

Table des matières

1	Séries de Fourier	1
1.1	Série de Fourier d'une fonction périodique	2
1.2	Principales propriétés des séries de Fourier	7
1.2.1	Théorème de Lebesgue	7
1.2.2	Théorème de Fejer	8
1.2.3	Théorème de Dirichlet	8
1.2.4	Théorème de Plancherel-Parseval	10
2	Equation des ondes : l'exemple d'une corde vibrante	13
2.1	L'équation des ondes	13
2.2	Corde vibrante à extrémités fixes	14
3	Equation de la chaleur	19
3.1	L'équation de la chaleur	19
3.2	Diffusion de la chaleur dans une barre	19
4	(à suivre) Equations des ondes et de la chaleur sous Mupad et Matlab	25

Chapitre 1

Séries de Fourier

On considère ici des fonctions définies sur \mathbb{R} , à valeurs réelles ou complexes, qui sont périodiques de période T . Si on pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$, on a parmi les fonctions périodiques des fonctions très particulières, appelées **polynômes trigonométriques**. Ce sont les fonctions de la forme

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^p [\alpha_n \cos(n\omega t) + \beta_n \sin(n\omega t)], \quad (1.1)$$

où $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{C}$.

Si f est périodique de période T et continue par morceaux sur \mathbb{R} , on peut associer de manière naturelle à f une **série trigonométrique formelle** de la forme

$$S(f)(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [\alpha_n \cos(n\omega t) + \beta_n \sin(n\omega t)],$$

appelée **série de Fourier** de f . Les liens entre la fonction f et sa série de Fourier, ou, en d'autres termes, la possibilité d'approcher la fonction f par les polynômes trigonométriques formés par les sommes partielles de sa série de Fourier, sont l'objet de ce Chapitre. Les phénomènes de convergence sont subtils : quand f est continue, c'est la "moyenne de Cesaro" des sommes partielles de la série de Fourier de f qui converge vers f , voir le théorème de Fejer, et quand f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge pour tout t vers la demi-somme des limites à droite et à gauche de f en t , voir le théorème de Dirichlet. Enfin la bonne notion de convergence pour les séries de Fourier est la convergence en **moyenne quadratique**, donnée par le théorème de Plancherel-Parseval. Afin de faciliter l'accès à ces résultats, d'un intérêt fondamental en Physique (les séries de Fourier ont été inventées par Fourier pour étudier l'équation de la chaleur), nous les donnons ici sans démonstration, en les illustrant par deux exemples. On trouvera les démonstrations dans le **Cours d'Analyse**, accessible sur le site de l'ESTIA.

1.1 Série de Fourier d'une fonction périodique

On dit qu'une fonction est **continue par morceaux** sur \mathbb{R} si f admet une limite à droite et à gauche en tout point et si f n'admet qu'un nombre au plus fini de points de discontinuité sur tout intervalle fermé borné de \mathbb{R} . Dans ce cas on peut calculer $\int_a^b f(x)dx$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.

Définition 1.1.1 Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} . On dit que f est périodique de période T s'il existe $T > 0$ tel que $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dans ce cas on dit que T est une période de f .

Notons que si T est une période de f , alors nT est aussi une période de f pour tout $n \geq 1$. D'autre part si f est périodique de période T alors f est continue par morceaux sur \mathbb{R} si et seulement si f est continue par morceaux sur $[0, T]$, c'est à dire si et seulement si f admet un nombre au plus fini de discontinuités sur $[0, T]$ et admet une limite à droite en 0, une limite à gauche en T , et une limite à droite et à gauche en tout $x \in [0, T]$.

Supposons f continue par morceaux et périodique de période T , et soit $a \in \mathbb{R}$. Un calcul élémentaire donne

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Définition 1.1.2 Soit f une fonction périodique de période T continue par morceaux sur \mathbb{R} . On pose

$$a_0(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt,$$

et pour $n \geq 1$, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt,$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt.$$

Les nombres ci-dessus sont appelés les **coefficients de Fourier** et on définit la **série de Fourier** de f par la formule

$$S(f)(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)].$$

En physique le nombre ω est appelé la *pulsation*, $a_1(f)\cos(\omega t) + b_1(f)\sin(\omega t)$ est appelé le *terme fondamental* et $a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)$ est appelé la n^e *harmonique*, ou *harmonique de rang n* .

D'autre part, si f est à valeurs réelles, on peut poser $\rho_n(f) = \sqrt{a_n^2(f) + b_n^2(f)}$. Il existe alors $\phi_n(f) \in [0, 2\pi[$ tel que $a_n = \rho_n(f)\cos(\phi_n(f))$, $b_n(f) = \rho_n\sin(\phi_n(f))$. Avec la convention $\rho_0(f) = |a_0(f)|$, $\phi_0(f) = 0$ si $a_0(f) > 0$, $\phi_0(f) = \pi$ si $a_0(f) < 0$, la série de Fourier de f s'écrit alors sous la forme

$$S(f)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n(f)\cos(n\omega t - \phi_n(f)).$$

Le nombre $\rho_n(f)$ est appelé en Physique *l'amplitude d'ordre n* , tandis que $\phi_n(f)$ est appelé la *phase d'ordre n* . Notons que cette phase est indéterminée si $\rho_n(f) = 0$.

