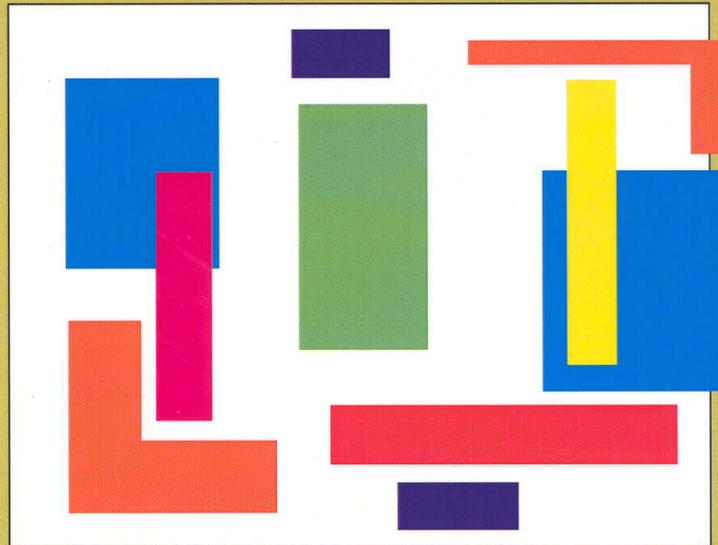


Jean Fresnel
Michel Matignon

Algèbre et Géométrie

Recueil d'exercices corrigés




hermann

Table des matières

Introduction

Algèbre linéaire

1. Espace vectoriel des polynômes à n variables de degré au plus r	1
2. La famille des sous-espaces vectoriels de dimension donnée	2
3. Un endomorphisme de l'espace vectoriel $M_n(K)$	3
4. La décomposition LU	8
5. La décomposition de Bruhat	9
6. Dualité dans les espaces vectoriels de fonctions	11
7. Une décomposition en sous-espaces stables pour un endomorphisme	12
8. Les sous-espaces stables de $k[u](x)$	13
9. Sur la décomposition de Jordan pour les nilpotents	14
10. Une représentation des nilpotents ; les matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{F}_q)$	16
11. Un algorithme pour le théorème de Dunford-Jordan	18
12. Quelques calculs d'invariants de similitude	19
13. Matrices de trace nulle, crochet de Lie, matrices de diagonale nulle	20
14. Famille commutative d'endomorphismes semi-simples sur \mathbb{R}	24
15. Espaces vectoriels d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux	26
16. Produit de 2 transvections et produit de 2 involutions	27
17. Automorphismes des algèbres de matrices	29
18. Homomorphismes des algèbres de matrices	30
19. Sur les isomorphismes de groupes linéaires	31
20. Sur les isomorphismes entre $Gl_2(K)$ et $Gl_2(K')$	33
21. Les sous-groupes fermés du groupe des matrices triangulaires de $Sl_2(\mathbb{R})$	36
22. Sur le groupe $Sl_2(\mathbb{Z})$ opérant sur $M_2(\mathbb{Z})$	39
23. Sous-groupes commutatifs de $PGL_2(\mathbb{C})$	40
24. Sur la divisibilité du groupe $Gl_n(k)$, $Gl_n(\mathbb{R})$, $Gl_n^+(\mathbb{R})$	42
25. Sur les sous-groupes de torsion de $Gl_n(\mathbb{Q})$, le théorème de Schur	44

26. Sur les sous-groupes finis de $Gl_n(\mathbb{Q})$, $Gl_n(\mathbb{Z})$	46
27. Des sous-groupes abéliens maximaux de $T_{n,1}^-(k)$	51
28. Des générateurs pour $T_{n,1}(k)$ et ses sous-groupes	52
29. Groupes irréductibles et techniques de Burnside	54
30. Sur les commutateurs de $Gl_2(k)$ et $Gl_3(k)$	55
31. Un théorème de Brauer sur la conjugaison des matrices de permutation	57
32. Un peu de topologie sur l'espace affine des polynômes	60
33. Un peu de topologie sur les matrices	62
34. Sur la topologie des nilpotents	69
35. Sur la topologie des classes de similitude	71
36. Matrices diagonalisables et groupes bornés	77
37. Matrices dont le spectre est dans la boule unité	77
38. Sur l'exponentielle de matrices	79

