alpha| \leq m} \sigma(r_\alpha) f^\alpha\Big) \in \tilde{I}^{m+1}$.

(b) Si f est quasi-régulière, la suite $(r_\alpha)_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^q \\ |\alpha| \leq m}}$ qui vérifie (a) est unique.

Comme $\{f^\beta \mid \beta \in \mathbb{N}^q \, \text{et} \, |\beta| = m+1\}$ est un système générateur du $\hat{\mathbf{R}}$-module $\tilde{I}^{m+1}$, l'hypothèse de récurrence (a), entraîne l'existence d'une suite $(a_\beta)_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^q \\ |\beta| = m+1}}$ d'élément de $\hat{\mathbf{R}}$ telle que

$$r - \sum_{|\alpha| \leq m} \sigma(r_\alpha) f^\alpha = \sum_{|\beta| = m+1} a_\beta f^\beta \ . \tag{2}$$

On considère les éléments $r_\beta \in \mathbf{P}$ tels que $r_\beta = \pi(a_\beta)$. D'après (2) on a:

$$r - \sum_{|\alpha| \leq m} \sigma(r_\alpha) f^\alpha - \sum_{|\beta| = m+1} \sigma(r_\beta) f^\beta = \sum_{|\beta| = m+1} \left(a_\beta - \sigma(r_\beta)\right) f^\beta \ .$$

Comme $\pi\left(a_\beta - \sigma(r_\beta)\right) = 0$, on a $\left(a_\beta - \sigma(r_\beta)\right) \in \tilde{I}$. Par conséquent

$$\left(r - \sum_{|\alpha| \leq m} \sigma(r_\alpha) f^\alpha - \sum_{|\beta| = m+1} \sigma(r_\beta) f^\beta \right) \in \tilde{I}^{m+2} . \tag{3}$$

Par récurrence on construit une série de terme général $\sigma(r_\alpha) f^\alpha$. $\hat{\mathbf{R}}$ étant séparé et complet pour la topologie f-adique, cette série converge vers r et $r = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q} \sigma(r_\alpha) f^\alpha$, ce qui prouve (i).

Si la suite f est quasi-régulière et

$$\left(r - \sum_{|\alpha| \leq m} \sigma(r'_\alpha) f^\alpha - \sum_{|\beta| = m+1} \sigma(r'_\beta) f^\beta \right) \in \tilde{I}^{m+2} , \tag{4}$$

comme $\sum_{|\beta|=m+1} \sigma(r'_\beta) f^\beta \in \tilde{I}^{m+1}$, on a $\left(r - \sum_{|\alpha| \leq m} \sigma(r'_\alpha) f^\alpha \right) \tilde{I}^{m+1}$. L'hypothèse de récurrence (b) permet de dire que $r_\alpha = r'_\alpha$ pour $|\alpha| \leq m$, et par conséquent

$$\left(r - \sum_{|\alpha| \leq m} \sigma(r_\alpha) f^\alpha - \sum_{|\beta| = m+1} \sigma(r'_\beta) f^\beta \right) \in \tilde{I}^{m+2} . \tag{5}$$

De (3) et (5) on déduit

$$\sum_{|\beta| = m+1} \left(\sigma(r'_\beta) - \sigma(r_\beta) \right) f^\beta \in \tilde{I}^{m+2} . \tag{6}$$

Or f est une suite quasi-régulière de $\hat{\mathbf{R}}$. En effet, si l'on note $\tilde{I} = f\hat{\mathbf{R}}$, d'après l'assertion (i) on a $\dfrac{\hat{\mathbf{R}}}{\tilde{I}} = \dfrac{\mathbf{R}}{I}$, et pour tout entier m, $\dfrac{\tilde{I}^m}{\tilde{I}^{m+1}} = \dfrac{I^m}{I^{m+1}}$. La suite f étant une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$, le $\dfrac{\mathbf{R}}{I}$-homomorphisme

$$\rho : \frac{\mathbf{R}}{I}[X_1, \ldots, X_q] \longrightarrow \operatorname{gr}_I \mathbf{R} = \bigoplus_{m \geq 0} \frac{I^m}{I^{m+1}} ,$$

