

3^{ème} édition
revue et augmentée

Jean Fresnel

MÉTHODES MODERNES
EN
GÉOMÉTRIE



200 exercices - 600 figures


hermann

Table des matières

Introduction

A . Géométrie affine

0. Introduction	1
1. Espace affine ; calcul barycentrique	3
1.1. Groupe opérant sur un ensemble	3
1.2. Définition des espaces affines	3
1.3. Le calcul barycentrique	6
2. Variétés linéaires affines	8
2.1. Définition des variétés linéaires affines ; dimension, parallélisme	8
2.2. Famille affinement génératrice, affinement libre	10
2.3. Intersection de variétés linéaires	14
2.4. Exercices	16
3. Applications linéaires affines	24
3.1. Définition des applications affines	24
3.2. Structure du groupe affine	27
3.3. Image, image réciproque d'une variété, rang	28
3.4. Fonctions linéaires affines	29
3.4.1. Définition	29
3.4.2. Représentations analytiques	29
3.5. Exercices	31
4. Quelques résultats de géométrie	42
4.1. Homothéties-translations, projection, affinité	42
4.2. Les théorèmes de Thalès, Ménélaüs, Céva, Pappus, Desargues	43
4.3. Exercices	49

B. Géométrie projective

0. Introduction	61
1. Définition des espaces projectifs, coordonnées homogènes	63
2. Variétés linéaires projectives	64
2.1. Définitions	64
2.2. Famille génératrice	64
2.3. Famille projectivement libre (liée)	65
3. Complétion projective d'un espace affine	65
3.1. Espace affine et espace projectif	65
3.2. Les théorèmes de Pappus et Desargues	67
4. Applications linéaires projectives	69
4.1. Définition des applications projectives	69
4.2. Le groupe projectif linéaire $PG\ell(V)$, homologies	69
4.3. Repère projectif	71
5. Le birapport	73
5.1. Définition et propriétés	73
5.2. Le théorème du quadrilatère complet	75
5.3. Exercices	76
6. La topologie de l'espace projectif $P(V)$ ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C})	93
7. Les coniques du plan projectif	95
7.1. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques	95
7.1.1. Définitions des formes bilinéaires symétriques et quadratiques	95
7.1.2. Représentation matricielle et polynômes homogènes de degré 2	95
7.1.3. Orthogonalité, forme dégénérée, non dégénérée, rang	95
7.1.4. Éléments isotropes, espaces isotropes, totalement isotropes	96
7.1.5. Formes quadratiques en dimension 2 (isotropes)	97
7.1.6. Formes quadratiques en dimension 3 (isotropes)	97
7.2. Coniques du plan projectif	98
7.2.1. Définitions	98
7.2.2. Classification des coniques projectives	99
7.2.3. Intersection d'une droite et d'une conique	100
7.2.4. Tangentes à une conique, issue d'un point	101
7.2.5. Points conjugués par rapport à une conique	101
7.2.6. Conique passant par cinq points	102
7.2.7. Expression analytique des coniques projectives	104
7.3. Coniques dans le plan affine	104
7.3.1. Définitions	104

Table des matières 3

7.3.2. Direction asymptotique	106
7.3.3. Centre d'une conique, conique à centre	107
7.3.4. Diamètre d'une conique dans une direction	107
7.3.5. Classification des coniques affines	108
7.4. Exercices	110

C. Géométrie euclidienne

0. Introduction	131
1. Espaces affines euclidiens	133
1.1. Groupe orthogonal, angle orienté, non orienté de demi-droites, de droites	133
1.1.1. Le groupe orthogonal euclidien	133
1.1.2. Angles orientés, non orientés de droites, de demi-droites	134
1.1.3. Réduction des automorphismes de l'espace euclidien	138
1.1.4. Le groupe orthogonal en dimension 2, 3	139
1.2. Espace affine euclidien et groupe des isométries	143
1.2.0. Espace affine	143
1.2.1. Le groupe des isométries, définitions, exemples	144
1.2.2. Des générateurs pour $\mathcal{I}_S(\mathcal{E})$	145
1.2.3. Le groupe des isométries en dimension 2 et 3	148
1.3. Le groupe des similitudes	151
1.4. Orthogonalité, distance	152
1.4.1. Distance d'un point à une variété	152
1.4.2. Distance de deux variétés, la perpendiculaire commune	153
1.4.3. Distances entre plusieurs points	154
1.4.4. Equidistance, hyperplan médiateur	155
1.4.5. Une caractérisation des isométries	157
1.5. Invariants de $\mathcal{I}_S(\mathcal{E})$ en dimension 2 et 3	158
1.5.1. Les invariants en dimension 2	158
1.5.2. Le composé de deux isométries planes	158
1.5.3. Les déplacements en dimension 3	160
1.5.4. Conjugaison par une similitude	161
1.6. Exercices	162
2. La géométrie du triangle	185
2.1. Sur les angles d'un triangle	185
2.2. Arc capable	188
2.3. Droites et cercles remarquables attachés à un triangle	191
2.4. Formulaire	192
2.5. Quelques résultats	193
2.6. Cercles, homothétie-translation, similitude	197
2.7. Les invariants des similitudes planes	199
2.8. Exercices	201

