Errata à Algèbre et Géométrie

de Jean Fresnel et Michel Matignon

(le 2 avril 2016)

p. 8 , rajouter $U \in M_n(K)$

p. 87 ce qui suit remplace le 5.2.1. et 5.2.2. avec quelques éléments de démonstration

5.2. Sur "l'injectivité" de l'exponentielle de matrices réelles

5.2.1. *Soient* $N, N' \in M_n(\mathbb{R})$ *, deux matrices nilpotentes. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

$i)$ *On a* $N = N'$ *,* $ii)$ *on a* $\exp(N) = \exp(N')$.

5.2.2. *Soient* $D, D' \in M_n(\mathbb{R})$ *, deux matrices semi-simples,* $m_D(T)$ (resp. $m_{D'}(T)$) *le polynôme minmal de* D (resp. D'). *On décompose* $m_D(T)$ *sous la forme*

$m_D(T) = U_1(T)\, U_2(T)\, U_3(T)\, U_4(T)$ *avec*

$U_1(T) = (T-\lambda_1)(T-\lambda_2)\ldots(T-\lambda_r)$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$,

$U_2(T) = (T-\mu_1)(T- \quad \mu_1)(T-\mu_2)(T- \quad \mu_2)\ldots(T-\mu_s)(T- \quad \mu_s)$ *avec*

$\mu_k = a_k + i\, b_k$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, *et* $b_k \equiv 0 \,\mathrm{modulo}\, 2\pi\mathbb{Z}$ *et* $b_k \neq 0$,

$U_3(T) = (T-\nu_1)(T- \quad \nu_1)(T-\nu_2)(T- \quad \nu_2)\ldots(T-\nu_t)(T- \quad \nu_t)$ *avec*

$\nu_k = a_k + i\, b_k$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, *et* $b_k \equiv \pi \,\mathrm{modulo}\, 2\pi\mathbb{Z}$, *et enfin*

$U_4(T) = (T-\eta_1)(T- \quad \eta_1)(T-\eta_2)(T- \quad \eta_2)\ldots(T-\eta_u)(T- \quad \eta_u)$ *avec*

$\nu_k = a_k + i\, b_k$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, *et* $b_k \equiv \beta_k \,\mathrm{modulo}\, 2\pi\mathbb{Z}$, *avec* $0 < \beta_k < \pi$.

Soient $\Lambda_1 := \{ \lambda_k \mid 1 \leq k \leq r \}$, $\Lambda_2 := \{ \mu_k \mid 1 \leq k \leq s \}$, $\Lambda_3 := \{ \nu_k \mid 1 \leq k \leq t \}$, $\Lambda_4 := \{ \eta_k \mid 1 \leq k \leq u \}$, $M_i := \{ e^{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda_i \}$.

On associe aussi à D' *une décomposition analogue avec des* $U'_i(T)$ *, des ensembles* Λ'_i *et* M'_i *.*

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

$i)$ *On a* $\exp(D) = \exp(D')$,

$ii)$ *les trois propriétés suivantes sont satisfaites.*

1. *On a* $M_1 \cup M_2 = M'_1 \cup M'_2$. *Soient* $m \in M_1 \cup M_2$,

$$W_{m :=} \Big(\bigoplus_{e^{\lambda} = m,\, \lambda \in \Lambda_1} \ker_{\mathbb{R}}(D - \lambda I_n) \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{e^{\mu} = m,\, \mu \in \Lambda_2} \ker_{\mathbb{R}}(D - \mu I_n)(D - \quad \mu_{In}) \Big) ,$$

$$W'_{m :=} \Big(\bigoplus_{e^{\lambda} = m,\, \lambda \in \Lambda_1{}'} \ker_{\mathbb{R}}(D' - \lambda I_n) \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{e^{\mu} = m,\, \mu \in \Lambda'_2} \ker_{\mathbb{R}}(D' - \mu I_n)(D' - \quad \mu I_n) \Big) ,$$

alors on a $W_{m =} W'_m$.

2. *On a* $M_3 = M'_3$. *Soient* $m \in M_3$,

$$W_{m :=} \bigoplus_{e^{\nu} = m,\, \nu \in \Lambda_3} \ker_{\mathbb{R}}(D - \nu I_n)(D - \quad \nu I_n)) ,$$

$W'_m := \underset{e^{\nu}=m,\, \nu\in\Lambda'_3}{\oplus} \ker_{\mathbb{R}}(D'-\nu I_n)(D'-\overline{\nu} I_n))$, *alors on a* $W_m=W'_m$.