est un isomorphisme. Par conséquent

$$\rho : \frac{\hat{\mathbf{R}}}{\tilde{I}}[X_1, \ldots, X_q] \longrightarrow \operatorname{gr}_{\tilde{I}} \hat{\mathbf{R}} = \bigoplus_{m \geq 0} \frac{\tilde{I}^m}{\tilde{I}^{m+1}}$$

est un $\dfrac{\hat{\mathbf{R}}}{\tilde{I}}$-isomorphisme. Ce qui prouve que f est une suite quasi-régulière de $\hat{\mathbf{R}}$. De (6) on peut conclure que $\left(\sigma(r'_\beta) - \sigma(r_\beta)\right) \in \tilde{I}$, par conséquent $\pi\left(\sigma(r'_\beta) - \sigma(r_\beta)\right) = 0$, ce qui prouve que $r_\beta = r'_\beta$ pour $|\beta| = m+1$. Par récurrence sur m, ceci prouve l'unicité de l'écriture de (1) lorsque f est une suite quasi-régulière.

Si f n'est pas une suite quasi-régulière, il existe un entier p et des éléments $a_\alpha \in \mathbf{R}$ non tous dans $\tilde{I}$ tels que

$$\left(\sum_{|\alpha|=p} a_\alpha f^\alpha\right) \in \tilde{I}^{p+1} \ .$$

On note $r_\alpha = \pi(a_\alpha)$. Comme $(a_\alpha - \sigma(r_\alpha)) \in \tilde{I}$ on a:

$$\left(\sum_{|\alpha|=p} \sigma(r_\alpha) f^\alpha\right) \in \tilde{I}^{p+1} \ .$$

Il existe par conséquent des $b_\beta \in \hat{\mathbf{R}}$ tels que:

$$\sum_{|\alpha|=p} \sigma(r_\alpha) f^\alpha = \sum_{|\alpha|=p+1} b_\beta f^\beta \ .$$

D'après la preuve de i), il existe une suite $(r_{\beta,\gamma})$ de $\mathbf{P}$ telle que

$$b_\beta = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^q} \sigma(r_{\beta,\gamma}) f^\gamma \ .$$

Par conséquent

$$\sum_{|\alpha|=p} \sigma(r_\alpha) f^\alpha - \sum_{\substack{|\beta|=p+1\\ \gamma\in\mathbb{N}^q}} \sigma(r_{\beta,\gamma}) f^{\gamma+\beta} = 0 \ .$$

Ceci montre que lorsque f n'est pas une suite quasi-régulière, $0 \in \hat{\mathbf{R}}$ admet deux écritures distinctes de la forme (1). $\square$

Proposition 2.2.

Soient $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre et* $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *une suite de* $\mathbf{R}$ *telle que* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *soit un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini. On suppose que* $\mathbf{R}$ *est séparé et complet pour la topologie* f*-adique. On note* $\sigma : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{R}$ *une section* $\mathbf{A}$*-linéaire de la projection canonique* $\pi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{P}$*.*

Pour $j \in \{1, \ldots, q\}$ *et* $r = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^q\\ \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_q)}} \sigma(r_\alpha) f^\alpha \in (f_1, \ldots, f_j)\mathbf{R}$ *on a:*

$$r_\alpha \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_j) \neq (0, \ldots, 0) \ .$$

Preuve.

Soient $j \in \{1, \ldots, q\}$ et $r \in (f_1, \ldots, f_j)\mathbf{R}$. On note $I_j = (f_1, \ldots, f_j)\mathbf{R}$. Comme $r \in I_j$, il existe des éléments $a_{i,0} \in \mathbf{R}$ tels que

$$r = \sum_{i=1}^{j} a_{i,0} f_i \ .$$

On pose $r_{i,0} = \pi(a_{i,0})$. On a

$$r - \sum_{i=1}^{j} \sigma(r_{i,0}) f_i = \sum_{i=1}^{j} \left(a_{i,0} - \sigma(r_{i,0})\right) f_i \ .$$

Comme $(a_{i,0} - \sigma(r_{i,0})) \in f\mathbf{R}$, il existe des éléments $a_{i,k} \in \mathbf{R}$ tels que

$$r - \sum_{i=1}^{j} \sigma(r_{i,0}) f_i = \sum_{i=1}^{j} \sum_{k=1}^{q} (a_{i,k}) f_i f_k \ .$$

Soit $m \in \mathbb{N}$. On suppose montré par récurrence sur m, l'existence d'une suite $(r_{i,\alpha})_{\substack{1 \le i \le j \\ |\alpha| \le m}}$ telle que:

$$\left(r - \sum_{i=1}^{j} \sum_{|\alpha| \le m} \sigma(r_{i,\alpha}) f_i f^{\alpha} \right) \in I_j . I^{m+1} \ . \tag{7}$$

L'hypothèse de récurrence a été vérifiée pour $m = 0$.