Espaces quadratiques

39. La décomposition en hyperbolique plus défini	93
40. Sur la signature de la matrice de Hankel associée à la suite des sommes de Newton des racines d'un polynôme à coefficients réels	97
41. Sur la signature d'une matrice symétrique réelle	98
42. Un théorème de Cauchy sur l'entrelacement des racines du polynôme caractéristique d'une matrice symétrique réelle	99
43. Signature d'un sous-espace vectotiel ; la semi-continuité de la signature	100
44. Groupes irréductibles et formes bilinéaires symétriques	101
45. Sous-groupes compacts de $Gl_n(\mathbb{R})$, $Gl_n(\mathbb{C})$	103
46. Sur les combinaisons linéaires de carrés de formes linéaires	106
47. Sur les polynômes orthogonaux	107
48. Les sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$ et de $O_3(\mathbb{R})$	109
49. Les automorphismes orthogonaux sur \mathbb{C}	119
50. Le groupe des similitudes d'une forme quadratique	125
51. Sur le discriminant d'un espace quadratique	128
52. Espaces quadratiques en caractéristique 2	130
53. Sur les formes bilinéaires alternées	132

Groupes

54. Produit semi-direct de groupes	139
55. Action d'un groupe sur les classes à gauche modulo un sous-groupe	144
56. Sur les sous-groupes d'indice 2	145
57. Les groupes d'ordre 153 et 306	145
58. Un théorème de Jordan sur les points fixes	147
59. Sur les orbites ; un théorème de Burnside	148
60. Le coloriage des roulettes, des colliers, des faces et des sommets d'un cube.	149
61. Sur le défaut de commutativité d'un groupe non abélien	151
62. Décomposition en transpositions	152
63. Les sous-groupes distingués de A_n et de S_n	153
64. Générateurs de \mathfrak{A}_n et sous-groupes distingués de \mathfrak{S}_n	155
65. Commutateurs de \mathfrak{S}_n et \mathfrak{A}_n	157
66. Sur les sous-groupes d'ordre p de \mathfrak{S}_n	160
67. Sur le centralisateur d'une permutation	161
68. Sur les automorphismes du groupe symétrique	162
69. Sur les p -sous-groupes de Sylow du groupe symétrique	165
70. Un groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à \mathfrak{A}_5	166
71. Une caractérisation du groupe \mathfrak{A}_5	168
72. Sur le calcul de quelques signatures	174
73. Sur un comptage de matrices	181
74. Les groupes $\mathfrak{A}_5, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_4$ une représentation dans $PGL_2(\mathbb{C}), PSU_2(\mathbb{C}), SO_3(\mathbb{R})$	183
75. Le groupe $PGL_2(\mathbb{F}_4)$ est isomorphe à A_5 ; le groupe $PGL_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à S_5	190
76. Sur le groupe de Frattini d'un p -groupe	192
77. Sur les p -groupes	193
78. Sur les groupes divisibles	195
79. Sur les éléments de torsion des groupes nilpotents	195
80. Commutateurs et groupe dérivé	197
81. Sur un groupe isomorphe à \mathbb{Z}	200
82. Sur les représentations linéaires de groupes finis	202