3. *On a* $M_4=M'_4$. *Soient* $m\in M_4$, $m=\rho e^{i\theta}$ *avec* $0<\theta<\pi$,

$W_m := \underset{e^{\eta}=m,\, \eta\in\Lambda_4}{\oplus} \ker_{\mathbb{R}}(D-\eta I_n)(D-\overline{\eta} I_n))$,

$W'_m := \underset{e^{\eta}=m,\, \eta\in\Lambda'_4}{\oplus} \ker_{\mathbb{R}}(D'-\eta I_n)(D'-\overline{\eta} I_n))$, *alors on a* $W_m=W'_m$ *et il existe* $u_m\in G\ell(W_m)$ *tel que* $(u_m)^2=-\mathbb{1}_{W_m}$, $u_m D=D u_m$, $u_m D'=D' u_m$, *et pour* $X\in\ker_{\mathbb{R}}(D-\eta I_n)(D-\overline{\eta} I_n)$, *si* $\eta=a+ib\in\Lambda_4$, *on a* $D(X)=aX-b\,u_m(X)$; *et pour* $X\in\ker_{\mathbb{R}}(D'-\eta' I_n)(D'-\overline{\eta'} I_n)$, *si* $\eta'=a'+ib'\in\Lambda_4$, *on a* $D'(X)=a'X-b'\,u_m(X)$.

(*si* $A\in M_n(\mathbb{R})$, *alors* $\ker_{\mathbb{R}}(A):=\{Z\in\mathbb{R}^n \mid AZ=0\}$).

Plan de la démonstration de 5.2.2.

L'implication $i)\Rightarrow ii)$

1) Le calcul de $\exp(D)$

Soient $\xi\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$, $\xi=a+ib$, $\ker_{\mathbb{C}}(D-\xi I_n):=\{Z\in\mathbb{C}^n \mid (D-\xi I_n)(Z)=0\}$, $Q(T):=(T-\xi)(T-\overline{\xi})=T^2-2aT+(a^2+b^2)$, $\ker_{\mathbb{R}} Q(D)==\{X\in\mathbb{R}^n \mid Q(D)(X)=0\}$. Alors $\ker_{\mathbb{R}}(Q(D))\subset\ker_{\mathbb{C}}(D-\mu_j I_n)\oplus\ker_{\mathbb{C}}(D-\overline{\mu_j} I_n)$ et l'application $Y\mapsto Y+\overline{Y}$ est une bijection $\mathbb{R}$-linéaire de $\ker_{\mathbb{C}}(D-\mu_j I_n)$ sur $\ker_{\mathbb{R}} Q(D)$.

Soit $u\in G\ell(\ker(\mathbb{Q}(D))$ défini par $u(Y+\overline{Y}):=i(\overline{Y}-Y)$. Comme $D(Y)=\xi Y$, on a $D(\overline{Y})=\overline{\xi}\,\overline{Y}$. Il suit facilement que $D(Y+\overline{Y})=a(Y+\overline{Y})-b(i(\overline{Y}-Y))$. Ainsi pour $X\in\ker_{\mathbb{R}}(Q(D))$, on a $D(X)=aX-b\,u(X)$; facilement $u^2=-\mathbb{1}$ et donc $D(u(X))=bX+a\,u(X)$ et $D\,u(X)=uD(X)$.

Calculons $\exp(D)(X)$ pour $X\in\ker_{\mathbb{R}} Q(D)$. Par ce qui précède on a

$\begin{bmatrix} D(X) \\ D(u(X)) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ u(X) \end{bmatrix}$ et donc

$\begin{bmatrix} D^k(X) \\ D^k(u(X)) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^k\begin{bmatrix} X \\ u(X) \end{bmatrix})$. Il suit que

$\begin{bmatrix} \exp(D)(X) \\ \exp(D)(u(X)) \end{bmatrix}=\exp(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix})(\begin{bmatrix} X \\ u(X) \end{bmatrix})$.

Or $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}=aI_2+b\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, donc

$\exp\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}=\exp(aI_2)\times\exp(b\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})$, soit

$\exp\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}=e^a I_2\times((\cos b)I_2+(\sin b)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})$.

En résumé, on a

$\exp(D)(X)=e^a((\cos b)X-(\sin b)\,u(X))$

$\exp(D)(u(X))=e^a(\sin b)X+(\cos b)\,u(X))$.

2) Comme D est une matrice diagonalisable de $M_n(\mathbb{C})$, il suit que $\exp(D)$ est une matrice diagonalisable de $M_n(\mathbb{C})$ et que l'ensemble de ses valeurs propres est exactement $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup \ M_4$. Les valeurs propres réelles positives sont les éléments de $M_1 \cup M_2$, les valeurs propres réelles négatives sont les éléments de M_3 et enfin les valeurs propres non réelles sont les éléments de $M_4 \cup {}^{\circ}\ M_4$. Il suit bien de cela que $M_1 \cup M_2 = M'_1 \cup M'_2$, $M_3 = M'_3$, $M_4 = M'_4$. Enfin en considérant l'espace propre associé à ces valeurs propres, on déduit que $W_m = W'_m$.