D'après (7) il existe des éléments $a_{i,\beta} \in \mathbf{R}$ tels que:

$$r - \sum_{i=1}^{j} \sum_{|\alpha| \le m} \sigma(r_{i,\alpha}) f_i f^{\alpha} = \sum_{i=1}^{j} \sum_{|\beta| = m+1} a_{i,\beta} f_i f^{\beta} \ .$$

En notant $r_{i,\beta} = \pi(a_{i,\beta})$ on obtient:

$$r - \sum_{i=1}^{j} \sum_{|\alpha| \le m} \sigma(r_{i,\alpha}) f_i f^{\alpha} - \sum_{i=1}^{j} \sum_{|\beta| = m+1} \sigma(r_{i,\beta}) f_i f^{\beta} = \sum_{i=1}^{j} \sum_{|\beta| = m+1} \left(a_{i,\beta} - \sigma(r_{i,\beta})\right) f_i f^{\beta} \ .$$

Comme $(a_{i,\beta} - \sigma(r_{i,\beta})) \in I$, on a:

$$\left(r - \sum_{i=1}^{j} \sum_{|\alpha| \le m} \sigma(r_{i,\alpha}) f_i f^{\alpha} - \sum_{i=1}^{j} \sum_{|\beta| = m+1} \sigma(r_{i,\beta}) f_i f^{\beta} \right) I_j I^{m+1} \ .$$

On construit ainsi par récurrence une série de terme général $\sigma(r_{i,\alpha}) f_i f^{\alpha}$. $\mathbf{R}$ étant séparé et complet pour la topologie f-adique, cette série converge vers r, ce qui prouve la proposition. □

Corollaire 2.3.

Une suite $f = (f_1, \dots, f_q)$ qui vérifie les hypothèses de la proposition 2.2 est régulière.

Preuve.

Pour $j \in \{1, \dots, q-1\}$ on note $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}$, $\mathbf{R}_j = \dfrac{\mathbf{R}}{(f_1, \dots, f_j)\mathbf{R}}$, et $\mu_{f_{j+1}} : \mathbf{R}_j \longrightarrow \mathbf{R}_j$ l'endomorphisme multiplication par f_{j+1}.

Soit $r = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q} \sigma(r_\alpha) f^{\alpha} \in \mathbf{R}$ tel que

$$r f_{j+1} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q} \sigma(r_\alpha) f_{j+1} f^{\alpha} \in (f_1, \dots, f_j)\mathbf{R} \ . \tag{8}$$

D'après la proposition 2.2, (8) nous permet d'écrire que si $r_\alpha \neq 0$ alors $\sigma(r_\alpha) f^{\alpha} \in (f_1, \dots, f_j)\mathbf{R}$, ce qui montre que $r \in (f_1, \dots, f_j)\mathbf{R}$ et que l'endomorphisme $\mu_{f_{j+1}} : \mathbf{R}_j \longrightarrow \mathbf{R}_j$ est injectif. □

Corollaire 2.4.

Soient $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre,* $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *une suite de* $\mathbf{R}$ *telle que* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *soit un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini, et* $\hat{\mathbf{R}}$ *le séparé-complété de* $\mathbf{R}$ *pour la topologie* f*-adique. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) f *est une suite quasi-régulière de* $\mathbf{R}$.

(ii) L'image de f *dans* $\hat{\mathbf{R}}$ *est une suite régulière.*

Preuve.

Si l'image de la suite f dans $\hat{\mathbf{R}}$ est régulière, elle est en particulier quasi-régulière, et la proposition 2.2 prouve alors que f est une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$.

Si f est une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$, la proposition 2.2 prouve que son image dans $\hat{\mathbf{R}}$ est une suite quasi-régulière. $\hat{\mathbf{R}}$ étant séparé et complet pour la topologie f-adique, la proposition 2.3 prouve que cette suite est régulière dans $\hat{\mathbf{R}}$. $\square$

Corollaire 2.5.