3. Sphères, cercles et inversion	247
3.1. Sphères	247
3.1.1. Définitions	247
3.1.2. Puissance d'un point par rapport à une sphère	250
3.1.3. Hyperplan radical de deux sphères	251
3.1.4. Sphères orthogonales	252
3.2. Inversion	252
3.2.1. Définitions	252
3.2.2. Transformés des sphères et hyperplans	253
3.2.3. L'inversion et les angles	254
3.3. Le groupe circulaire du plan	254
3.3.1. L'espace \tilde{E} , cercles et droites	254
3.3.2. Structure du groupe circulaire	255
3.3.3. Interprétation analytique du groupe circulaire (sans démonstration)	257
3.4. Constructions au compas (seulement)	258
3.5. Famille linéaire de cercles	261
3.5.1. Définition	261
3.5.2. Famille concentrique, non concentrique, axe radical, ligne des centres	261
3.5.3. Famille à point de base, points de Poncelet (ou limites), famille de cercles tangents	262
3.5.4. Famille conjuguée d'une famille linéaire de cercles	263
3.6. Exercices	265
4. Quadriques, coniques, affines, euclidiennes	291
4.1. Définition des quadriques affines	292
4.2. Classification des quadriques affines sur un K -espace affine	295
4.3. Quelques exemples de classification des quadriques affines	298
4.4. Classification des quadriques affines euclidiennes	299
4.5. Les quadriques affines euclidiennes en dimension 3	304
4.5.1. Description et classification	304
4.5.2. Les quadriques propres qui contiennent des droites	307
4.5.3. Les quadriques propres qui ont un centre	308
4.5.4. Le groupe des isométries d'une quadrique propre	308
4.6. Les coniques affines euclidiennes	311
4.6.1. Les définitions des coniques affines	311
4.6.2. Classification des coniques affines sur un K -espace affine	317
4.6.3. Quelques exemples de classification des coniques affines	321
4.6.4. Classification des coniques affines euclidiennes	323
4.6.5. Le groupe des isométries d'une conique propre	327
4.6.6. Définition par foyer et directrice des ellipses (<i>non cercles</i>), hyperboles, paraboles	328
4.6.7. Définition bifocale des ellipses et des hyperboles	329
4.6.8. Tangentes à une conique propre	331
4.7. Exercices	374

5. Polyèdres, polyèdres réguliers en dimension 3	363
5.1. Polyèdre convexe de l'espace affine réel	363
5.1.1. Demi-espace, topologie de l'espace affine réel	363
5.1.2. Polyèdre convexe, polytope, face, arête, sommet	364
5.1.3. Dualité dans les espaces euclidiens	370
5.2. Les polyèdres réguliers en dimension 3	373
5.2.1. Définitions et premières propriétés	373
5.2.2. Il y a 5 possibilités de polyèdres réguliers en dimension 3	377
5.2.3. Il y a 5 polyèdres réguliers en dimension 3 : le tétraèdre, le cube (ou hexaèdre), son dual l'octaèdre, le dodécaèdre, son dual l'icosaèdre	379
5.2.4. Le groupe d'un polyèdre régulier en dimension 3	380
5.3. Exercices	382

D. Géométrie non euclidienne

0. Introduction	385
1. L'axiomatique de la géométrie d'Euclide	385
1.1. Les axiomes I, II, III	385
1.2. Conséquences des axiomes I, II, III	387
1.2.1. Quelques cas d'égalité des triangles	387
1.2.2. Sur les angles	388
1.2.3. Angles droits et triangles rectangles	389
1.2.4. Droites parallèles et angles	391
1.3. Les axiomes IV et V	392
1.3.1. L'axiome IV (de continuité)	392
1.3.2. L'axiome V des parallèles	392
1.3.3. Premières conséquences des axiomes IV et V	393
1.3.4. Le plan d'Euclide est le plan euclidien	394
2. Une géométrie non euclidienne ; le plan hyperbolique	394
2.1. Définition d'un plan hyperbolique	394
2.2. L'axiome V n'est pas satisfait	395
2.3. L'axiome I est satisfait	395
2.4. L'axiome II est satisfait	395
2.5. Les axiomes III et IV sont satisfaits	395
3. Exercices	397

Bibliographie	401
Index des notations	404
Index des noms	405