Signalons qu'il n'y a a priori aucune raison pour que la série de Fourier de f soit convergente, et ceci est d'ailleurs faux si on suppose seulement que f est continue par morceaux, ou même que f est continue. Notons également que $\cos(n\omega(t+T)) = \cos(n\omega t + 2\pi n) = \cos(n\omega t)$ et de même $\sin(n\omega(t+T)) = \sin(n\omega t + 2\pi n) = \sin(n\omega t)$, donc les fonctions intervenant dans la série de Fourier d'une fonction périodique de période T sont également des fonctions périodiques de période T . On a l'observation élémentaire suivante.

Proposition 1.1.3 *Soit f une fonction périodique continue par morceaux sur \mathbb{R} .*

- (i) *Si f est paire, alors $b_n(f) = 0$ pour $n \geq 1$.*
- (ii) *Si f est impaire, alors $a_n(f) = 0$ pour $n \geq 0$.*

Exemple 1.1.4 1) *Soit f la fonction paire, périodique de période 2π vérifiant $f(t) = 1$ si $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $f(t) = 0$ si $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Alors f est continue par morceaux sur \mathbb{R} , et la série de Fourier de f est donnée par la formule*

$$S(f)(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos((2n+1)t) \quad (1.3)$$

2) *Soit g la fonction périodique de période 2π vérifiant $g(t) = t$ si $t \in [0, \pi]$, $g(t) = 2\pi - t$ si $t \in [\pi, 2\pi]$. Alors g est continue sur \mathbb{R} , et la série de Fourier de g est donnée par la formule*

$$S(g)(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)t)}{(2n+1)^2} \quad (1.4)$$

En effet f est continue en t si $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, f admet une limite à droite nulle et une limite à gauche égale à 1 en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour k entier relatif pair, et f admet une limite à gauche nulle et une limite à droite égale à 1 en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour k entier relatif impair.

Comme f est paire, on a $b_n(f) = 0$ pour $n \geq 1$. D'autre part

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{1}{2}.$$

Pour $n \geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(nt) dt \\ &= \left[\frac{\sin(nt)}{\pi n} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2 \sin(\frac{n\pi}{2})}{\pi n}. \end{aligned}$$

Si n est pair, ceci donne $a_n(f) = 0$. Si $n = 2m + 1$ est impair, on a $\sin(\frac{n\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} + m\pi) = (-1)^m$, et on obtient la série de Fourier de f .

Considérons maintenant la fonction g . Pour $t \in [0, \pi]$, on a $g(-t) = g(2\pi - t) = 2\pi - (2\pi - t) = t = g(t)$, donc g est paire. De plus g est continue sur $[-\pi, \pi]$, et $g(\pi) = g(-\pi) = 0$, ce qui montre que g est continue sur \mathbb{R} .

Comme g est paire, on a $b_n(g) = 0$ pour $n \geq 1$. D'autre part

$$a_0(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $n \geq 1$, on obtient

$$a_n(g) = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt.$$

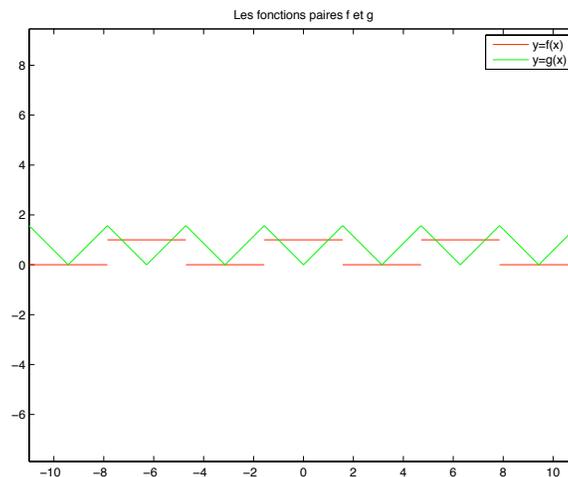
En posant $u = t$, $dv = \cos(nt)$, soit $du = dt$, $v = \frac{\sin(nt)}{n}$, on obtient, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} a_n(g) &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{t \sin(nt)}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(nt)}{n} dt = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(nt)}{n} dt \\ &= -\frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nt)}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right]. \end{aligned}$$

Si n est pair, ceci donne $a_n(g) = 0$, et si $n = 2m + 1$ est impair, on obtient $a_n(g) = -\frac{4}{(2m+1)^2}$, ce qui donne la série de Fourier de g .