Soient $\mathbf{R}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre,* $f = (f_1, \ldots, f_q)$ *une suite quasi-régulière de* $\mathbf{R}$ *telle que* $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{R}}{f\mathbf{R}}$ *soit un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini, et* $n = (n_1, \ldots, n_q) \in (\mathbb{N}^*)^q$. *Alors la suite* $f^n = (f_1^{n_1}, \ldots, f_q^{n_q})$ *est une suite quasi-régulière de* $\mathbf{R}$.

Preuve.

Soit $\hat{\mathbf{R}}$ le complété f-adique de $\mathbf{R}$, et $\hat{f}$ l'image de la suite f dans $\hat{\mathbf{R}}$. f étant une suite quasi-régulière, d'après le corollaire 2.4 $\hat{f}$ est une suite régulière. D'après la proposition 1.3 $\hat{f}^n = (\hat{f}_1^{n_1}, \ldots, \hat{f}_q^{n_q})$ est une suite régulière de $\hat{\mathbf{R}}$. Comme $\hat{\mathbf{R}}$ est aussi le complété f^n-adique de $\mathbf{R}$, ceci prouve f^n est une suite quasi-régulière de $\mathbf{R}$. $\square$

§3. Suites quasi-régulières dans $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_q]$

Proposition 3.1.

Soient $\mathbb{K}$ *un corps infini,* $P_1, \ldots, P_q$ *des polynômes de* $\mathbb{K}[X_1 \ldots, X_q]$ *et* I *l'idéal qu'ils engendrent. Si* $\dfrac{\mathbb{K}[X_1 \ldots, X_q]}{I}$ *est un* $\mathbb{K}$ *espace vectoriel de dimension finie alors:*

(a) I *est en intersection complète.*

(b) $\{P_1, \ldots, P_q\}$ *est une suite quasi-régulière.*

Preuve de (a).

$\dfrac{\mathbb{K}[X_1 \ldots, X_q]}{I}$ étant un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie tout idéal premier $\mathfrak{p} \supset I$ est maximal. En effet $\dfrac{\mathbb{K}[X_1 \ldots, X_q]}{I}$ étant artinien en tant que $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, (un idéal de $\dfrac{\mathbb{K}[X_1 \ldots, X_q]}{I}$ est un sous $\mathbb{K}$ espace vectoriel donc toute suite décroissante d'idéaux est stationnaire) son spectre ne contient que des idéaux maximaux. La hauteur des idéaux maximaux de $\mathbb{K}[X_1 \ldots, X_q]$ étant égale à q on a $h(I) = \mu(I) = q$, où $\mu(I)$ désigne le nombre minimal de générateurs de I. Ceci prouve que I est en intersection complète.

Remarque:.

Comme $\mathbb{K}[X_1 \ldots, X_q]$ est un anneau de Cohen-Macaulay ([M] (16.E) exemple 1 p.112), d'après "Macaulay's Unmixedness theoreme " ([Ku$_1$] théorème 3.14 p.187), il existe une suite régulière qui engendre I. I est de profondeur q et toute suite régulière de I peut être complétée en une suite régulière de I de longueur q.

Preuve de (b).

La preuve de (b) est une conséquence du lemme suivant:

lemme 3.2.

Quitte à réindexer $P_1, \ldots, P_q$, il existe une suite $(Q_1, \ldots, Q_q)$ régulière et des $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ tels que:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= P_1 \\
Q_2 &= P_2 + a_{2,3}P_3 + \cdots + a_{2,q}P_q \\
Q_3 &= P_3 + a_{3,4}P_4 + \cdots + a_{3,q}P_q \\
&\vdots \\
Q_{q-1} &= P_{q-1} + a_{q-1,q}P_q \\
Q_q &= P_q
\end{aligned}$$

D'après le lemme il existe des $b_{i,j} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\begin{aligned}
P_1 &= Q_1 \\
P_2 &= Q_2 + b_{2,3}Q_3 + \cdots + b_{2,q}Q_q \\
P_3 &= Q_3 + b_{3,4}Q_4 + \cdots + b_{3,q}Q_q \\
&\vdots \\
P_{q-1} &= Q_{q-1} + b_{q-1,q}Q_q \\
P_q &= Q_q
\end{aligned}$$