3) Il nous reste à montrer la partie 3.
Soient $m \in M_4$, $V_{m:=} \bigoplus_{e^\eta = m,\, \eta \in \Lambda_4} \ker_{\mathbb{C}}(D - \eta I_n)$,
$V'_{m:=} \bigoplus_{e^\eta = m,\, \eta \in \Lambda'_4} \ker_{\mathbb{C}}(D' - \eta I_n)$, alors V_m est l'espace propre de $\exp(D)$ associé à la valeur propre m, de même V'_m est l'espace propre de $\exp(D')$ associé à la valeur propre m ; comme $\exp(D) = \exp(D')$, on a $V_m = V'_m$. Il suit de 1) que l'application $Y \longmapsto Y + \overline{Y}$ est une bijection $\mathbb{R}$-linéaire de
$V_{m:=} \bigoplus_{e^\eta = m,\, \eta \in \Lambda_4} \ker_{\mathbb{C}}(D - \eta I_n)$ sur
$W_{m:=} \bigoplus_{e^\eta = m,\, \eta \in \Lambda_4} \ker_{\mathbb{R}}(D - \eta I_n)(D - \ \eta I_n))$, notée u_m. De même
l'application $Y \longmapsto Y + \overline{Y}$ est une bijection $\mathbb{R}$-linéaire de
$V'_{m:=} \bigoplus_{e^\eta = m,\, \eta \in \Lambda'_4} \ker_{\mathbb{C}}(D' - \eta I_n)$ sur
$W'_{m:=} \bigoplus_{e^\eta = m,\, \eta \in \Lambda'_4} \ker_{\mathbb{R}}(D' - \eta I_n)(D' - \ \eta I_n)$, qui est aussi u_m. Il suit encore de 1) que $u_m \in G\ell(W_m)$, $(u_m)^2 = -\mathbb{1}_{W_m}$, $u_m D = D u_m$, $u_m D' = D' u_m$, et pour $X \in \ker_{\mathbb{R}}(D - \eta I_n)(D' - \ \eta I_n)$ *on a pour* $\eta = a + ib$,
$D(X) = aX - b\, u_m(X)$; de même pour $X \in \ker_{\mathbb{R}}(D' - \eta I_n)(D' - \ \eta' I_n)$ on a pour $\eta' = a' + ib'$, $D'(X) = a'X - b'\, u_m(X)$.

Enfin $ii)$ implique $i)$ est sans difficulté.

p. 89, ligne 14
$e_i \exp A = e_i e^{a_i} (I_n + \frac{N_i}{1!} + \ldots + \frac{(N_i)^{a_i - 1}}{(\alpha_i - 1)!})$. Alors la formule de **6.1.** suit du fait
ligne 16
4) Montrons **6.2.**. Si $P(X) = (X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_r)$ est le polynôme minimal de A, on sait que $a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$. Il s'agit d'abord de montrer la formule $1 = u_1 Q_1 + u_2 Q_2 + \ldots + u_r Q_r$. Posons

$Q(X) := u_1 Q(X) + u_2 Q_2(X) + \ldots + u_r Q_r(X)$, facilement, on a $Q(a_i) = 1$ pour $1 \leq i \leq r$; sachant que $\deg Q \leq r-1$ et que les a_i sont distincts, on a $Q(X) - 1 = 0$, i.e. la formule de Bézout.

ligne -9
Comme $(X - a_i)\, Q_i(X) = P(X)$, on a donc $e_i\,(A - a_i I_n) = 0$, i.e. $e_i N_i = 0$ selon les notations de **6.1.** , Alors par **6.1.** on a bien $\exp(A) = \sum_{i=1}^{r} e_i e^{a_i}$.

ligne -8
5) Montrons **6.3.** . Comme en 2) si $A' = B' + C'$ avec $B'C' = C'B'$ et

ligne -3
la formule de **6.3.**

ligne -2
Application de 6.3. Soient $A \in M_n(K)$ avec $(A - I_n)^2 (A - 2I_n) = 0$, $t \in K$.

p. 209 , ligne 9
sont θ_j *pour* $1 \leq j < p$ *définies par* $\theta_j(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

p. 220 , ligne-8
13.2.2.3) Conclure de **8.2.** que $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1}$ sont exactement

p. 243 , ligne -10
$\sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) f(d) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) \left(\sum_{\delta | d} g(\delta) \right) = \sum_{\delta | n} g(\delta) \left(\sum_{\substack{d \\ \delta | d | n}} \mu(\frac{n}{\delta}) \right)$.

p. 244 , ligne 8

$d \neq n$. Ainsi X'_n est l'ensemble des $x \in X$ pour les quels n est le plus petit entier m avec $x \in X_m$, au sens de la relation d'ordre définie par d est inférieur ou égal à n si et seulement si $d \mid n$.