On donne une représentation graphique sous Matlab de f et g .

```
x1=[-pi/2:0.01:pi/2];x2=[pi/2:0.01:3*pi/2];x3=[3*pi/2:0.01:5*pi/2];
x4=[5*pi/2:0.01:7*pi/2];
y11=ones(size(x1));y12=0*y11;
y2=abs(x1);plot(x1,y11,'red');hold on; plot(x1,y2,'green');
hold on;axis equal;
plot(x2,y12,'red',x3,y11,'red',x4,y12,'red',-x2,y12,'red',-x3,y11,'red',
-x4,y12,'red');hold on;
plot(x2,y2,'green',x3,y2,'green',x4,y2,'green',-x2,y2,'green',
-x3,y2,'green',-x4,y2,'green');
legend('y=f(x)', 'y=g(x)');title('Les fonctions paires f et g');print fig1;
```



Le résultat suivant décrit une situation, celle des " *polynômes trigonométriques*," où le calcul des coefficients de Fourier est trivial.

Proposition 1.1.5 *Supposons que f est définie pour $t \in \mathbb{R}$ par la formule*

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^p [\alpha_n \cos(n\omega t) + \beta_n \sin(n\omega t)].$$

Alors $a_n(f) = \alpha_n$ pour $0 \leq n \leq p$, $b_n(f) = \beta_n$ pour $1 \leq n \leq p$, et $a_n(f) = b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq p + 1$, de sorte que f coïncide avec la somme de sa série de Fourier.

Preuve : On a, pour $n \geq 1$,

$$\int_0^T \cos(n\omega t) dt = \left[\frac{\sin(n\omega t)}{\omega} \right]_0^T = 0, \quad (1.5)$$

$$\int_0^T \sin(n\omega t) dt = \left[\frac{-\cos(n\omega t)}{\omega} \right]_0^T = 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt = 1,$$

et on voit que $a_0(f) = \alpha_0$.

D'autre part on a, pour $n \geq 1$,

$$\frac{2}{T} \int_0^T \cos^2(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{dt}{2} + \frac{2}{T} \int_0^T \frac{\cos(2n\omega t)}{2} dt = 1, \quad (1.7)$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T \sin^2(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{dt}{2} - \frac{2}{T} \int_0^T \frac{\cos(2n\omega t)}{2} dt = 1, \quad (1.8)$$

et pour $n \geq 1$, $m \geq 1$, $m \neq n$,

$$\begin{aligned} & \frac{2}{T} \int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{\cos((m+n)\omega t) dt}{2} + \frac{2}{T} \int_0^T \frac{\cos((n-m)\omega t) dt}{2} = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt \\ &= -\frac{2}{T} \int_0^T \frac{\cos((m+n)\omega t) dt}{2} + \frac{2}{T} \int_0^T \frac{\cos((n-m)\omega t) dt}{2} = 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

Enfin pour $n \geq 1$, $m \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} & \frac{2}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) \cos(m\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{\sin((m+n)\omega t) dt}{2} + \frac{2}{T} \int_0^T \frac{\sin((n-m)\omega t) dt}{2} = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

D'autre part si g et h sont deux fonctions continues par morceaux sur \mathbb{R} , périodiques de période T , on a, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$, par linéarité de l'intégrale de Riemann

$$a_n(\alpha g + \beta h) = \alpha a_n(g) + \beta a_n(h), \quad (1.12)$$

et de même, pour $n \geq 1$,

$$b_n(\alpha g + \beta h) = \alpha b_n(g) + \beta b_n(h). \quad (1.13)$$

La proposition résulte alors immédiatement des identités ci-dessus. ♣

On a dans le même ordre d'idées le résultat suivant .

Proposition 1.1.6 *Soit $\omega > 0$, et supposons que $\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n| < +\infty$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} |\beta_n| < +\infty$. Alors la fonction f définie par la formule*

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [\alpha_n \cos(n\omega t) + \beta_n \sin(n\omega t)],$$

est bien définie, continue, périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, et on a

$$a_n(f) = \alpha_n \quad \forall n \geq 0,$$

$$b_n(f) = \beta_n \quad \forall n \geq 1.$$

1.2 Principales propriétés des séries de Fourier

1.2.1 Théorème de Lebesgue

On a le théorème suivant (dont une version plus générale est due à Lebesgue).

Théorème 1.2.1 *Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle fermé borné $[a, b]$.*

Alors $\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{ist} dt = 0$.

On en déduit le corollaire suivant

Corollaire 1.2.2 *Soit f une fonction périodique de période T , continue par morceaux sur \mathbb{R} . On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(f) = 0$.*

Ces résultats restent en fait valables pour les fonctions intégrables au sens de Lebesgue sur $[a, b]$ et pour les fonctions périodiques de période T intégrables au sens de Lebesgue sur $[0, T]$. Ce corollaire explique pourquoi les coefficients de Fourier des deux fonctions étudiées au paragraphe précédent convergent vers 0, et montre une certaine tendance des séries de Fourier à converger. La réalité est beaucoup plus subtile : il n'est pas vrai que la série de Fourier d'une fonction f continue et périodique sur \mathbb{R} converge simplement vers f , ou même converge simplement.

1.2.2 Théorème de Fejer

Pour les fonctions continues périodiques, on a le résultat suivant, dû à Fejer (de même que plus haut, on pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$ pour $T > 0$).