I désignant l'idéal engendré par $\{P_1, \ldots, P_q\}$, on considère des $\lambda_\alpha \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha\in\mathbb{N}^q}} \lambda_\alpha P^\alpha \in I^{m+1}$. On note $A = \{\alpha \in \mathbb{N}^q \backslash |\alpha| = m \text{ et } \lambda_\alpha \neq 0\}$. En utilisant l'ordre lexicographique en partant de la gauche, on ordonne totalement A et l'on a:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{|\alpha|=m\\ \alpha\in\mathbb{N}^q}} \lambda_\alpha P^\alpha &= \lambda_\delta P^\delta + \sum_{\alpha<\delta} \lambda_\alpha P^\alpha \\
&= \lambda_\delta Q_1^{\delta_1}(Q_2 + b_{2,3}Q_3 + \cdots + b_{2,q}Q_q)^{\delta_2} \ldots (Q_{q-1} + b_{q-1,q}Q_q)^{\delta_{q-1}} Q_q^{\delta_q} \\
&+ \sum_{\alpha<\delta} \lambda_\alpha Q_1^{\alpha_1}(Q_2 + b_{2,3}Q_3 + \cdots + b_{2,q}Q_q)^{\alpha_2} \ldots (Q_{q-1} + b_{q-1,q}Q_q)^{\alpha_{q-1}} Q_q^{\alpha_q} \\
&= \lambda_\delta Q^\delta + \sum_{\alpha<\delta} \beta_\alpha Q^\alpha
\end{aligned}$$

la suite $(Q_1, \ldots, Q_q)$ étant régulière et engendrant l'idéal I on a : $\lambda_\delta \in I$.

En réitérant le procédé on prouve que pour tout $\alpha, \lambda_\alpha \in I$, ce qui montre que la suite $\{P_1, \ldots, P_q\}$ est quasi-régulière.

Preuve du lemme.

P_1 n'étant pas un diviseur de zéro, $\{P_1\}$ est une suite régulière. On suppose construit par induction la suite $(Q_1, \ldots, Q_p)$ régulière qui vérifie les hypothèses du lemme. Si $p < q$, soient $\mathbf{R}_p = \dfrac{\mathbb{K}[X]}{(Q_1, \ldots, Q_p)}$ et $\mathrm{Ass}(\mathbf{R}_p) = \{\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s\}$ l'ensemble des idéaux premiers associés à $\mathbf{R}_p$. L'ensemble des diviseurs de zéro de $\mathbf{R}_p$ est $\bigcup_{1\le i\le s} \mathfrak{P}_i$.

Soit I_p l'idéal de $\mathbf{R}_p$ engendré par les images dans $\mathbf{R}_p$ de $P_{p+1}, \ldots, P_q$. On a $I_p \not\subset \bigcup_{1\le i\le s} \mathfrak{P}_i$. Sinon, I étant engendré par $Q_1, \ldots, Q_p, P_{p+1}, \ldots, P_q$, tout élément de I serait un diviseur de 0 dans $\mathbf{R}_p$ et la suite régulière $(Q_1, \ldots, Q_p)$ ne pourrait pas être complétée en une suite régulière de I de longueur q. Ceci est contradictoire lorsque $p < q$.

Par suite il existe $(a_{p+1}, \ldots, a_q) \in \mathbb{K}^{q-p}$ tel que:

$$(a_{p+1}P_{p+1} + \cdots + a_qP_q) \notin \bigcup_{1\le i\le s} \mathfrak{P}_i$$

En effet, pour $1 \le i \le s$, soit V_i est le sous espace-vectoriel de $\mathbb{K}^{q-p}$ engendré par les éléments $(b_{p+1}, \ldots, b_q) \in \mathbb{K}^{q-p}$ tels que $(b_{p+1}P_{p+1} + \cdots + b_qP_q) \in \mathfrak{P}_i$. On a $\dim_{\mathbb{K}} V_i < q - p$, sinon en formant un système de Cramer on obtiendrait que $\{P_{p+1}, \ldots, P_q\} \subset \mathfrak{P}_i$. Par conséquent, $\mathbb{K}$ étant un corps infini, $\bigcup_{1\le i\le s} V_i \neq \mathbb{K}^{q-p}$. (Pour tout i il existe une forme linéaire ρ_i tel que $V_i \subset \ker \rho_i$. Si $(e_1, \ldots, e_{q-p})$ est une base de $\mathbb{K}^{q-p}$, on définit les polynômes $\psi_i(X) = \sum_{j=1}^{q-p} \rho_i(e_j)X_j$ et $F(X) = \prod_{i=1}^{s} \psi_i(X)$. $F(X)$ n'étant pas nul et $\mathbb{K}$ un corps infini, il existe $(a_{p+1}, \ldots, a_q) \in \mathbb{K}^{q-p}$ tel que $F(a_{p+1}, \ldots, a_q) \neq 0$, par conséquent $(a_{p+1}, \ldots, a_q) \notin \bigcup_{1\le i\le s} V_i$.)