p. 252 , ligne 4 lire (ex. 87 p. 245 partie 1)
p. 258 , ligne 3 lire l'ensemble des idempotents de B .

p. 278 , ligne 15
Montrer que $(d_1!)(d_2!)$ divise $(d_1+d_2)!$ (remarquer que $\frac{(d_1+d_2)!}{(d_1!)(d_2!)}$ n'est

p. 279 , ligne -6
$R(X):=P(z-\lambda X)\in M[X]$, on a donc $R(y)=P(x)=0$. Montrons que

p. 279 , ligne-2
On a donc $1=E(X)A(X)+F(X)B(X)$, $Q(X)=S(X)E(X)$,

p. 282 , ligne 2
impair, $p_i \neq p_j$ *pour* $i \neq j$, $u \geq 0, 1 \geq v_i \geq 0, M:=\mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{n}), \sin(\frac{2\pi}{n})]$. *Alors les*

p.284 , il faut remplacer les lignes 10 à 20 de 2.3) par ce qui suit.

On suppose i) satisfait. On a donc $n=2^u p_1 p_2 \ldots p_s$ avec $p_i=1+2^{\beta_i}$, si p_i est un premier impair. Il s'agit donc de montrer que $\mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{n}), \sin(\frac{2\pi}{n})]$ est contenu dans une tour quadratique (réelle).
1) De la formule $\cos(a)^2-\frac{\cos(2a)}{2}-\frac{1}{2}=0$, un déduit facilement par récurrence sur u que $\mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{2^u})]$ est une tour quadratique et de la formule $(\sin(\frac{2\pi}{2^u}))^2=1-(\cos(\frac{2\pi}{2^u}))^2$, que $\mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{2^u}), \sin(\frac{2\pi}{2^u})]$ est une tour quadratique.
2) Si $p_i=1+2^{\beta_i}$, on sait que $\mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{p_i})]$ est une tour quadratique (c'est la partie 2.2. du même exercice). Sachant que $(\sin(\frac{2\pi}{p_i}))^2=1-(\cos(\frac{2\pi}{p_i}))^2$, il suit que $\mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{p_i}), \sin(\frac{2\pi}{p_i})]$ est une tour quadratique.
3) Facilement $\mathrm{pgcd}(\frac{n}{2^u}, \frac{n}{p_1}, \frac{n}{p_2}, \ldots, \frac{n}{p_s})=1$, alors il suit Bézout qu'il existe des entiers $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_s$ avec $1=a_0\frac{n}{2^u}+a_1\frac{n}{p_1}+a_2\frac{n}{p_2}+\ldots+a_s\frac{n}{p_s}$. Ce qui veut dire que $\frac{2\pi}{n}=a_0\frac{2\pi}{2^u}+a_1\frac{2\pi}{p_1}+a_2\frac{2\pi}{p_2}+\ldots+a_s\frac{2\pi}{p_s}$. Il suit des formules trigonométriques que $\cos(\frac{2\pi}{n})$ (resp. $\sin(\frac{2\pi}{n})$) est une forme polynomiale en $\cos(\frac{2\pi}{2^u}), \cos(\frac{2\pi}{p_1}), \cos(\frac{2\pi}{p_2}), \ldots, \cos(\frac{2\pi}{p_s})$, et aussi en $\sin(\frac{2\pi}{2^u}), \sin(\frac{2\pi}{p_1}), \sin(\frac{2\pi}{p_2}), \ldots, \sin(\frac{2\pi}{p_s})$. Par suite $\cos(\frac{2\pi}{n})$ et $\sin(\frac{2\pi}{n})$ appartiennent au compostitum des tours quadratiques définies en 1) et 2). Sachant qu'un compositum de tours quadratiques est une tour

quadratique, il suit que $\mathbb{Q}[\cos(\frac{2\pi}{n}), \sin(\frac{2\pi}{n})]$ est contenu dans une tour quadratique ; ce qui est ii).

p. 318 , ligne -9
2) Montrons 2. Soient $f := \sum_{n \geq 0} u_n X^n$, $g := \sum_{n \geq 0} v_n X^n$, on a donc

p. 319 , ligne-9
Démonstration Soit $f := \sum_{n \geq 0} u_n X^n$, on a donc $P(X) = 1 + p_1 X + \ldots + p_m X^n$

p. 329 , ligne 9 lire $a_i = (-1)^i s_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

p. 349 , ligne 7 lire $0 \leq i \leq d$
, ligne 13 lire $0 \leq i \leq d$

p. 436 , ligne 9
peut supposer que $0 \in I$, $1 \in J$. Sachant que $a_i - o = d\,e + w_i$ avec $w_i \in W$