Théorème 1.2.3 *Soit f une fonction périodique de période T , continue sur \mathbb{R} . Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $S_0(f)(t) = a_0(f)$,*

$$S_p(f)(t) = a_0(f) + \sum_{n=0}^p [a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)],$$

pour $p \geq 1$, et, pour $p \geq 0$,

$$\sigma_p(f)(t) = \frac{1}{p+1} \sum_{m=0}^p S_m(f)(t).$$

Alors la suite $(\sigma_p(f))_{p \geq 0}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} , c'est à dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\sigma_p(f)(t) - f(t)| = 0$.

Ce résultat peut en particulier s'appliquer à la deuxième fonction étudiée à l'exemple précédent.

1.2.3 Théorème de Dirichlet

Définition 1.2.4 *Soit f une fonction périodique de période T sur \mathbb{R} . On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} quand les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) f est continue par morceaux sur \mathbb{R} .

(ii) f est dérivable sur $[0, T]$ privé d'un ensemble vide ou fini, et f' admet une limite à droite en 0, une limite à gauche en T , et une limite à droite et à gauche en tout $t \in]0, T[$.

Une vérification de routine montre que pour que la condition (ii) soit vérifiée il faut et il suffit qu'elle soit vérifiée sur un intervalle quelconque de la forme $[a, a+T]$, avec $a \in \mathbb{R}$.

On a le théorème de Dirichlet.

Théorème 1.2.5 Soit f une fonction périodique de période T , de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} . Pour $t \in \mathbb{R}$, notons $f^+(t)$ la limite à droite de f en t et $f^-(t)$ la limite à gauche de f en t .

Alors la série de Fourier de f converge pour tout $t \in \mathbb{R}$, et on a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)] = \frac{f^+(t) + f^-(t)}{2}.$$

Exemple 1.2.6 1) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos((2n+1)t)$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$, et on a, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos((2n+1)t) = \frac{\pi}{4} \quad \forall t \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos((2n+1)t) = -\frac{\pi}{4} \quad \forall t \in]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi[.$$

2) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)t)}{(2n+1)^2}$ converge sur $[-\pi, \pi]$ vers $\frac{\pi}{8}(\pi - 2|t|)$. En particulier

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (1.14)$$

En effet considérons la fonction f introduite plus haut, qui est égale à 1 pour $t \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$ et à 0 pour $t \in]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi[$. Cette fonction est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, car sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. on a donc

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos((2n+1)t) = 1 \quad \forall t \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[,$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos((2n+1)t) = 0 \quad \forall t \in]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi[,$$

ce qui donne les résultats du premier exemple ci-dessus. Notons que si $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\frac{f^+(t)+f^-(t)}{2} = \frac{1}{2}$, et on déduit du théorème de Dirichlet que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos((2n+1)t) = 0$. Mais ceci est évident car dans ce cas $\cos((2n+1)t) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Notons également qu'en appliquant la formule ci-dessus pour $t = 0$, on obtient

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Considérons maintenant la fonction g introduite plus haut, qui est définie par la formule $g(t) = |t|$ pour $|t| \leq \pi$, et qui est périodique de période 2π . Comme la restriction de g à chacun des intervalles $[-\pi, 0]$ et $[0, \pi]$ est de classe \mathcal{C}^1 , on voit que la série de Fourier de g converge vers g sur $[-\pi, 0] \cup [0, \pi] = [-\pi, \pi]$, et par périodicité on voit que la série de Fourier de g converge vers g sur \mathbb{R} . Pour $|t| \leq \pi$, on obtient,

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)t)}{(2n+1)^2} = |t|,$$

ce qui donne bien $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)t)}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{8}(\pi - 2|t|)$.

En appliquant cette formule pour $t = 0$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(2m)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

On obtient $\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, et finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}.$$

1.2.4 Théorème de Plancherel-Parseval

Nous abordons maintenant la dernière façon d'étudier la convergence des séries de Fourier, la convergence en moyenne quadratique. On a le résultat suivant (dont on peut donner une forme plus générale, valable pour les fonctions périodiques de période T qui sont de carré intégrable sur $[0, T]$, dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue), la notation $S_p(f)(t)$ désignant comme plus haut la somme partielle de Fourier $a_0(f) + \sum_{n=1}^p [a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)]$.

On a alors la célèbre formule de Parseval.

Théorème 1.2.7 *Soit f une fonction périodique de période T , continue par morceaux sur \mathbb{R} .*

On a alors

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^T |f(t) - S_p(f)(t)|^2 dt = 0. \quad (1.15)$$

De plus les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(f)|^2$ sont convergentes, et on a

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = |a_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2}{2}. \quad (1.16)$$

En appliquant la première formule ci-dessus à la fonction f introduite plus haut, on obtient

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{1}{2},$$

et on pourrait utiliser cette formule pour retrouver le fait que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Appliquons maintenant cette formule à la fonction g introduite plus haut. On obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)^2 dt = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(2n+1)^4}.$$

On a $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = 2 \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^3}{3}$, et on obtient,

$$\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12},$$

et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}. \quad (1.17)$$

D'autre part $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$, donc $\frac{15}{16} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$, et on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad (1.18)$$