Pour $(a_{p+1}, \ldots, a_q) \notin \bigcup_{1\le i\le s} V_i$ on a:

$$(a_{p+1}P_{p+1} + \cdots + a_qP_q) \notin \bigcup_{1\le i\le s} \mathfrak{P}_i$$

Quitte à réindexer $P_{p+1}, \ldots, P_q$ on peut supposer que $a_{p+1} = 1$, on pose alors:

$$Q_{p+1} = P_{p+1} + a_{p+2}P_{p+2} + \cdots + a_qP_q$$

Par construction $Q_{p+1} \notin \bigcup_{1 \leq i \leq s} \mathfrak{P}_i$.

On a montré que Q_{p+1} n'est pas diviseur de 0 dans le quotient $\mathbf{R}_p$, donc la suite $(Q_1, \ldots, Q_{p+1})$ est régulière , ce qui prouve le lemme par induction.

BIBLIOGRAPHIE

[A - Y] L.A. AĬZENBERG, A.P. YUZHAKOV,, *Integral representations and residues in multidimensional complex analysis*, American Mathematical Society, 1983.

[A -C] E. AKYILDIZ, J.B. CARREL, *Zeros of holomorphic vectors fields and the Gysin homomorphism, Singularities*, (Proc. Symp. in Pure Math.,vol.40, part 1) Amer.Math . Soc., Providence, 1983.

[A -K] A. ALTMAN, S. KLEIMAN, *Introduction to Grothendieck Duality Theory*, Springer-Verlag, Lecture Notes in mathématics, N^0 146, 1970.

[A -L] B. ANGENIOL, M. LEJEUNE-JALABERT, *Calcul différentiel et classes caractéristiques en géométrie algébrique*, Hermann, Travaux en cours 38.

[A - M] M. F. ATIYAH, L. G. MACDONALD,, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[Be] A. BEAUVILLE,, *Une notion de résidu en géométrie analytique.*, Springer-Verlag, Lecture Notes in mathématics, N^0 205, 1971, pp 183-203.

[B-C-R-S] E. BECKER, J.P CARDINAL, M.F ROY, Z. SZAFRANIEC, *Multivariate Bezoutien, Kronecker symbol and some applications to real geometry.*, Effective Methods in Algebraic Geometry (MEGA), Progress in Math. Birkhäuser, 1994.

[B-G-V-Y] C. A. BERENSTEIN, R. GAY, A. VIDRAS, A. YGER, *Residue Currents and Bezout Identities.*, Birkhäuser Verlag, Progress in mathematics Volume 114, 1993.

[B-Y $_1$] C. A. BERENSTEIN, A. YGER, *A formula of Jacobi and its consequences* (1991), Annales de l'Ecole Normale Superieure, 24, 363-377.

[B-Y $_2$] C. A. BERENSTEIN, A. YGER, *Effective Bezout identities in* $\mathbb{Q}[z_1, \ldots, z_n]$ (1991), Acta. Math. 166, 69-120.

[B-Y $_3$] C. A. BERENSTEIN, A. YGER, *Residue Calculus and Effective Nullstellensatz* (1998), American Journal of Mathematics 121.

[B_1] N. BOURBAKI, *Algèbre . chap.1 à 3*, Hermann, 1961.

[B_2] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative. chap.1 à 4*, Hermann, 1961.

[B_3] N. BOURBAKI, *Algèbre . chap.10, Algèbre homologique*, Masson, 1980.

[B_4] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative. chap.10*, Masson, 1998.

[Boy] J.-Y BOYER, *Résidus algébriques et résidus analytiques dans le cas des intersections complètes.* (1996), Prépublication n^0 27, Université de Bordeaux I.