Anneaux

83. Quelques congruences sur les coefficients binomiaux	239
84. Coefficient multinomial	241
85. Sur le développement décimal des nombres rationnels	241
86. Sur la fonction de Möbius	242
87. La loi de réciprocité quadratique	245
88. Le lemme de Gauss	250
89. Application arithmétique de van der Monde	250
90. Vers le théorème de Dirichlet sur les premiers dans une progression arithmétique	251
91. L'inégalité de Pafnouty Tchebychev sur la répartition des nombres premiers	253
92. Anneau principal, anneau noethérien, idéaux inversibles et idéaux premiers	255
93. Quotients d'anneaux principaux	257
94. Entiers de Gauss et décomposition en sommes de carrés	260
95. Anneau principal, non euclidien	263
96. Anneau commutatif dans lequel tout idéal est principal	265
97. L'anneau $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$	267
98. L'équation diophantienne $y^2 = x^3 - 2$	269
99. L'équation de Pell-Fermat	269
100. Le théorème de Legendre pour l'équation $ax^2 + by^2 - cz^2 = 0$	273
101. Un polynôme sans racine dans \mathbb{Q} , ayant pour tout m une racine modulo $m\mathbb{Z}$	276
102. Sur le degré du corps de décomposition	277
103. Extensions séparables et théorème de l'élément primitif	278
104. Extensions cyclotomiques, construction à la règle et au compas, théorème de Gauss sur les polygones réguliers constructibles.	281
105. Une extension galoisienne de \mathbb{Q}	294
106. Les formules de Cardan réelles	295
107. Groupes finis d'ordre impair qui sont groupes des inversibles d'un anneau	296
108. Sur la factorisation des polynômes de $\mathbb{F}_p[X]$; l'algorithme de Berlekamp	299
109. Le théorème de Sturm	302
110. Sur la règle des signes de Descartes; application aux polynômes à coefficients réels qui se factorisent en polynômes de degré 1	304

111. Eléments simples ; fractions rationnelles ; théorème de Lüroth ; suites récurrentes linéaires	308
112. Discriminant, polynômes séparables, matrices diagonalisables ; polynômes symétriques	321
113. Les fonctions polynomiales définies sur l'algèbre des matrices carrées et invariante par conjugaison	330
114. Les polynômes additifs	331
115. Sur l'application puissance m -ième	333
116. Séries formelles et théorème de Puiseux	335

Géométrie

117. Symétries orthogonales, point de Lemoine	341
118. Un triangle de lumière, de périmètre minimum	343
119. Sur la convexité dans un triangle et dans un repère barycentrique	347
120. Enveloppe convexe d'une partie d'un \mathbb{R} -espace affine, théorème de Carathéodory, enveloppe convexe d'une partie compacte, enveloppe convexe et composantes connexes	348
121. Un calcul de coordonnées barycentriques ; barycentres célèbres du triangle ; sphères tangentes aux faces d'un tétraèdre	350
122. Un calcul de la fonction d'Appolonius, équation barycentrique du cercle, cercles inscrits et circonscrits à un triangle	359
123. Le groupe engendré par les symétries orthogonales relativement aux côtés d'un triangle ; un tuilage du plan euclidien	361
124. Tangente à une conique	362
125. Parabole passant par 4 points	365
126. Sur l'ellipse de Steiner, un théorème de Lucas	367
127. Conique tangente aux côtés d'un triangle en leurs milieux	368
128. Sur les coniques affines via les coniques projectives	369
129. Classification des coniques affines sur \mathbb{F}_q	373
130. Trajectoires qui sont des coniques	375
131. Comptage de points sur des variétés sur les corps finis	376
132. Sur le groupe affine de l'enveloppe convexe d'une famille de points	382
133. Le groupe des isométries du tétraèdre régulier et du cube	384

Table des matières VI

134. Matrice de Gram, simplexe régulier, groupe des isométries du simplexe	386
135. Sur les isométries avec point fixe	389
136. Sur la projection orthogonale d'un point d'un polytope sur ses faces	393
137. Groupe d'une quadrique projective ; cône isotrope ; similitude	394
138. Parabolöide hyperbolique	396
139. Hyperboloïde ; triplexes ; groupes	399
140. La configuration de Sylvester-Gallai	413
141. L'isomorphisme de $SO_3(\mathbb{R})$ et $PSU_2(\mathbb{C})$ via la projection stéréographique	415
142. Le théorème de Jung	420
143. Calcul de volumes classiques	423
144. Sur le tétraèdre équifacial	427
145. Sur les hyperplans à égale distance d'un repère affine	435
146. Le groupe des isométries de l'hypercube	437