Chapitre 2

Equation des ondes : l'exemple d'une corde vibrante

2.1 L'équation des ondes

La propagation des ondes est un phénomène qui décrit l'évolution d'une onde (par exemple une onde acoustique), ou le mouvement d'une particule dans le temps ou dans l'espace. Ceci concerne aussi bien le son que la lumière et les champs électromagnétiques, et une onde peut être une fonction à valeurs scalaires

$$u : (x_1, \dots, x_n, t) \rightarrow u(x_1, \dots, x_n, t),$$

ou à valeurs vectorielles

$$\vec{U} : (x_1, \dots, x_n, t) \rightarrow \vec{U}(x_1, \dots, x_n, t).$$

Dans tous les cas on travaille sur un ouvert $\Omega \times I$ de l'espace temps $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, où Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^n et I un intervalle de \mathbb{R} . Comme le cas d'une onde vectorielle à valeurs dans un espace de dimension p se ramène à une famille de p ondes scalaires, nous ne discutons ici que le cas scalaire. L'équation des ondes homogène est l'équation

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{1}{v} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1, \dots, x_n, t). \quad (2.1)$$

On ajoute évidemment des conditions qui peuvent concerner la valeur de u à la frontière $\partial\Omega$ de Ω (conditions de Dirichlet) ou de sa dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ sur $\partial\Omega$ (conditions de Neumann) et on doit pouvoir disposer de données initiales. La quantité v représente la *célérité* de l'onde considérée.

2.2 Corde vibrante à extrémités fixes

On considère une corde de longueur L , que l'on fait vibrer. On note μ la *densité linéaire* de la corde (qui s'exprime en kg/m) et T la *tension* de la corde (qui s'exprime en Newtons). Ici $u(x, t)$ représente l'ordonnée du point de la corde d'abscisse x à l'instant t (on suppose que la corde vibre dans un plan xOy et que ses extrémités O et A ont pour coordonnées $(0, 0)$ et $(0, L)$). On a alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 0, \quad (2.2)$$

où la célérité V est donnée par la formule $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

On cherche des solutions de la forme $u(x, t) = f(x)g(t)$. On obtient

$$g(t)f''(x) = \frac{1}{V^2}f(x)g''(t), \quad \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{V^2} \frac{g''(t)}{g(t)} = k$$

où k désigne une constante, puisque elle ne dépend ni de x ni de t . On obtient

$$f''(x) = kf(x), \quad g''(t) = kV^2g(t).$$

On doit avoir $k < 0$ si f n'est pas la fonction nulle. En effet si $k > 0$ on aurait $f(x) = \alpha e^{\sqrt{k}x} + \beta e^{-\sqrt{k}x}$, qui ne s'annule en 0 et L que si $\alpha = \beta = 0$, et si $k = 0$ on aurait $f(x) = a + bx$, qui ne s'annule en 0 et L que si $a = b = 0$. Donc on a $k = -\omega^2$, avec $\omega > 0$, ce qui donne

$$f''(x) + \omega^2 f(x) = 0, \quad g''(t) + \omega^2 V^2 g(t) = 0.$$

On obtient $f(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$. Les conditions $f(0) = f(L \frac{n}{L} \pi) = 0$ donnent $a = 0$, $\omega = \frac{n}{L} \pi$, et on obtient

$$u(x, t) = f(x)g(t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(\alpha \cos\left(\frac{nV\pi t}{L}\right) + \beta \sin\left(\frac{nV\pi t}{L}\right) \right).$$

On admettra le résultat suivant

Théorème 2.2.1 *Les oscillations d'une corde de densité linéaire μ (exprimée en kg/m), soumise à la tension T (exprimée en Newtons) et dont les extrémités sont fixes sont données par la formule*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha_n \cos\left(\frac{nV\pi t}{L}\right) + \beta_n \sin\left(\frac{nV\pi t}{L}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.3)$$

où la **vélocité** V est donnée par la formule $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

On a alors

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nV\pi}{L} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Pour obtenir les coefficients $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ et $(\beta_n)_{n \geq 1}$, il suffit donc de considérer $u(x, 0)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ comme des fonctions périodiques de période $2L$ et de calculer leurs coefficients de Fourier. On considère par exemple le cas où $L = 2$, $T = 4$, $\mu = 1$. On a $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 2$, et on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 0. \quad (2.4)$$

On suppose maintenant que $u(x, 0) = \sin(3\pi x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin(\pi x) \cos^2(2\pi x)$. On a

$$\begin{aligned} \cos^2(2\pi x) &= \frac{1 + \cos(4\pi x)}{2}, \\ \sin(\pi x) \cos^2(2\pi x) &= \frac{\sin(\pi x)}{2} - \frac{\sin(\pi x) \cos(4\pi x)}{2} = \frac{\sin(\pi x)}{2} - \frac{\sin(3\pi x) - \sin(5\pi x)}{4} \\ &= \frac{\sin(\pi x)}{2} - \frac{\sin(3\pi x)}{4} + \frac{\sin(5\pi x)}{4}. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos(n\pi t) + \beta_n \sin(n\pi t)) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \\ \sin(3\pi x) = u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \\ \frac{\sin(\pi x)}{2} - \frac{\sin(3\pi x)}{4} + \frac{\sin(5\pi x)}{4} = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nV\pi}{L} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\pi \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right). \end{aligned}$$