[B-H $_1$] J.-Y. BOYER, M. HICKEL, *Une généralisation de la loi de transformation pour les résidus* (1997 p. 315-335), Bull. Soc. math. France 125.

[B-H $_2$] J.-Y. BOYER, M. HICKEL, *Extension dans un cadre algébrique d'une formule de Weil.* (1998), à paraître dans Manuscripta Mathematica.

[Br-He] W. BRUNS, J. HERZOG,, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge studies in advanced mathematics 39, 1993.

[C-P] P. CASSOU-NOGUES, A. PLOSKI, *Un théorème des zéros effectif* (1996), Bull. Pol. Ac. Math., 44, 61-70.

[C] B. CHABAT, *Introduction à l'analyse complexe*, tome 2 Traduction française, Edition Mir Moscou, 1990.

[C-D-S] E. CATTANI, A. DICKENSTEIN, B. STURMFELS, *Computing multidimentional residues* (1996), Progress in Mathematics, Vol. 143, 135-164, Birkhäuser.

[C-D] E. CATTANI, A. DICKENSTEIN, *A global view of residues in the torus* (1997), Journal of Pure and Applied Algebra 117-118, pp. 119-144.

[D-S $_1$] A. DICKENSTEIN, C. SESSA, *Canonical representatives in moderate cohomologie* (1986), Inventiones Math, 417-434.

[D-S $_2$] A. DICKENSTEIN, C. SESSA, *Résidus de formes méromorphes et cohomologie modérée* (1994), Prepublications mathématiques de l'U.R.A 212 "Théories Géométriques" N^{0}77, Université de Paris 7.

[D-S $_3$] A. DICKENSTEIN, C. SESSA, *Duality methods for the membership problem* (1991), Proceedings MEGA-90, Progress in Math. 94, 89-103 Birkhäuser.

[E-M] M. ELKADI, B. MOURRAIN, *Approche effective des résidus algébriques* (mai 1996), INRIA, Rapport de recherche N^0 2884.

[E] D. EISENBUD,, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 150, 1996.

[El] M. ELKADI, *Résidu de Grothendieck et forme de Chow*, Publicacions Matemàtiques, Vol 38 (1994),381-393..

[F-P-Y] A. FABIANO, G. PUCCI, A. YGER, *Effective Nullstellensatz and geometric degree for zero-dimensional ideals*, Acta Arithmetica, 78 (2), 1996.

[G-S] S. GRECO, P. SALMON, *Topics in m-adic topologies*, Springer-Verlag, 1971.

[G-H] P. GRIFFITHS, J. HARRIS, *Principles of Algebraic Geometrie*, J. Willey & Sons, 1978.

[Ha] R. HARTSHORNE, *Residues and duality*, Springer-Verlag, Lecture Notes in mathématics, N^0 20, 1966.

[He] M. HERVÉ, *Intégrale d'André WEIL*, Séminaire H. Cartan: Fonction analytiques de plusieurs variables complexes t. 4, Exposé 6, 1951-52.

[Ho] G. HOPKINS, *An algebraic approach to Grothendieck's residue symbol* (1983, 511-537), Trans. Amer.Math. Soc. 275, 2 , Boston.

[Hu] R. HüBL, *Traces of Differentials Forms and Hochschild Homology*, Springer-Verlag, Lecture Notes in mathématics, N^0 1368, 1989.

[H-K $_1$] R. HüBL, E. KUNZ, *Integration of differential forms on schemes* (1990), Journal für die reine und angewandte Mathematik (410, pp 53-83).

[H-K $_2$] R. HüBL, E. KUNZ, *Regular differential forms and duality for projective morphisms* (1990), Journal für die reine und angewandte Mathematik (410, pp 84-108).

[K-K] M. KREUZER, E. KUNZ, *Traces in strict Frobenius algebras and strict complete intersections* (1987), Journal für die reine und angewandte Mathematik (381, pp 181-204).

[J] J.-P. JOUANOLOU, *Le formalisme du résultant* (1991), Advances in Math., 90, 117-263.

[Ku $_1$] E. KUNZ, *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry.*, Birkhäuser, Boston, 1985.

[Ku $_2$] E. KUNZ, *Kähler Differentials*, Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 1986.