Les développements en série de Fourier de $u(x, 0)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$, considérées comme des fonctions impaires périodiques de période $2L = 4$ sur \mathbb{R} , étant uniques, on obtient

$$\alpha_n = 0 \text{ pour } n \neq 6, \alpha_6 = 1,$$

$$\beta_n = 0 \text{ pour } n \neq 2, n \neq 6, n \neq 10, \beta_2 = \frac{1}{4\pi}, \beta_6 = -\frac{1}{24\pi}, \beta_{10} = \frac{1}{40\pi},$$

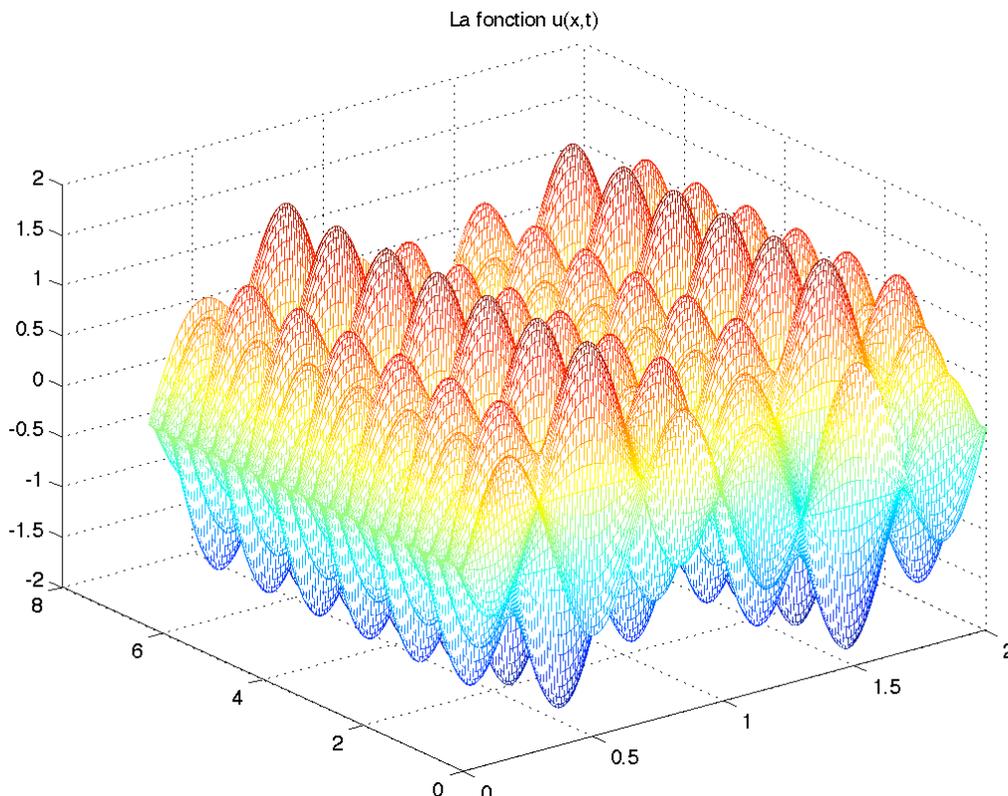
$$u(x, t) = \frac{\sin(2\pi t)\sin(\pi x)}{4\pi} + \cos(6\pi t)\sin(3\pi x) - \frac{\sin(6\pi t)\sin(3\pi x)}{24\pi} + \frac{\sin(10\pi t)\sin(5\pi x)}{40\pi}.$$

On va illustrer ces résultats sous Matlab. On introduit la fonction de deux variables ci-dessus dans une "M - file" nommée *u*

```
function z=u(x,t)
z=sin(2*pi*t).*sin(pi*x)+cos(6*pi*t).*sin(3*pi*x)
-(1/(24*pi))*sin(6*pi*t).*sin(3*pi*x)
+(1/(40*pi))*sin(10*pi*t).*sin(5*pi*x)
```

On peut alors visualiser $u(x, t)$ comme une fonction des deux variables x et t :

```
X=[0:0.01:2]; T=[0:0.01:2*pi]; [x,t]=meshgrid(X,T);
mesh(x, t, u(x,t)); hold on; title('La fonction u(x,t)');
print -depsc onde
```



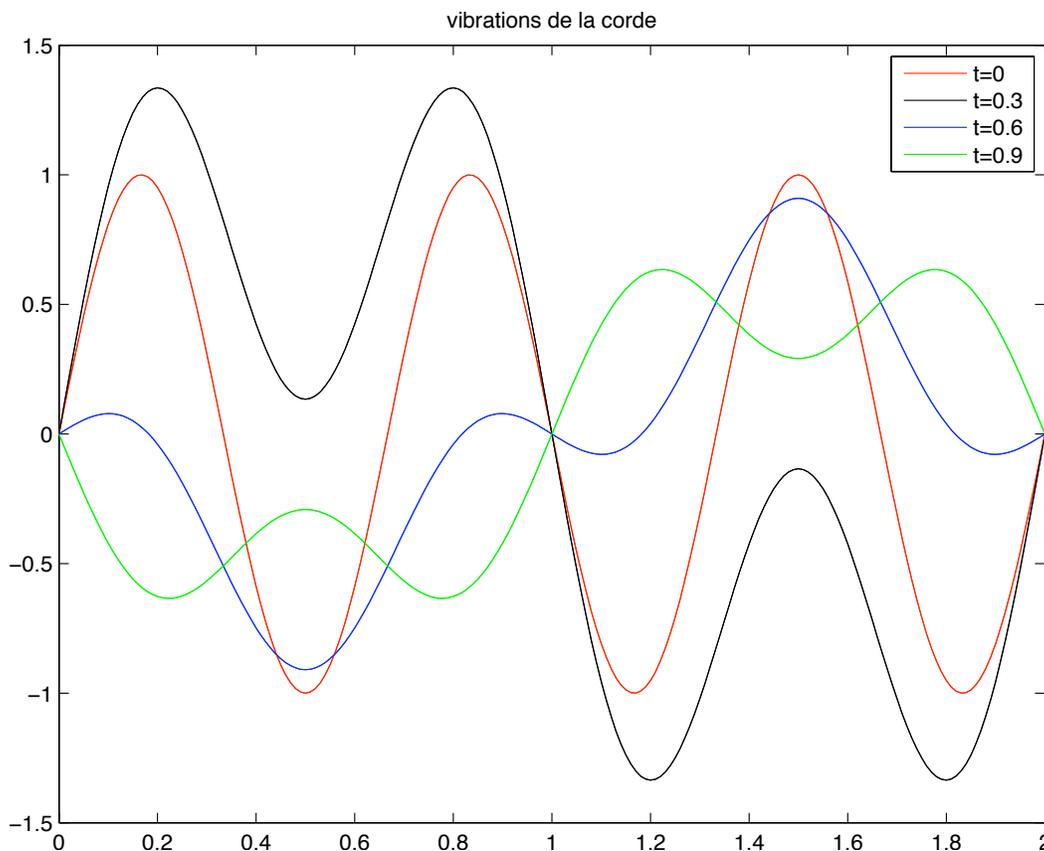
On va maintenant visualiser les vibrations de la corde pour $t = 0$, $t = 0.3$, $t = 0.6$, $t = 0.9$. On notera que pour $t = 1$ on retrouverait le même résultat que pour $t = 0$.

On crée une M-file pour pouvoir donner à t différentes valeurs dans $u(x, t)$.

```
function z=vibration(a,B);
b=B*ones(size(a));
z=sin(2*pi*b).*sin(pi*a)+cos(6*pi*b).*sin(3*pi*a)-(1/(24*pi))*sin(6*pi*b).*s
+(1/(40*pi))*sin(10*pi*b).*sin(5*pi*a);
```

On représente les résultats sous Matlab.

```
x=[0:0.01:2];z0=vibration(x,0);z1=vibration(x,0.3);z2=vibration(x,0.6);z3=v
plot(x,z0,'red');hold on;plot(x,z1,'black');hold on; plot(x,z2,'blue');hold
legend('t=0','t=0.3','t=0.6','t=0.9');
title('vibrations de la corde');
print -depsc vibcorde
```



Voici une animation permettant de visualiser les vibrations.

```
x=[0:0.01:2];for k = 1:300
plot(x,vibration(x,k*0.01),'red')
axis([0 2 -2 2])
M(k) = getframe;
end
```

On sait que si f est impaire et périodique de période M , ses coefficients de Fourier sont données par les formules

$$a_n(f) = 0 \text{ pour tout } n \geq 0, \quad b_n(f) = \frac{2}{M} \int_{-M/2}^{M/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{M}\right) dx$$

$$= \frac{4}{M} \int_0^{M/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{M}\right) dx \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Compte tenu de l'unicité du développement en série de Fourier, on obtient pour $n \geq 1$ dans le cas général d'une barre homogène dont les extrémités sont maintenues à température nulle les formules suivantes

$$\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (2.5)$$

$$\beta_n = \frac{2}{nV\pi} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (2.6)$$

Chapitre 3

Equation de la chaleur

3.1 L'équation de la chaleur

On s'intéresse ici à l'évolution de la température $\theta(x_1, \dots, x_n, t)$ au point (x_1, \dots, x_n) d'un ouvert ω de \mathbb{R}^n à l'instant t . On aboutit à une équation du type

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(x_1, \dots, x_n, t) = \alpha \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2}(x_1, \dots, x_n, t), \quad (3.1)$$

et on peut comme pour l'équation des ondes considérer des conditions de Dirichlet ou des conditions de Newman, et il faudra connaître aussi par exemple la distribution $\theta(x_1, \dots, x_n, 0)$ des températures à l'instant 0.

3.2 Diffusion de la chaleur dans une barre

Dans le cas de la dimension 1 on obtient

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(t, x) = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(t, x).$$

Ceci représente les variations de température dans une barre. Ici $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$, où k désigne le *coefficient de conduction thermique*, ρ la *densité volumique* et c_p le coefficient de *chaleur massique* de la barre.