[K-W$_2$] E. KUNZ, R. WALDI, *Regular differential forms via Hochschild homologie*, Cont. Math. vol.79, AMS, Providence, 1989.

[K] A. M. KYTMANOV, *A transformation formula for Grothendieck residues and some of its applications* (1989), Siberian Math. Journal, 495–499.

[L-T] M. LEJEUNE-JALABERT, B. TEISSIER, *Cloture intégrale des idéaux et équisingularité*, Publications de l'institut Fourier, F38402, St Martin d'Hères, 1975.

[La] J.P. LAFON, *Algèbre commutative*, Hermann, Collection enseignement des sciences, 1977.

[L] J. LIPMAN, *Residues and traces of differential forms via Hochschild homologie*, Cont. Math. vol.61, AMS, Providence, 1987.

[Li] J. LIPMAN, *Dualizing sheaves, differentials and residues on algebraic varieties*, Astérisque N^0 117, 1984.

[Loe] F. LOESER, *Rappels sur le résultant* (1989), Notes non publiées.

[Lo] S. ŁOJASIEWICZ, *Introduction to Complex Analytic Geometry*, Birkhäuser Verlag, 1991.

[Lom] V.G. LOMADZE, *On residues in algebraic geometry*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 45 (1981), 1258-1287; English trans. in Math. USSR Ivz. 19 (1982) N^0 3, 495-520.

[Mac] F. S. MACAULAY, *The Algebraic Theory of Modular Systems*, Cambridge University Press, 1916.

[Ma] S. MACLANE, *Homology*, Springler-Verlag, 1975.

[M$_1$] H. MATSUMURA, *Commutative algebra (sec.ed.)*, Benjamin, Reading Mass., 1980.

[M$_2$] H. MATSUMURA, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Adv. Math. 8, Cambridge University Press, 1989.

[N] M. NAGATA, *Local Rings*, J. Willey & Sons, 1962.

[Pa] A.N. PARSHIN, *On the arithmetic of two dimensional schemes. I. Distributions and residues*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 40 N^0 4 (1976), 736-773; English trans. in Math. USSR Ivz. 10 (1976) N^0 4, 695-729.

[Pe] O. PERRON, *Algebra I (Die Grundlagen)* (1932), Göschens Lehrbucherei, Berlin und Leipzig.

[P] A. PLOSKI, *On the growth of proper polynomial mappings* (1985), Annales Polonici Mathematici 45, 297-309.

[Sa] P. SAMUEL, *Méthodes d'algébre abstraite en géométrie algébrique*, Springer-Verlag, 1955.

[S-S $_1$] G. SCHEJA , U. STORCH, *Über Spurfunktionen bei Vollständigen Durchschnitten* (1975), J. reine angew. Math. 278/279,174-190.

[S-S $_2$] G. SCHEJA , U. STORCH, *Residuen bei Vollständigen Durchschnitten* (1979), Math. Nachr. 91,157-170.

[S] J.-P. SERRE, *Algèbre locale. Multiplicités*, Springer-Verlag, Lecture Notes in mathématics, N^0 11, 1965.

[St]J.-R STROOKER, *Homological questions in local algebra.*, London Mathematcal Society, Lecture Note Series 145, 1990.

[Te] B. TEISSIER, *Résultats récents d'algèbre commutative effective; Semminaire Bourbaki*, Astérisque N^0 189-190, p. 107-131, 1990.

[Ton] Y.L. TONG, *Integral representation formulae and Grothendieck residue symbol* (1973), Amer. J. Math. 95 pp 904-917.

[To] J. C. TOUGERON, *Idéaux de fonctions différentiables*, Spinger Verlag, 1972.

[T] A. TSIKH, *Multidimensionnal residues and applications*; Translations of Mathematical Monograph, American Mathematical Society, 1992.

[W] A. WEIL, *L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables*, Math. Annalen, III, 1935, pp. 178-182.

[Ye] A. YEKUTIELY, *An explicit construction of the Grothendieck residue complex*, Astérisque N^0 208, 1992.

[Y] A. YGER, *Courants résidus et applications* (1994), Publications de l'Ecole Doctorale de Mathématiques de Bordeaux.

[Z-S] O. ZARISKI , P. SAMUEL, *Commutative Algebra, volume 2*, The University Series In Higher Mathematics, 1958.