On cherche des solutions élémentaires de la forme $\theta(x, t) = f(x)g(t)$, ce qui donne

$$f(x)g'(t) = \alpha g(t)f''(x).$$

On obtient

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{\alpha g(t)} = k,$$

où k désigne une constante.

On suppose maintenant la barre de longueur finie L , et on suppose que la température aux deux extrémités est nulle. Ceci correspond à la condition

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De même que plus haut, on voit que ceci implique que $k < 0$, donc $k = -\omega^2$, avec $\omega > 0$. On obtient $f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$. Les conditions $f(0) = f(L) = 0$ donnent $a = 0$, $\omega = \frac{n\pi}{L}$, ce qui donne

$$g'(t) = -\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 g(t), \quad g(t) = g(0)e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad \theta(x, t) = \beta \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}.$$

On admettra le résultat suivant.

Théorème 3.2.1 *On considère une barre homogène de longueur L , aux extrémités maintenues à température nulle.*

On pose $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$, où k désigne le coefficient de conduction thermique, ρ la densité volumique et c_p le coefficient de chaleur massique de la barre. Alors la température $\theta(x, t)$ au point d'abscisse x de la barre et à l'instant t est donnée par la formule

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

En particulier on a

$$\theta(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

et trouver les coefficients $(\beta_n)_{n \geq 1}$ revient à calculer les coefficients de Fourier de $\theta(x, 0)$, considérée comme fonction périodique impaire de période $2L$ sur \mathbb{R} .

Par exemple on suppose que $\alpha = 1$, $L = 2\pi$, $\theta(x, 0) = x(2\pi - x)$. On a

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n e^{-\frac{n^2}{4}t} \sin\left(\frac{nx}{2}\right).$$

Ici on a

$$\theta(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n}{2}x\right).$$

On prolonge $\theta(x, 0)$ en fonction impaire périodique de période 4π sur \mathbb{R} et on obtient

$$\beta_n = \frac{2}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \theta(x, 0) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(2\pi - x) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) dx.$$

On trouve sous Mupad

$$\beta_n = \frac{16 - 16(-1)^n}{n^3}.$$

Donc $\beta_n = 0$ si n est pair, $\beta_n = \frac{32}{n^3}$ si n est impair. On obtient dans ce cas

$$\theta(x, t) = 32 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(2p+1)^2}{4}t}}{(2p+1)^3} \sin\left(\frac{(2p+1)x}{2}\right).$$

```

assume(n>=1);
betan:=int(x*(2*PI-x)*sin((n/2)*x),x=0..2*PI);
>= 1
16/n^3 + (-16*cos(n*pi) - 8*n*pi*sin(n*pi))/n^3

assume(n,Type::Integer);
simplify(betan);

assume(n, Type::Integer)
16 - 8*n*pi*sin(n*pi) - 16*cos(n*pi)
-----
n^3

assume(n>=1);
betan:=int(x*(2*PI-x)*sin((n/2)*x),x=0..2*PI);
>= 1
16/n^3 + (-16*cos(n*pi) - 8*n*pi*sin(n*pi))/n^3

assume(n,Type::Integer);factor(betan);
Type::Integer
- 8*(2*cos(n*pi) + n*pi*sin(n*pi) - 2)
-----
n^3

simplify(%);
16 - 16*(-1)^n
-----
n^3

```

On notera que les coefficients β_n sont donnés dans le cas général d'une barre homogène dont les extrémités sont maintenues à température nulle par la formule

$$\beta_n = \frac{1}{L} \int_0^L \theta(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (3.2)$$

qui est la formule permettant de calculer les coefficients de Fourier de la fonction impaire et périodique de période $2L$ qui coïncide avec $u(x, 0)$ sur $[0, L]$.

Notons qu'on peut traiter de manière plus générale le cas d'une barre homogène de longueur L dont les extrémités sont maintenues aux températures constantes $T(0)$ et $T(L)$. On pose

$$\theta_0(x, t) = T(0) + \frac{T(L) - T(0)}{L}x,$$

qui est une solution triviale de l'équation de la chaleur vérifiant $\theta_0(0, t) = T(0)$, $\theta_0(L, t) = T(L)$ pour tout t . En posant

$$\theta_1(x, t) = \theta(x, t) - \theta_0(x, t)$$

on est ramené au cas d'une barre homogène dont les deux extrémités sont maintenues à température nulle.

Index

n^e -harmonique, 3
équation de la chaleur, 17
équation des ondes, 13
amplitude d'ordre n , 3
corde vibrante, 14
diffusion de la chaleur dans une barre homogène, 18
fonction continue par morceaux, 2
formule de Parseval, 10
intégrale de Lebesgue, 10
moyenne de Césaro, 1
phase d'ordre n , 3
pulsation, 3
série de Fourier, 1
terme fondamental, 3
théorème de Dirichlet, 8, 9
théorème de Fejer, 8
théorème de Lebesgue, 7

Chapitre 4

(à suivre) Equations des ondes et de la
chaleur sous Mupad et Matlab